Л.В. КАНТОРОВИЧ и В.И. КРЫЛОВ

МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ОНТИ · 1936

Л.В. КАНТОРОВИЧ и В.И. КРЫЛОВ

Л. В. КАНТОРОВИЧ и В. И. КРЫЛОВ

Р 313/1
282

МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Цена 15 руб., пер. 1 руб. 25 коп.

ОНТИ НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1936 МОСКВА

АННОТАЦИЯ

Настоящая книга входит в ряд научных монографий, издаваемых ОНТИ.

В ней дается систематическое изложение методов приближенного решения граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Наибольшее внимание уделено уравнениям Лапласа, Пуассона и бигармоническому уравнению, вопросы решения которых имеют весьма важное значение в электротехнике, теплотехнике, строительной механике, гидро и аэромеханике и т. д.

Рассчитана она на научных работников и аспирантов университетов, втузов и научно-исследовательских институтов; кроме того может быть рекомендована всем интересующимся приложениями математики к техническим вопросам.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Широко известна та роль, которую играют дифференциальные уравнения в частных производных в самых разнообразных отделах прикладных наук.

Особенно сильно интерес к ним возрос у нас в последнее время в связи с развитием сети научно-исследовательских институтов, разрабатывающих те или иные проблемы строительства в нашей стране.

Существующая весьма богатая литература по теории уравнений в частных производных не давала ответа на многие вопросы, возникающие при решении различных задач, если имеют в виду довести их до численного результата.

Это и вызвало повышенный интерес к разработке методов приближенного решения уравнений; такая работа и проводилась фактически в целом ряде институтов (Институт Математики и Механики, Институт Сооружений и т. д.).

В частности, методы приближенного решения уравнений составляли один из основных разделов работы Института Математики и Механики при ЛГУ, возникшего в 1931 г., с самого начала его деятельности. Значительную роль в развитии этих вопросов сыграл специальный семинарий, который работал под руководством проф. В. И. Смирнова в 1931—32 г. В результате этого семинария появился целый ряд работ сотрудников Института по этому вопросу.

Далее в 1933—34 г. авторами книги был прочитан курс лекций для сотрудников и аспирантов НИИММ, посвященный тем же вопросам.

Настоящая книга, в значительной мере, представляет результат обработки этих лекций.

Л. В. Канторович.
В. И. Крылов.

ГЛАВА I

МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНОГО РЯДА

§ 1. Метод Фурье

Одним из основных и наиболее распространенных методов решения задач математической физики является метод Фурье. Решение, найденное по этому методу, получается обычно в форме бесконечного ряда, во многих случаях быстро сходящегося, поэтому метод Фурье часто может быть использован и для нахождения необходимых численных результатов; отрезок же этого ряда дает приближенное решение задачи. Мы предполагаем, что читатель знаком с простейшими применениями метода Фурье к решению задач математической физики, например с решением задачи о струне по методу Фурье.[1] Поэтому мы не будем излагать здесь метод Фурье со всей полнотой и подробностью, а рассмотрим только его применение к задачам, относящимся к уравнениям эллиптического типа и главным образом к уравнению Лапласа.

В n° 1 приведено решение одной частной задачи — именно задачи Дирихле для прямоугольника. В n° 2 намечены общие принципы применения метода Фурье к задачам эллиптического типа. В n° 3, 4 — дальнейшие применения метода Фурье к частным задачам.

n° 1. Задача Дирихле для прямоугольника. Простейшим и основным уравнением в частных производных эллиптического типа является уравнение Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Функции непрерывные с частными производными первого и второго порядка, являющиеся решениями этого уравнения, называются гармоническими.

Первая основная задача, относящаяся к уравнению Лапласа, есть задача Дирихле. Она формулируется так: *найти функцию* u,

[1] См. В. И. Смирнов. Курс Высшей математики, т. II, стр. 449 (изд. 2). Н. С. Кошляков. Дифференциальные уравнения математической физики. Вебстер-Сеге. Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. Гильберт-Курант. Методы математической физики.

гармоническую в данной области D и принимающую на замкнутом контуре L, ограничивающем область D, заданные значения. Если уравнения контура L даны в параметрическом виде: $x = x(s)$, $y = y(s)$, то это условие можно, например, записать так:

$$u[x(s),\ y(s)] = f(s),$$

где $f(s)$ заданная функция. Короче будем записывать:

$$u = f(s) \text{ на } L.$$

Сделаем одно замечание, которое будет нам полезно. Если функция $f(s)$ есть сумма $f(s) = f_1(s) + f_2(s)$, то достаточно, очевидно, найти решения u_1 и u_2, обращающиеся на L соответственно в $f_1(s)$ и $f_2(s)$, так как $u = u_1 + u_2$ даст решение задачи, обращающееся на L в $f(s)$.

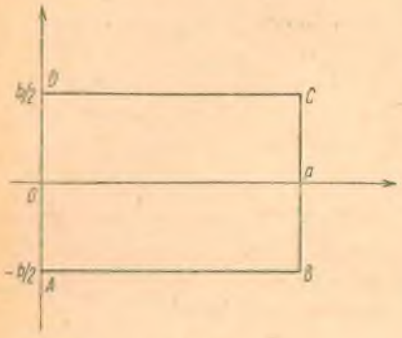


Рис. 1.

Перейдем теперь к решению задачи Дирихле для случая, когда область D есть прямоугольник со сторонами a и b. Оси координат выберем как указано на чертеже, т. е. за ось абсцисс возьмем горизонтальную среднюю линию, а за ось ординат — левую сторону.

Общая задача Дирихле будет состоять здесь в нахождении гармонической функции, обращающейся в заданные произвольные функции на сторонах прямоугольника. Следовательно, граничные условия можно записать так:

$$(2)\qquad u = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } y = \dfrac{b}{2} \\ \varphi_2(x) & \text{„ } y = -\dfrac{b}{2} \end{cases} \qquad u = \begin{cases} \psi_1(y) & \text{„ } x = 0 \\ \psi_2(y) & \text{„ } x = a \end{cases}$$

Решение этой задачи можно получить как сумму $u_1 + u_2$ решений двух более простых задач:

$$(3)\qquad u_1 = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } y = \dfrac{b}{2} \\ \varphi_2(x) & \text{„ } y = -\dfrac{b}{2} \\ 0 & \text{„ } x = 0 \text{ и } x = a \end{cases}$$

$$(3')\qquad u_2 = \begin{cases} \psi_1(y) & \text{при } x = 0 \\ \psi_2(y) & \text{„ } x = a \\ 0 & \text{„ } y = \pm\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

Эти задачи являются более простыми, так как в них мы имеем на двух сторонах нулевые условия. Обе задачи несущественно разнятся между собой и решение одной из них может быть легко сведено к решению другой, поэтому мы рассмотрим подробно лишь задачу нахождения функции u_1.

Задачу решаем методом Фурье. Ищем прежде всего элементарные основные решения, именно функции вида

$$(4)\qquad u = X(x) \cdot Y(y),$$

которые удовлетворяли бы уравнению Лапласа (1) и лишь последнему из условий (3).

Подставляя (4) в уравнение Лапласа, найдем:

$$X''Y + Y''X = 0$$

или

$$(5)\qquad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k,$$

где k некоторая постоянная, ибо оба выражения $\dfrac{X''}{X}$ и $\dfrac{Y''}{Y}$ должны быть постоянными, так как только в этом случае функция одного x может тождественно равняться функции одного y. Для нахождения функции X из (5) получим уравнение второго порядка:

$$(6)\qquad X'' - kX = 0,$$

а чтобы функция u, определенная равенством (4), удовлетворяла последнему из условий (3), функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям:

$$(7)\qquad X(0) = X(a) = 0.$$

Мы должны найти решение уравнения (6), удовлетворяющее условию (7). Если положить $k = -\lambda^2$, [1] то общее решение уравнения (6) будет:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Условия (7) дают

$$C_1 = 0$$

$$C_1 \cos \lambda a + C_2 \sin \lambda a = 0,$$

следовательно $C_1 = 0$ непременно, а C_2 можно взять неравным нулю только при условии

$$(8)\qquad \sin \lambda a = 0,$$

т. е., если λa число кратное π:

$$\lambda a = n\pi \qquad [n = 1, 2, 3, \ldots],$$

n неположительные здесь отсутствуют, так как новых решений они не

[1] Можно было бы рассмотреть и положительные значения k, но они не дали бы никаких отличных от нуля решений. Действительно, положив $k = \lambda^2$, нашли бы $X(x) = C_1 \operatorname{ch} \lambda x + C_2 \operatorname{sh} \lambda x$, начальные условия (7) заставили бы здесь принять $C_1 = C_2 = 0$, т. е. мы не получили бы никакого нетривиального решения.

дают. Итак, при $\lambda = \frac{n\pi}{a}$ мы получаем решение:

$$X_n(x) = C \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad [n = 1, 2, \ldots]. \tag{9}$$

Подставляя $k = -\lambda^2 = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ в (5), получим для Y уравнение

$$Y'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y = 0, \tag{9'}$$

решая которое, найдем

$$Y = C_1 e^{\frac{n\pi}{a} y} + C_2 e^{-\frac{n\pi}{a} y} = C_1 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + C_2 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y, \tag{10}$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные.

Окончательно основное решение уравнения (4) в виду (9) и (10) можем записать так:

$$u = \left(A \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + B \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y\right) \sin \frac{n\pi}{a} x, \tag{11}$$

где A и B опять произвольные постоянные.

Теперь решение нашей задачи — функцию u_1 можем искать в виде суммы основных решений:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y\right) \sin \frac{n\pi}{a} x, \tag{12}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа (1) и последнему из условий (3), остается подобрать постоянные A_n и B_n так, чтобы удовлетворить первым двум из условий (3). На основании этих условий пишем следующие равенства:

$$\begin{cases} u_1\Big|_{y=\frac{b}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}\right) \sin \frac{n\pi}{a} x = \varphi_1(x), \\ u_1\Big|_{y=-\frac{b}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}\right] \sin \frac{n\pi}{a} x = \varphi_2(x). \end{cases} \tag{13}$$

С другой стороны, разлагая $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в ряды, по $\sin \frac{n\pi}{a} x$, имеем:

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(1)} \sin \frac{n\pi x}{a}; \quad \varphi_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(2)} \sin \frac{n\pi x}{a}, \tag{14}$$

где

$$\beta_n^{(1)} = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx; \quad \beta_n^{(2)} = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi_2(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \tag{15}$$

Сравнивая коэфициенты рядов (13) и (15), получаем следующие равенства:

$$\begin{cases} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} = \beta_n^{(1)}, \\ A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} = \beta_n^{(2)}. \end{cases} \tag{16}$$

Если из этих равенств определить A_n и B_n и подставить в (12), то для u_1 получаем окончательно следующее выражение:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)}}{2 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + \frac{\beta_n^{(1)} - \beta_n^{(2)}}{2 \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}\right] \sin \frac{n\pi x}{a}. \tag{17}$$

Этот ряд будет наверное сходящимся во всякой точке внутри прямоугольника, ибо $\beta_n^{(1)}$ и $\beta_n^{(2)}$, как коэфициенты Фурье интегрируемой функции, стремятся к нулю, а отношения

$$\frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}}; \quad \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}}$$

представляют величины порядка

$$e^{n\frac{\pi}{a}\left(|y| - \frac{b}{2}\right)}$$

и так как $|y| < \frac{b}{2}$, то ряд для u_1 сходится как прогрессия со знаменателем $e^{\frac{\pi}{a}\left(|y| - \frac{b}{2}\right)}$.

Следует отметить, что для быстроты сходимости ряда (17), особенно в точках близких к контуру (когда $|y|$ близок к $\frac{b}{2}$), имеет существенное значение быстрота убывания коэфициентов $\beta_n^{(1)}$ и $\beta_n^{(2)}$. Это обстоятельство дает путь для улучшения сходимости ряда (17) [смотри ниже (§ 5)].

В виду быстрой сходимости ряда (17) будут сходиться ряды для производных u_1 и будет допустимо почленное дифференцирование, а потому можно непосредственной подстановкой проверить, что функция $u_1(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (1). Далее, если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны, то можно показать, что предельные значения для $u_1(x, y)$ при приближении к контуру будут те, которые предписаны

условиями (3). Итак, найденная функция u_1 удовлетворяет всем поставленным условиям.

Для нахождения функции u_2 нужно решить уравнение Лапласа при условиях (3′). Но, вводя преобразование координат при помощи формулы

$$x' = y + \frac{b}{2}; \quad y' = x - \frac{a}{2},$$

приведем условия (3′) к виду (3), только при этом обменяются ролями числа a и b и вместо функций φ_1 и φ_2 войдут ψ_1 и ψ_2. Поэтому, воспользовавшись формулой (17), а затем вернувшись к переменным x и y, решение для функции u_2 получаем в следующем виде:

$$(18) \quad u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)}}{2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_n^{(1)} - \delta_n^{(2)}}{2 \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{2b}} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right) \right] \sin \frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right),$$

где

$$(19) \quad \delta_n^{(1)} = \frac{2}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \psi_1(y) \cdot \sin \frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right) \delta_n^{(2)} = \frac{2}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \psi_2(y) \cdot \sin \frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right).$$

Полное решение поставленной задачи — функцию u — получим, складывая решения (17) и (18). Следует заметить, что выражения для функций u_1 и u_2 упрощаются, если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ [соответственно $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$] равны между собой. Например, если $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi(x)$, то

$$\beta_n^{(1)} = \beta_n^{(2)} = \beta_n = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

и выражение для u_1 принимает вид

$$(20) \quad u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Таким же образом может быть решена для случая прямоугольника и вторая основная граничная задача — задача Неймана.

Задача Неймана вообще ставится так: *найти функцию u, гармоническую в области D, у которой нормальная производная* $\frac{\partial u}{\partial n}$, *т. е. производная по направлению нормали к контуру, имеет заданные значения на контуре L,*

$$(21) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = f_1(s) \text{ на } L.$$

Задача Неймана имеет некоторые особенности по сравнению с задачей Дирихле. Во-первых, она имеет не единственное решение, ибо очевидно, что если мы к некоторому решению задачи прибавим любую постоянную, то снова получим решение. Во-вторых, функция $f_1(s)$ не может быть взята произвольно. Именно, по известному свойству гармонической функции, интеграл от ее нормальной производной по замкнутому контуру должен равняться нулю, [1]

$$(22) \quad \int_L \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int_L f_1(s)\, ds = 0.$$

Перейдем теперь к случаю прямоугольника. Обозначения и систему координат сохраняем те же, что и в задаче Дирихле. Так же как и там можем разбить задачу на две, причем в каждом случае на двух сторонах условия нулевые. Для функции u_1 будем иметь условия

$$(23) \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \begin{cases} \gamma_1(x) & \text{при} \quad y = \frac{b}{2} \\ \gamma_2(x) & \text{при} \quad y = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad x = a.$$

Задачу решаем методом Фурье. Отыскивая решение в форме $u_1 = XY$, имеем здесь для $X(x)$ вместо (7) условие

$$(24) \quad X'(0) = X'(a) = 0.$$

На основании этого условия получим тем же путем, что $\lambda = \frac{n\pi}{a}$, и

$$(25) \quad X_n = \cos \frac{n\pi}{a} x \qquad [n = 0, 1, 2, \ldots]$$

Тогда для u_1 найдем вместо (12) ряд

$$(26) \quad u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right] \cos \frac{n\pi}{a} x + A_0 y + B_0;$$

последнее слагаемое $A_0 y + B_0$ есть решение уравнения (9′), отвечающее случаю $n = 0$.

[1] См. В. И. Смирнов, т. II, стр. 500.

Постоянные A_n и B_n можем определить, пользуясь первыми двумя из условий (23). Именно на основании этих условий и ряда (26) пишем

$$(27)\quad \begin{cases} \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=\frac{b}{2}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a}\left[A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}\right]\cos\frac{n\pi}{a}x + \\ \qquad + A_0 = \gamma_1(x), \\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=-\frac{b}{2}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a}\left[-A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}\right]\cos\frac{n\pi}{a}x + \\ \qquad + A_0 = \gamma_2(x). \end{cases}$$

Обозначим через $\alpha_n^{(1)}$ и $\alpha_n^{(2)}$ коэфициенты Фурье функций $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ при разложении их в ряд по $\cos\frac{n\pi}{a}x$:

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{2}{a}\int_0^a \gamma_1(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx;$$

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{2}{a}\int_0^a \gamma_2(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx \qquad [n=0,\ 1,\ 2,\ldots].$$

Если сравнить теперь коэфициент при $\cos\frac{n\pi x}{a}$ в обеих частях равенств (27), то найдем систему для определения A_n и B_n:

$$(27')\quad \begin{cases} A_n \operatorname{sh}\dfrac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{ch}\dfrac{n\pi b}{2a} = \dfrac{a}{n\pi}\alpha_n^{(1)} \\ -A_n \operatorname{sh}\dfrac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{ch}\dfrac{n\pi b}{2a} = \dfrac{a}{n\pi}\alpha_n^{(2)} \qquad [n=1,\ 2,\ldots]. \end{cases}$$

Для $n=0$ получим непосредственно из (27) равенства:

$$A_0 = \frac{\alpha_0^{(1)}}{2};\quad A_0 = \frac{\alpha_0^{(2)}}{2}.$$

Последним равенствам можно удовлетворить только, если $\alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(2)}$. При этом же условии будет $A_0 = \frac{\alpha_0^{(1)}}{2} = \frac{\alpha_0^{(2)}}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Определяя же A_n и B_n из систем (27) и подставляя полученные значения в (26), найдем окончательно:

$$(28)\quad u_1 = \frac{\alpha}{2}y + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha_n^{(1)} - \alpha_n^{(2)}}{\frac{2n\pi}{a}\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}}\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a} + \frac{\alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}}{\frac{2n\pi}{a}\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}}\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\right]\cos\frac{n\pi x}{a}.$$

В процессе решения сами собой выявились отмеченные выше особенности задачи Неймана: во-первых, вошла в решение произвольная постоянная B_0; во-вторых, мы получили дополнительное условие $\alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)} = 0$. Но это условие означает не что иное, как условие (22) для рассматриваемой задачи. Действительно,

$$\alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)} = \frac{2}{a}\int_0^a \gamma_1(x)\,dx - \frac{2}{a}\int_0^a \gamma_2(x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{a}\left[\int_{DC}\frac{\partial u_1}{\partial y}\,dx - \int_{AB}\frac{\partial u_1}{\partial y}\,dx\right] = -\frac{2}{a}\int_L \frac{\partial u}{\partial n}\,ds,$$

так как по остальным сторонам последний интеграл равен нулю. Итак действительно условие $\alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)} = 0$ равносильно (22).

Задача об определении второй части u_2 может быть поставлена и решена аналогичным образом.

Отметим еще, что методом Фурье можно найти решение задачи и для того случая, когда на одних сторонах дана сама неизвестная функция, а на других ее нормальная производная, а также, когда задана линейная комбинация функции и ее нормальной производной.

Возможность решения основных граничных задач для уравнения Лапласа в случае прямоугольника позволяет во многих случаях получить решение тех же задач и для уравнения Пуассона

$$(29)\quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,\ y).$$

Действительно, пусть для определенности речь идет о задаче Дирихле:

$$u = \varphi(s) \text{ на } L.$$

Предположим, что нам удалось найти какое-то частное решение уравнения Пуассона $u_0(x,\ y)$:

$$\Delta u_0 = f.$$

Введем тогда новую неизвестную функцию

$$u_1(x,\ y) = u(x,\ y) - u_0(x,\ y).$$

Функция $u_1(x,\ y)$ должна уже удовлетворять уравнению Лапласа, ибо

$$\Delta u_1 = \Delta u - \Delta u_0 = f - f = 0.$$

Граничные условия для u_1 будут, правда, другие, именно если обозначить $f_0(s)$ ту известную функцию, в которую обращается $u_0(x,\ y)$ на контуре L, то для u_1 получим условие:

$$u_1 = f(s) - f_0(s) = f_1(s) \text{ на } L.$$

Таким образом всегда решение граничной задачи для уравнения Пуассона приводит к нахождению частного его решения и к решению граничной задачи для уравнения Лапласа.

Что касается частного решения $u_0(x, y)$, то его часто бывает легко найти, отыскивая в форме, отвечающей правой части и содержащей неопределенные коэфициенты. Например, если правая часть $f(x, y)$ есть полином n-ой степени, то решение нужно искать в виде полинома $(n+2)$-ой степени с неопределенными коэфициентами. При этом двум из коэфициентов в членах каждой степени $k \leqslant n+2$ можно дать произвольные значения, остальные определятся тогда единственным образом. Эта произвольность может быть использована для придания частному решению возможно более простого вида.

Рассмотрим теперь один пример решения задачи Дирихле, именно в случае уравнения Пуассона.

Пример. Задача о кручении прямоугольной призмы. По теории Сен-Венана задача о кручении любого призматического тела, сечение которого — область D, ограниченная контуром L, — приводится к следующей граничной задаче: найти решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -2, \tag{30}$$

обращающееся в нуль на контуре L:

$$u = 0 \text{ на } L. \tag{31}$$

При этом основные величины, требующиеся для расчета, выражаются через функцию u (ее называют функцией напряжения) следующим образом: [1]

компоненты касательного напряжения

$$\tau_{zx} = G\vartheta \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -G\vartheta \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{32}$$

а момент при кручении

$$M = 2G\vartheta \int\int u\, dx\, dy. \tag{33}$$

Здесь ϑ угол поворота, отнесенный к единице длины, а G модуль сдвига.

Дадим теперь решение задачи о кручении для прямоугольника со сторонами a и b. Мы должны найти решение уравнения (30), обращающееся в нуль на контуре. Чтобы свести дело к решению уравнения Лапласа, ищем частное решение u_0 уравнения (30).

Решение ищем в виде $u_0 = Ax^2 + By^2$. Подставляя его в упомянутое уравнение, получаем:

$$2A + 2B = -2.$$

Проще всего принять $A = -1$ и $B = 0$. Кроме того к полученному

[1] См. Геккелер. Статика упругого тела, стр. 17. Дальнейшие ссылки — там же. Физическое значение функции u таково. Если перемещения в направлении оси Z есть $w = \vartheta\varphi(x, y)$ и если ψ функция, сопряженная с φ, т. е. такая, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$; $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$, то $u = \psi - \frac{x^2+y^2}{2}$.

решению можно добавить произвольную линейную функцию. Удобнее всего принять

$$u_0 = -x^2 + ax,$$

так как тогда u_0 обращается в 0 на сторонах $x = 0$ и $x = a$. Если ввести теперь неизвестную функцию $u_1 = u - u_0$, то она удовлетворяет уравнению $\Delta u_1 = 0$ и начальные условия для нее

$$u_1 = -(ax - x^2) \quad \text{при } y = \pm\frac{b}{2}$$

$$u_1 = 0 \quad \text{„ } x = 0;\ x = a.$$

Для u_1 мы можем воспользоваться решением (20), причем в данном случае $\varphi(x) = -(ax - x^2)$, а потому

$$\beta_n = -\frac{2}{a}\int_0^a (ax - x^2)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx =$$

$$= -\left[-\frac{2}{a}(ax - x^2)\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{a}x\right]_0^a - \frac{2}{a}\frac{a}{n\pi}\int_0^a (a - 2x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx =$$

$$= -\left[\frac{2}{n\pi}(a - 2x)\frac{a}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{a}\right]_0^a - \frac{2}{n\pi}\frac{a}{n\pi}\int_0^a 2\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx =$$

$$= -\frac{4a}{n^2\pi^2}\left[-\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{a}\right]_0^a = -\frac{4a^2}{n^3\pi^3}[1 - \cos n\pi].$$

Таким образом при n четном $\beta_n = 0$, при n нечетном $\beta_n = -\frac{8a^2}{n^3\pi^3}$.

Подставляя найденное значение β_n в (20), получим:

$$u_1 = -\sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{8a^2 \operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}}{\pi^3 n^3 \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}} \sin\frac{n\pi x}{a}.$$

Для u получим окончательно решение

$$u = x(a - x) - \frac{8a^2}{\pi^3}\left[\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a}}{1^3 \operatorname{ch}\frac{\pi b}{2a}}\sin\frac{\pi x}{a} + \right. \tag{34}$$

$$\left. + \frac{\operatorname{ch}\frac{3\pi y}{a}}{3^3 \operatorname{ch}\frac{3\pi b}{2a}}\sin\frac{3\pi x}{a} + \ldots\right].$$

С помощью этого решения могут быть найдены касательные напряжения τ и момент M. Так для момента имеем

$$M = 2G\vartheta \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u\,dx\,dy = 2G\vartheta \left\{ b \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a - \right.$$

$$\left. - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\ldots} \frac{1}{n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \left[\frac{a}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[-\frac{a}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{a} \right]_0^a \right\} =$$

$$= 2G\vartheta \left\{ \frac{a^3 b}{6} - \frac{32a^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,\ldots} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2a} \right\}.$$

Ряды для τ_{zx} и τ_{zy} получаются дифференцированием ряда (34).

Приведем некоторые численные данные. [1] Для момента M получаем такие значения:

$$M = 0{,}1408\, G\vartheta a^4 \qquad \text{при } \frac{a}{b} = 1$$

$$M = 0{,}1957\, G\vartheta a b^3 \qquad \text{„ } \frac{a}{b} = 1{,}5$$

$$M = 0{,}2287\, G\vartheta a b^3 \qquad \text{„ } \frac{a}{b} = 2.$$

Далее приведем значения u в некоторых точках при $a = 2$ и $b = 1$.

$$u(1,\ 0) = 0{,}227744; \quad u\left(\frac{1}{2},\ 0\right) = 0{,}194236$$

$$u\left(1,\ \frac{1}{4}\right) = 0{,}165936; \quad u\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right) = 0{,}133450.$$

Заметим, что решенная сейчас математическая задача может быть иначе использована в теории упругости. Именно прогиб u равномерно загруженной мембраны удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = C,$$

где C постоянная. Если мембрана оперта по контуру прямоугольника, то должно быть $u = 0$ на контуре. Ясно поэтому, что решение задачи о равномерно загруженной мембране может быть легко получено из (34). В частности, вычисленные выше значения u дают нам (с точностью до множителя) величину прогиба мембраны со сторонами 1 и 2 в различных точках.

[1] См. также Гекхелер, стр. 30.

n° 2. Фундаментальные функции задачи. Общие замечания о методе Фурье. Пусть требуется решить некоторую предельную задачу, например нужно найти решение уравнения второго порядка эллиптического типа

$$L(u) = 0 \tag{35}$$

при граничных условиях вида

$$P(u) = a(s)\,u + b(s)\,\frac{\partial u}{\partial n} = f(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant s_0; \tag{36}$$

s_0 обозначает длину дуги контура c, ограничивающего область D. Для решения этой задачи весьма полезно найти ее фундаментальные функции. Фундаментальными функциями задачи называется система функций $\{u_n(x, y)\}$, которые внутри области удовлетворяют уравнению (35), т. е.

$$L[u_n(x, y)] = 0, \qquad [n = 1, 2, \ldots] \tag{37}$$

на контуре же операция P над этими функциями дает некоторую систему функций

$$P[u_n(x, y)] = \varphi_n(s), \tag{38}$$

которая ортогональна и нормирована:

$$\int_0^{s_0} \varphi_n(s)\,\varphi_m(s)\,ds = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m \\ 1, & \text{„ } n = m. \end{cases} \tag{39}$$

Для решения поставленной задачи достаточно разложить функцию $f(s)$ в ряд по функциям $\varphi_n(s)$:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(s); \qquad a_n = \int_0^{s_0} f(s)\,\varphi_n(s)\,ds. \tag{40}$$

Тогда окончательно решение задачи дается следующим рядом:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, y). \tag{41}$$

В самом деле, если ряды (40) и (41) сходятся и допускают почленное дифференцирование, то согласно (37), (38), (39) и (40) мы имеем:

$$L(u) = L\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, y)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n L[u_n(x, y)] = 0, \tag{42}$$

$$P(u) = P\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, y)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P[u_n(x, y)] = \tag{43}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(s) = f(s),$$

т. е. для функции u выполнены условия (35) и (36).

Одним из довольно общих методов нахождения фундаментальных функций задачи является метод Фурье. Не излагая его с полной обстоятельностью в общем виде, укажем только основную идею этого метода.

Этот метод применим к задачам значительно более частного вида, чем указанная выше. Именно пусть требуется решить уравнение (35) для случая, когда граничная область есть прямоугольник, относительно основных переменных x и y. При этом предположим, что для одной из переменных граничные условия однородные, т. е. такого рода что если они выполнены для нескольких функций, то они выполнены и для их линейной комбинации. Итак пусть граничные условия имеют вид:

$$(44)\qquad \begin{cases} P_1(u)=0, \text{ при } x=a_1; \\ P_2(u)=0, \text{ при } x=a_2; \\ S_1(u)=f_1(x), \text{ при } y=b_1; \\ S_2(u)=f_2(x), \text{ при } y=b_2.^1 \end{cases}$$

Ищем решение в виде *произведения функции от x на функцию от y.*

$$(45)\qquad u=X(x)\,Y(y).$$

Может оказаться, что после подстановки выражения (45) вместо u в уравнение (35) переменные в нем разделятся (метод Фурье применим только в этом случае) и полученное уравнение удастся привести к виду

$$(46)\qquad M(X)=N(Y),$$

где M и N — обыкновенные дифференциальные операторы, содержащие производные первого и второго порядка. Так как одна часть равенства зависит только от x, а другая только от y, то обе должны равняться некоторой постоянной k. Функцию $X(x)$ определим так, чтобы для u выполнялись первые два из условий (44); это даст для функции X однородное условие. Поэтому решение уравнения

$$(47)\qquad M(X)=k,$$

будет вообще $X(x)=0$ и лишь при исключительных значениях k будет существовать не нулевое решение. Пусть эти значения k будут:

$$(48)\qquad k_1, k_2, \ldots,$$

они носят название собственных чисел. Им будут отвечать решения: функции X_1, X_2, ... Решая для этих же значений k уравнение

$$(49)\qquad N(Y)=k_n,$$

найдем его общее решение в виде:

$$(50)\qquad A_n Y_n^{(1)}(y)+B_n Y_n^{(2)}(y).$$

[1] Относительно операторов $P_i(u)$ и $S_i(u)$ $(i=1,2)$ мы предполагаем, что $P_i(Cu)=CP_i(u)$; $S_i(f(x)\cdot u)=f(x)S_i(u)$, каковы бы ни были функция $u(x,y)$, константа C и $f(x)$.

Благодаря этому решение u мы можем написать в виде

$$(51)\qquad u=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n Y_n^{(1)}(y)+B_n Y_n^{(2)}(y)]\,X_n(x);$$

первые два из условий (44) выполнены сами собой по выбору функций $X_n(x)$, что касается вторых условий, то для их выполнения произведя операции S_1 и S_2 над u, получим вообще

$$(52)\qquad \begin{cases} S_1(u)\big|_{y=b_1}=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^{(1)}A_n+d_n^{(1)}B_n)\,X_n(x), \\ S_2(u)\big|_{y=b_2}=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^{(2)}A_n+d_n^{(2)}B_n)\,X_n(x). \end{cases}$$

Пусть далее функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, стоящие в правых частях последних из равенств (44), удалось разложить в ряд по функциям $X_n(x)$,

$$(53)\qquad f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(1)}X_n(x);\quad f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(2)}X_n(x),$$

тогда, приравнивая между собой выражения (52) и (53), получим для определения коэфициентов A_n и B_n систему двух уравнений:

$$(54)\qquad \begin{cases} c_n^{(1)}A_n+d_n^{(1)}B_n=\alpha_n^{(1)} \\ c_n^{(2)}A_n+d_n^{(2)}B_n=\alpha_n^{(2)}, \end{cases}$$

из которых и определим их значения. Подставляя найденные значения постоянных A_n и B_n в (51), мы и получим решение u, удовлетворяющее формально всем условиям задачи. Остается конечно открытым вопрос о сходимости и возможности почленного дифференцирования ряда (51).

Перечислим теперь еще раз те основные условия, которые необходимы для применения метода Фурье: 1) особого характера граничные условия; 2) возможность отделения переменных после подстановки $u=XY$ в дифференциальное уравнение; 3) существование системы характеристических чисел и функций для дифференциального уравнения (50); 4) возможность разложения в ряд по функциям $X_n(x)$ произвольных в известной мере функций; 5) сходимость и возможность почленного дифференцирования ряда, дающего окончательное решение.

Для некоторых классов уравнений — главным образом гиперболического типа — установлено, что все эти условия выполнены и метод Фурье наверное применим.[1] Не рассматривая подробнее этого вопроса в общем виде, приведем решение его для некоторых важных частных случаев.

п° 3. Задачи Дирихле и Неймана для кольца в случае уравнения Лапласа. Пусть требуется решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u=0$$

[1] См. напр. Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, гл. VI.

для области, заключенной между двумя концентрическими окружностями с радиусами R_1 и R_2 и с центром в начале.

Вводя полярные координаты, можем упомянутое уравнение переписать в виде: [1]

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0. \tag{55}$$

Областью в полярных координатах служит прямоугольник ($0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$; $R_1\leqslant r\leqslant R_2$), граничными условиями являются периодичность искомого решения как функции θ, и заданные значения на окружностях:

$$\begin{cases} u(r,\theta+2\pi)=u(r,\theta) \\ u(R_1,\theta)=f_1(\theta);\ u(R_2,\theta)=f_2(\theta). \end{cases} \tag{56}$$

Для решения задачи применим метод Фурье. Подставляя $u=T(\theta)R(r)$, получим после преобразований

$$\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-k^2. \tag{57}$$

При этом постоянную в правой части (57) нужно выбрать отрицательной, в противном случае невозможно будет удовлетворить первому из условий (56). Первое из уравнений (57) дает

$$T(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta. \tag{58}$$

Для того чтобы было удовлетворено первое из условий (56), нужно, чтобы k было целым числом: $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Второе уравнение принимает вид:

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k^2R(r)=0.$$

При $k\neq 0$ это уравнение — типа Эйлера, и основные решения его: r^k и r^{-k}. При $k=0$ убеждаемся непосредственно, что его решения суть 1 и $\lg r$.

Принимая во внимание это и (58), можем написать решение u в виде ряда:

$$u(r,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}[(A_kr^k+B_kr^{-k})\cos k\theta+(C_kr^k+D_kr^{-k})\sin k\theta]+A_0\lg r+B_0. \tag{59}$$

Для определения постоянных разлагаем функции $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ в тригонометрический ряд:

$$\begin{cases} f_1(\theta)=\dfrac{\alpha_0^{(1)}}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(1)}\cos k\theta+\beta_k^{(1)}\sin k\theta); \\ f_2(\theta)=\dfrac{\alpha_0^{(2)}}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(2)}\cos k\theta+\beta_k^{(2)}\sin k\theta). \end{cases} \tag{60}$$

[1] См. Смирнов, т. II, стр. 327.

Пользуясь последними из условий (56), приравняв коэфициент при соответственных синусах и косинусах в (59) и (60), получим для определения постоянных A, B, C, D следующие уравнения:

$$\begin{cases} A_kR_1^k+B_kR_1^{-k}=\alpha_k^{(1)}, \\ A_kR_2^k+B_kR_2^{-k}=\alpha_k^{(2)}, \\ C_kR_1^k+D_kR_1^{-k}=\beta_k^{(1)}, \\ C_kR_2^k+D_kR_2^{-k}=\beta_k^{(2)}, \\ A_0\lg R_1+B_0=\dfrac{\alpha_0^{(1)}}{2}, \\ A_0\lg R_2+B_0=\dfrac{\alpha_0^{(2)}}{2}. \end{cases} \tag{61}$$

Находя из этих уравнений значения постоянных и подставляя в (59), получим окончательно

$$u=\frac{\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}}{2\lg\frac{R_1}{R_2}}\lg r+\frac{\alpha_0^{(1)}\lg R_2-\alpha_0^{(2)}\lg R_1}{2(\lg R_2-\lg R_1)}+ \tag{62}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(\alpha_k^{(1)}R_2^{-k}-\alpha_k^{(2)}R_1^{-k})r^k-(\alpha_k^{(1)}R_2^k-\alpha_k^{(2)}R_1^k)r^{-k}}{R_1^kR_2^{-k}-R_1^{-k}R_2^k}\cos k\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{(\beta_k^{(1)}R_2^{-k}-\beta^{(2)}R_1^{-k})r^k-(\beta_k^{(1)}R_2^k-\beta_k^{(2)}R_1^k)r^{-k}}{R_1^kR_2^{-k}-R_1^{-k}R_2^k}\sin k\theta\right].$$

Легко проверить непосредственно, что полученный ряд (62) наверное сходится при $R_1<r<R_2$, так как величины α_k и β_k стремятся к нулю. При этом, если функции $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ удовлетворяют условию Дирихле, то сходятся ряды (60), а потому ряд (62) сходится и при $r=R_1$ и $r=R_2$.

Рассмотрим два важнейших предельных случая, когда кольцо обращается в круг и в внешность круга. Для первого случая, беря в (62)

$$R_1=0,\ R_2=R,\ f_1(\theta)=0,\ f_2(\theta)=f(\theta),\ \alpha_k^{(2)}=\alpha_k;\ \beta_k^{(2)}=\beta_k,$$

найдем решение задачи Дирихле для круга:

$$u(r,\theta)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-\alpha_kr^k}{-R^k}\cos k\theta+\frac{-\beta_kr^k}{-R^k}\right)\sin k\theta=$$

$$=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k(\alpha_k\cos k\theta+\beta_k\sin k\theta). \tag{63}$$

Во втором случае, полагая $R_1 = R$ и беря $R_2 \to \infty$

$$f_1(\theta) = f(\theta);\ f_2(\theta) = 0;\ \alpha_k^{(1)} = \alpha_k;\ \beta_k^{(1)} = \beta_k,$$

получим решение задачи Дирихле для внешности круга радиуса R:

$$(64)\quad u(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-\alpha_k r^{-k}}{-R^{-k}}\cos k\theta + \frac{-\beta_k r^{-k}}{-R^{-k}}\sin k\theta\right) =$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)(\alpha_k\cos k\theta + \beta_k\sin k\theta).$$

Полученное решение $u(r,\theta)$ при $r \to \infty$ имеет пределом число α_0.

Найденные здесь решения (63) и (64) представлены в форме бесконечных рядов, однако их можно преобразовать в определенные интегралы. Проведем это например для решения (63), получим:

$$(65)\quad u(r,\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k(\alpha_k\cos k\theta + \beta_k\sin k\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda)\,d\lambda + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda)\cos k\lambda\,d\lambda\right)\cos k\theta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda)\sin k\lambda\,d\lambda\right)\sin k\theta\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k(\cos k\lambda\cos k\theta + \sin k\lambda\sin k\theta)\right] f(\lambda)\,d\lambda.$$

Но стоящий в скобках бесконечный ряд может быть просуммирован, именно воспользовавшись формулами Эйлера, найдем:

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\cos k(\lambda-\theta) = 1 + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k e^{i(\theta-\lambda)k}\right]^1 =$$

$$= 1 + 2\mathrm{Re}\left[\frac{\frac{r}{R}e^{i(\theta-\lambda)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(\theta-\lambda)}}\right] = \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\lambda)+r^2};$$

подставляя полученное выражение в (65), найдем решение внутренней задачи Дирихле для круга в форме так называемого интеграла Пуассона:

$$(66)\quad u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\lambda)+r^2} f(\lambda)\,d\lambda.$$

[1] Здесь и в дальнейшем знак Re означает, что должна быть взята действительная часть следующего за ним выражения.

Для внешней задачи аналогично находим:

$$(66')\quad u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-R^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\lambda)+r^2} f(\lambda)\,d\lambda.$$

Такого же рода суммирование и преобразование решения (62) в определенный интеграл для случая кольца не может быть выполнено в элементарных функциях и выполнимо только при привлечении специальных — эллиптических функций.

Так же как и задача Дирихле может быть решена задача Неймана для кольца, внутренности и внешности круга. В случае кольца граничные условия будут состоять в задании значений нормальной производной:

$$(67)\quad \left.\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=R_1} = f_1(\theta);\quad \left.\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=R_2} = f_2(\theta).$$

Тогда, если искать решение задачи в форме (59) и обозначить, как и прежде, через $\alpha_k^{(1)}$, $\beta_k^{(1)}$, $\alpha_k^{(2)}$, $\beta_k^{(2)}$ коэфициенты Фурье функций $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$, найдем:

$$(68)\quad u(r,\theta) = \frac{\alpha_0^{(1)}R_1}{r} + B_0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha_k^{(1)}R_2^{-k-1} - \alpha_k^{(2)}R_1^{-k-1})r^k + (\alpha_k^{(1)}R_2^{k-1} - \alpha_k^{(2)}R_1^{k-1})r^{-k}}{k(R_1^{k-1}R_2^{-k-1} - R_2^{k-1}R_1^{-k-1})}\cos k\theta +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\beta_k^{(1)}R_2^{-k-1} - \beta_k^{(2)}R_1^{-k-1})r^k + (\beta_k^{(1)}R_2^{k-1} - \beta_k^{(2)}R_1^{k-1})r^{-k}}{k(R_1^{k-1}R_2^{-k-1} - R_2^{k-1}R_1^{-k-1})}\sin k\theta,$$

при этом решение задачи возможно только при выполнении условия

$$(69)\quad \alpha_0^{(1)}R_1 = \alpha_0^{(2)}R_2,$$

и тогда решение задачи не единственно, а содержит в своем составе произвольную постоянную B_0. Условие (69) говорит о том, что интегралы от нормальных производных по обеим окружностям должны быть равны между собой, что опять эквивалентно условию (22) n° 1.

Найденное решение (68) принимает более простой вид, если кольцо превращается в круг или внешность круга и тогда подобно (66) и (66') оно может быть представлено в виде определенного интеграла.

n° 4. Пример бигармонической проблемы. Бигармоническими проблемами вообще называются задачи отыскания решения уравнения

$$(70)\quad \Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0,$$

удовлетворяющего некоторым граничным условиям на контуре области относительно самой функции u и ее частных производных первых трех

порядков. Эти условия определяются смыслом самой задачи. В ряде случаев для решения бигармонических проблем оказывается применимым метод Фурье. В качестве примера подобной задачи рассмотрим ту, к которой приводит нахождение прогиба равномерно загруженной прямоугольной пластинки, опертой по четырем сторонам. Прогиб этой пластинки $u = u(x, y)$ представляет, как известно, решение дифференциального уравнения [1]

$$\Delta\Delta u = \frac{p}{N}, \tag{71}$$

где p единичная нагрузка, а N жесткость пластинки. Граничными условиями служат

$$\left\{\begin{array}{lll} 1) & u = 0 & \\ & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \end{array}\right| \quad \text{при } y = 0;\ y = b, \tag{72}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} 2) & u = 0 & \\ & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \end{array}\right| \quad \text{при } x = -\frac{a}{2};\quad x = \frac{a}{2}.$$

Для того чтобы свести задачу к решению однородного уравнения, найдем частное решение. За такое частное решение удобнее всего взять многочлен 4-ой степени от y, удовлетворяющий уравнению (71) и первым из условий (72). Этот многочлен очевидно будет

$$u_0 = \frac{pb^4}{24N}\left(\frac{y}{b} - 2\frac{y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4}\right). \tag{73}$$ [2]

Если обозначить теперь через u_1 разность $u - u_0 = u_1$, то функция $u_1(x, y)$ удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению $\Delta\Delta u_1 = 0$, и граничным условиям

$$\left\{\begin{array}{lll} 1) & u_1 = 0 & \\ & \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 & \end{array}\right| \quad \text{при } y = 0;\quad y = b,$$

$$\left\{\begin{array}{lll} 2) & u_1 = -\dfrac{pb^4}{24N}\left(\dfrac{y}{b} - 2\dfrac{y^3}{b^3} + \dfrac{y^4}{b^4}\right) & \\ & \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 & \end{array}\right| \quad \text{при } x = -\frac{a}{2};\ x = \frac{a}{2} \tag{74}$$

[1] Геккелер, стр. 127; Тимошенко, Теория упругости, 1934.

[2] Физическое значение этого решения таково: u_0 есть прогиб свободно опертой балки длины b под равномерной нагрузкой интенсивности $\frac{p}{N}$.

Функцию u_1 можем найти с помощью метода Фурье.

Фундаментальные решения однородного уравнения (70) ищем в виде XY. Подставляя в уравнение (70), получим

$$X^{IV}Y + 2X^{II}Y^{II} + XY^{IV} = 0. \tag{75}$$

Для того чтобы получить уравнение только относительно функции X, достаточно в качестве Y взять функцию, удовлетворяющую уравнению

$$Y^{II} = cY. \tag{76}$$

Эта функция Y должна кроме того удовлетворять первой группе условий (74). Уже первые два из этих условий: $Y = 0$ при $y = 0$ и $y = b$, вместе с уравнением (76) определяют вполне, как в предыдущих случаях, искомые фундаментальные функции Y:

$$Y_n = \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad [n = 1,\ 2,\ \ldots.] \tag{77}$$

Но эти функции, как нетрудно проверить, удовлетворяют также и двум другим условиям той же группы, именно:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b.$$

Это счастливое обстоятельство имеет место лишь при данных специальных граничных условиях, а не имеет общего характера. Благодаря этому данный метод применим не ко всякой бигармонической проблеме, а лишь к некоторым подобным, рассматриваемой.

Продолжая исследование, подставляем найденное Y_n в (75) и для нахождения X_n получаем уравнение

$$X'''' - 2\frac{n^2\pi^2}{b^2}X'' + \frac{n^4\pi^4}{b^4}X = 0. \tag{78}$$

Откуда

$$X_n = a_n \operatorname{ch}\frac{n\pi x}{b} + b_n\frac{n\pi x}{b}\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b} + c_n \operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b} + d_n\frac{n\pi x}{b}\operatorname{ch}\frac{n\pi x}{b}, \tag{79}$$

и искомое решение u_1 получает вид:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{80}$$

Для определения постоянных a_n, b_n, c_n и d_n мы должны воспользоваться второй группой граничных условий (74). Коэфициенты c_n и d_n очевидно равны нулю, так как при $x = \frac{a}{2}$ и $x = -\frac{a}{2}$ мы должны получить одно и то же. Для определения коэфициентов a_n и b_n пользуемся условиями (74). Разлагая правую часть предпоследнего из равенств (74) в ряд Фурье, будем иметь:

$$-\frac{pb^4}{24N}\left(\frac{y}{b} - 2\frac{y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4}\right) = -\frac{4pb^4}{\pi^5 N}\sum_{n=1,\ 3,\ \ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{81}$$

Применяя теперь для решения (80) условия (74), получим для определения a_n и b_n ($n=1, 3, 5, \ldots$) уравнения

$$a_n \operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b}+b_n\frac{n\pi a}{2b}\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{2b}=-\frac{4pb^4}{\pi^5 N n^5}$$

$$a_n\frac{n^2\pi^2}{b^2}\operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b}+b_n\cdot\frac{n^2\pi^2}{b^2}\left[2\operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b}+\frac{n\pi a}{2b}\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{2b}\right]=0.$$

Решая написанные уравнения относительно a_n и b_n и подставляя найденные их значения в (79) и (80), получим окончательно после всех преобразований:

(82)
$$u=u_0+u_1=$$
$$=\frac{4pb^4}{\pi^5 B}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left[1-\frac{2\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\frac{n\pi x}{b}+\alpha\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\frac{n\pi x}{b}-\frac{n\pi x}{b}\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}\frac{n\pi a}{b}}\right]\sin\frac{n\pi y}{b},$$

где $\alpha=\dfrac{n\pi a}{2b}$. Этот ряд настолько хорошо сходится, что практически можно ограничиться первым членом

$$u=\frac{4pb^4}{\pi^5 B}\left[1-\frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi a}{2b}\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b}+\frac{\pi a}{2b}\operatorname{sh}\frac{\pi a}{2b}\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b}-\frac{\pi x}{b}\operatorname{sh}\frac{\pi x}{b}\operatorname{ch}\frac{\pi a}{2b}}{2\operatorname{ch}^2\frac{\pi a}{2b}}\right]$$

§ 2. Бесконечные системы уравнений

n° 1. Основные определения. Бесконечные системы линейных уравнений с бесчисленным множеством неизвестных, теория которых начала развиваться лишь в конце прошлого века, имеют в настоящее время обширную литературу,[1] однако эта теория не получила еще вполне законченного вида. Приложения этой теории к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, к теории интегральных уравнений и граничным задачам математической физики также весьма значительны. Мы рассмотрим в этом параграфе только начала этой теории в том виде, как она применяется при решении граничных задач. Применение бесконечных систем к решению некоторых граничных задач рассмотрено в следующем параграфе.

Бесконечной системой линейных уравнений называется система бесконечного множества уравнений:

(1)
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\ldots=b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\ldots=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

[1] Из книг, в которых изложена эта теория, отметим: В. Ф. Каган. Теория определителей. Москва 1922. Fr. Riesz. Leçons sur les systèmes d'équations linéaires a une infinité d'inconnues, Paris 1913. Литература по вопросу указана в статье Hellinger u. Toeplitz. Enc. d. Math. Wiss. Bd. II_3 Heft 9.

где $a_{i,k}$ — известные коэфициенты, b_i — свободные члены и x_i — неизвестные. Система численных значений величин $x_1, x_2, \ldots$ называется решением системы (1), если после подстановки этих значений в левую часть равенств (1) мы получим сходящиеся ряды,[1] и самые эти равенства будут удовлетворены.

При исследовании и решении бесконечных систем возникают вообще следующие задачи:

1) Установить, имеет ли система решение, удовлетворяющее данным условиям.

2) Установить, единственно ли решение системы.

3) Указать метод, с помощью которого это решение может быть получено; вообще говоря, для этого требуются некоторые бесконечные операции.

4) Указать приемы нахождения с помощью конечного числа действий приближенных значений для искомых, притом так, чтобы существовала возможность оценить погрешность этих приближений.

Мы рассмотрим теперь некоторые общие классы бесконечных систем. Начнем с простейшего класса, для которого решение всех указанных вопросов может быть проведено до конца без особого труда.

n° 2. Вполне регулярные системы. Пусть дана система уравнений (1).

Тогда эта система примет вид:

(2)
$$x_i=\sum_{k=1}^{\infty}[c_{i,k}x_k+b_i \qquad [i=1, 2, \ldots]$$

Мы будем называть систему вида (2) *регулярной*,[2] если выполнено условие

(3)
$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_{i,k}|<1 \qquad [i=1, 2, \ldots],$$

т. е. сумма модулей коэфициентов правой части меньше 1.

[1] Можно это требование ослабить и заменить тем, чтобы эти ряды имели сумму в каком-либо обобщенном смысле, например в смысле Пуассона, т. е. чтобы имели место не самые равенства (1), а чтобы

$$\lim_{r\to 1}\sum_{k=1}^{\infty}a_{i,k}x_k r^k=b_i \qquad [i=1, 2, \ldots]$$

[2] Специально теории регулярных систем посвящены следующие работы:
Pellet. Bull. Soc. Math. de France, 1909, 1913, 1914.
Dixon. Cambr. Trans. 19 (1902), p. 190—233.
Б. М. Коялович. Труды Физ.-Матем. Ин-та им. Стеклова, т. III.
Р. О. Кузьмин. Там же, т. VI. Его же. Изв. Акад. Наук, ОМЕН 1934. № 4. В статьях Р. О. Кузьмина указаны в частности некоторые серьезные ошибки в работе Б. М. Кояловича.

При этом будем называть систему (2) *вполне регулярной*, если она удовлетворяет еще более сильному ограничению:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| < 1-\vartheta \qquad [i=1, 2, \ldots], \tag{4}$$

где $\vartheta > 0$ — определенное число для данной системы, независящее от i.

Установим теперь некоторые важные свойства вполне регулярных систем.

Теорема I. (Существование решения). *Если свободные члены вполне регулярной системы ограничены в совокупности, т. е.*

$$|b_i| \leqslant M \qquad [i=1, 2, \ldots], \tag{5}$$

то система (2) имеет ограниченное решение $\{x_i\}$, именно такое, что

$$|x_i| \leqslant \frac{M}{\vartheta}. \tag{6}$$

Доказательство. Для установления существования решения мы применим так называемый метод последовательных приближений, который одновременно дает возможность и найти это решение. Метод состоит в следующем: берем произвольно некоторую начальную систему значений неизвестных и затем исправляем эти значения с помощью уравнений системы. Положим, например, эти начальные значения равными нулю: $x_i^{(0)} = 0$, и подставим эти значения x_i в правые части равенств (2), тогда найдем первые приближения для искомых:

$$x_i^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k^{(0)} + b_i = b_i.$$

Подставляем теперь в правую часть (2) вместо x_i первые приближения $x_i^{(1)}$, получим вторые приближения

$$x_i^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k^{(1)} + b_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} b_k + b_i.$$

Продолжая этот процесс, вообще найдем, что $n+1$-ое приближение с n-ым связано равенством

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k^{(n)} + b_i. \qquad [i=1, 2, \ldots] \tag{7}$$

Мы должны установить теперь, что полученные последовательные приближения в пределе дают искомое решение. Для этого нужно доказать прежде всего, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^{(n)}$, а это равносильно очевидно доказательству сходимости ряда

$$x_i^{(0)} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) + (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) + \ldots \tag{8}$$

Положим для краткости $x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)} = v_i^{(n)}$ $(n=1, 2, \ldots$ таком обозначении ряд (8) запишется так:

$$v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + v_i^{(3)} + \ldots \tag{8'}$$

Установим прежде всего соотношение, связывающее между собой величины $v_i^{(n)}$. Напишем для этого равенство (7) и равенство, получающееся из него заменой n на $n+1$:

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k^{(n)} + b_i,$$

$$x_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k^{(n-1)} + b_i.$$

Вычитая из первого равенства второе, найдем:

$$v_i^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} v_k^{(n)}. \tag{9}$$

Для установления сходимости ряда (8) оценим величины $|v_i^{(n)}|$; имеем согласно (4), (5) и (9)

$$|v_i^{(1)}| = |x_i^{(1)}| = |b_i| < M$$

$$|v_i^{(2)}| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} v_k^{(1)}\right| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| < M(1-\vartheta),$$

и вообще для любого n

$$|v_i^{(n)}| < M(1-\vartheta)^{n-1}. \tag{10}$$

Оценка (10) и устанавливает сходимость ряда (8), ибо члены его не превосходят по модулю членов ряда геометрической прогрессии:

$$M + M(1-\vartheta) + M(1-\vartheta)^2 + \ldots \tag{11}$$

Обозначим сумму ряда (8′) или, что то же самое (8), через x_i, т. е.

$$x_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots = \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}. \tag{12}$$

Тогда из сравнения ряда (12) и (11) сразу следует, что

$$|x_i| < M + M(1-\vartheta) + M(1-\vartheta)^2 + \ldots = \frac{M}{\vartheta} \tag{6}$$

$$|x_i - x_i^{(n)}| \leqslant |v_i^{(n+1)}| + |v_i^{(n+2)}| + \ldots \leqslant M(1-\vartheta)^n + \tag{13}$$

$$+ M(1-\vartheta)^{n+1} + \ldots = \frac{M(1-\vartheta)^n}{\vartheta}.$$

Остается показать теперь, что полученные числа x_i (12) в самом деле удовлетворяют уравнениям системы (2). Благодаря ограниченности

чисел x_i ясно, что после подстановки их в равенства (2) получим сходящийся ряд и обе части равенства будут иметь смысл; нужно установить только, что они равны между собой. Но в самом деле, пользуясь (7), (13) и (4), имеем:

$$\left|x_i - b_i - \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k\right| = \left|(x_i - b_i - \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k) - (x_i^{(n+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k^{(n)} - b_i)\right| = \left|(x_i - x_i^{(n+1)}) - \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}(x_k - x_k^{(n)})\right| <$$

$$< \frac{M(1-\theta)^{n+1}}{\theta} + \frac{M(1-\theta)^{n+1}}{\theta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| < \frac{2M(1-\theta)^{n+1}}{\theta}.$$

Так как правая часть может быть сделана сколь угодно малой, то необходимо, чтобы

$$x_i - b_i - \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k = 0.$$

Таким образом все утверждения теоремы установлены.

Теорема II. (Единственность). *Если свободные члены системы ограничены, то ограниченное ее решение единственно, т. е. не существует двух различных ограниченных решений системы.*

Доказательство. Предположим противное, что система (2) имеет два различных ограниченных решения x_i и x_i^*, т. е.

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k + b_i \qquad [i = 1, 2, \ldots]$$

$$x_i^* = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k^* + b_i \qquad [i = 1, 2, \ldots]$$

Вычитая из второго равенства первое и полагая $z_i = x_i^* - x_i$, найдем

$$z_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}z_k \qquad [i = 1, 2, \ldots] \tag{14}$$

т. е., что числа z_i удовлетворяют однородной системе, получающейся из системы (2) отбрасыванием свободных членов. Покажем, что в таком случае все числа z_i равны нулю. Числа z_i, так же как и x_i и x_i^*, ограничены. Обозначим через N точную верхнюю границу $|z_i|$, т. е. наименьшее число, удовлетворяющее всем условиям:

$$|z_i| \leqslant N \qquad [i = 1, 2, \ldots]$$

В таком случае на основании (14) и (4)

$$|z_i| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}z_k\right| \leqslant N \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| \leqslant N(1-\theta).$$

Замечая теперь, что последнее неравенство выполняется одновременно для всех i, заключаем, что $N(1-\theta)$ также есть верхняя граница $|z_i|$, а потому $N \leqslant N(1-\theta)$; последнее возможно лишь при $N = 0$. Отсюда ясно, что и все $z_i = 0$, а потому оба данных решения совпадают

$$x_i = x_i^* \qquad [i = 1, 2, \ldots]$$

Замечание I. Отметим, что если все коэфициенты $c_{i,k}$ и свободные члены b_i системы (2) положительны, то полученные нами решения (12) также будут положительны. В этом убеждаемся непосредственно, всматриваясь в равенство (9), связывающее между собой $v_i^{(n)}$.

Замечание II. Мы установили в теореме 1 сходимость метода последовательных приближений для того случая, когда за исходные значения для неизвестных были взяты нулевые $x_i^{(0)} = 0$, однако то же самое верно и в случае, если за исходные значения взять любую ограниченную систему чисел $|x_i^{(0)}| < P$. Разница в оценках будет лишь та, что мы получим

$$|v_i^{(n)}| < (M + P)(1-\theta)^{n-1}.$$

Таким образом мы найдем опять некоторое ограниченное решение системы. На основании только что доказанной теоремы II ясно, что это решение будет то же самое, что и при нулевых начальных значениях.

Замечание III. Требование ограниченности решения в теореме II является существенным.

Рассмотрим например систему

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}x_3$$

. . . .

Очевидно, решения ее будут

$$x_i = c2^i, \qquad [i = 1, 2, \ldots]$$

где c любая постоянная, т. е. система имеет бесчисленное множество решений, правда неограниченных.

Теорема III. (О сравнении систем). *Если даны две вполне регулярных системы (2), свободные члены которых ограничены*

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k + b_i$$

$$X_i = \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k + B_i \ldots \tag{15}$$

и вторая система является мажорантной для первой, т. е.

$$|c_{i,k}| \leqslant C_{i,k} \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots \\ k = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}; \quad |b_i| \leqslant B_i \qquad [i = 1, 2, \ldots] \tag{16}$$

то ограниченное решение второй системы мажорирует решение первой системы:

(17): $$|x_i| \leqslant X_i.$$

Доказательство. Можем предполагать, что для нулевых приближений

$$|x_i^{(0)}| \leqslant X_i^{(0)}.$$

Пусть установлено далее, что

$$|x_i^{(n)}| \leqslant X_i^{(n)}$$

покажем тогда, что и

$$|x_i^{(n+1)}| \leqslant X_i^{(n+1)}.$$

Действительно, имеем:

$$|x_i^{(n+1)}| = \left| b_i + \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k^{(n)} \right| \leqslant B_i + \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k} X_k^{(n} = X_i^{(n+1)},$$

откуда

$$|x_i| = \lim_{n\to\infty} |x_i^{(n)}| \leqslant \lim_{n\to\infty} X_i^{(n)} = X_i.$$

Теорема IV. *Если имеется последовательность бесконечных систем* $(s = 1, 2, \ldots)$:

(18) $$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k + b_i^{(s)} \qquad [i = 1, 2, \ldots]$$

свободные члены которых ограничены в совокупности

(19) $$|b_i^{(s)}| \leqslant M \qquad [i = 1, 2, \ldots; s = 1, 2, \ldots]$$

и при $s \to \infty$ *стремятся (хотя бы и неравномерно) к нулю, т. е.*

(20) $$\lim_{s\to\infty} b_i^{(s)} = 0,$$

то и ограниченные решения этих систем x_i *при* $s \to \infty$ *стремятся к нулю.*

(21) $$\lim_{s\to\infty} x_i^{s} = 0.$$

Доказательство. Можем предполагать, что

$$c_{i,k} \geqslant 0; \; b_i^{(s)} \geqslant 0,$$

в противном случае мы могли бы вместо данной системы рассмотреть систему

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| x_k + |b_i^{(s)}|,$$

решения которой мажорируют по теореме III решения данной системы.

Можно считать далее, что $b_i^{(s)}$ убывают при увеличении s; в противном случае можно было бы ввести

$$\tilde{b}_i^{(s)} = \max(b_i^{(s)}, b_i^{(s+1)}, \ldots),$$

Так как тогда попрежнему $\lim \tilde{b}_i^{(s)} = 0$, а мы получили бы систему с большими решениями.

Итак, при увеличении s свободные члены системы убывают, а потому и решения ее по теореме III уменьшаются:

$$0 \leqslant x_i^{s+1} \leqslant x_i^{s} \leqslant \frac{M}{\mathfrak{h}},$$

поэтому существует предел

$$\lim_{s\to\infty} x_i^{s} = x_i^{*}.$$

Остается еще установить, что

$$x_i^{*} = 0.$$

Действительно, для любого i справедливы равенства:

(22) $$x_i^{s} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k^{s} + b_i^{s}.$$

В этих равенствах мы имеем право перейти к пределу при $s \to \infty$ почленно, так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k^{s}$$

сходится равномерно относительно s, ибо он мажорируется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} \frac{M}{\mathfrak{h}}.$$

Совершая этот предельный переход, получаем

(23) $$x_i^{*} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k^{*}.$$

Итак, ограниченные числа $x_i^{*}\left(|x_i^{*}| \leqslant \frac{M}{\mathfrak{h}}\right)$ удовлетворяют однородной системе уравнений (23). Поэтому по теореме II:

$$x_i^{*} = 0.$$

Теорема V. (О методе редукции). *Ограниченное решение вполне регулярной системы может быть получено с помощью метода редукции; а именно: отделением от данной системы (2) конечной системы N уравнений с N неизвестными и последующим предельным переходом в решениях этой конечной системы.*

Доказательство. Сохраняя в системе (2) первые n уравнений и первые n неизвестных, получаем конечную систему линейных урав-

1944

нений:

$$(24)\quad \begin{cases} x_1 = c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \dots + c_{1,N}x_N + b_1 \\ x_2 = c_{2,1}x_1 + c_{2,2}x_2 + \dots + c_{2,N}x_N + b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_N = c_{N,1}x_1 + c_{N,2}x_2 + \dots + c_{N,N}x_N + b_N \end{cases}$$

Подобную систему называют иногда укороченной системой для системы (2). Эта система очевидно имеет единственное решение, хотя бы потому, что ее можно рассматривать как бесконечную, вполне регулярную систему, если присоединить к ней уравнения:

$$x_{n+1} = 0;\ x_{n+2} = 0;\ \dots$$

Обозначим решения укороченной системы через

$$\overset{N}{x}_1,\ \overset{N}{x}_2,\ \dots,\ \overset{N}{x}_N.$$

Докажем, что при увеличении числа N уравнений решения укороченной системы будут стремиться к решениям данной бесконечной системы (2):

$$(25)\quad \lim_{N\to\infty} \overset{N}{x}_i = x_i,$$

где x_i решения системы (2).

Решения бесконечной системы:

$$(26)\quad x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k + b_i \qquad [i = 1, 2, \dots, N]$$

$$x_i = 0 \qquad [i = N+1, \dots]$$

будут очевидно

$$\overset{N}{x}_1,\ \overset{N}{x}_2,\ \dots,\ \overset{N}{x}_N,\ 0,\ 0\dots$$

(будем считать $x_i^s = 0$ при $i > s$). Положим теперь

$$(27)\quad \overset{N}{z}_i = x_i - \overset{N}{x}_i, \qquad [i = 1,\ 2,\ \dots]$$

тогда для $\overset{N}{z}_i$ получим вычитанием (26) из (2) систему уравнений

$$(28)\quad \begin{cases} z_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}z_k & [i = 1,\ 2,\ \dots,\ N] \\ z_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}z_k + b_i + \sum_{k=1}^{N} c_{i,k}\overset{N}{x}_k & [i = N+1,\ N+2,\ \dots] \end{cases}$$

В первых равенствах системы свободные члены отсутствуют, а в последующих они ограничены в совокупности:

$$(29)\quad \left| b_i + \sum_{k=1}^{N} c_{i,k}\overset{N}{x}_k \right| \leqslant M + \frac{M}{\theta}\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| \leqslant M + \frac{M}{\theta}(1-\theta) = \frac{M}{\theta},$$

следовательно выполнено первое условие теоремы IV. Далее свободные члены при $N \to \infty$ стремятся к нулю, поэтому на основании теоремы IV заключаем, что

$$\lim_{N\to\infty} \overset{N}{z}_i = 0,$$

и равенство (25), а с ним и теорема, доказаны.

n° 3. Приближенное решение вполне регулярных систем. Дадим теперь способы нахождения приближений с недостатком и с избытком для неизвестных.

Рассмотрим сначала случай, когда $c_{i,k} \geqslant 0;\ b_i \geqslant 0$. Для получения приближений с недостатком возьмем укороченную для системы (2) систему уравнений (24). Решение этой системы $\overset{N}{x}_i = \tilde{x}_i$ совпадает очевидно с решениями бесконечной системы уравнений (26), минорантной по отношению к системе (2). Поэтому решения ее не превосходят решений системы (2), т. е. $\tilde{x}_i \leqslant x_i$. Для получения приближения с избытком, рассуждаем так. Числа $x_1, x_2, \dots x_N$ мы могли бы получить точно, если бы в первые N уравнений системы (2) подставили вместо $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ их значения и решили затем получившуюся систему N уравнений с N неизвестными.

$$(30)\quad \begin{cases} x_1 = c_{1,1}x_1 + \dots + c_{1,N}x_N + b_1 + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_{1,k}x_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_N = c_{N,1}x_1 + \dots + c_{N,N}x_N + b_N + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_{N,k}x_k \end{cases}$$

Однако мы не знаем точных значений неизвестных $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$, входящих в свободные члены системы уравнений (30), но мы знаем, что они все не превосходят $\frac{M}{\theta}$: поэтому, заменяя в этих уравнениях величины $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ на $\frac{M}{\theta}$, мы получим на основании теоремы III систему с решениями не меньшими, чем числа $x_1, x_2, \dots, x_N$. Эта система N уравнений, если обозначить через $R_N^{(i)}$ остаток ряда из $c_{i,k}$ после N-го члена:

$$R_N^{(i)} = \sum_{i=N+1}^{\infty} c_{i,k}$$

запишется так:

$$(31)\quad \begin{cases} x_1 = c_{1,1}\,x_1 + c_{1,2}\,x_2 + \ldots + c_{1,N}\,x_N + b_1 + R_N^{(1)}\dfrac{M}{\eta}, \\ x_2 = c_{2,1}\,x_1 + c_{2,2}\,x_2 + \ldots + c_{2,N}\,x_N + b_2 + R_N^{(2)}\dfrac{M}{\eta} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_N = c_{N,1}\,x_1 + c_{N,2}\,x_2 + \ldots + c_{N,N}\,x_N + b_N + R_N^{(N)}\dfrac{M}{\eta} \end{cases}$$

Если обозначить решения системы (31) через $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N$, то на основании сказанного выше имеем $x_i \leqslant \bar{x}_i$. Таким образом для искомых x_i имеем приближение с недостатком $\tilde{x}_i$ и с избытком $\bar{x}_i$.

$$(32)\qquad \tilde{x}_i \leqslant x_i \leqslant \bar{x}_i \qquad [i = 1, 2, \ldots, N]$$

При доказательстве теоремы V было установлено, что числа $\tilde{x}_i$ стремятся при $N \to \infty$ к числам x_i. Числа x_i при $N \to \infty$ также стремятся к x_i. В этом можно убедиться, проверив, что разности $(\bar{x}_i - x_i)$ удовлетворяют системе уравнений со свободными членами, стремящимися к нулю, а тогда в виду теоремы IV $(\bar{x}_i - x_i) \to 0$ при $N \to \infty$.

Мы дали сейчас способ нахождения приближений с недостатком и с избытком, стремящихся к искомым в случае положительных систем, укажем теперь подобный же способ для случая систем с коэфициентами и свободными членами произвольного знака.

Для нахождения приближений можно поступить так. Обозначив через $R_N^{(i)}$ остаток ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}|$ после N членов

$$(33)\qquad R_N^{(i)} = \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_{i,k}|,$$

составим систему $2N$ уравнений с $2N$ неизвестными

$$(34)\quad \begin{cases} \tilde{x}_i = \sum_{k=1}^{N}{}' c_{i,k}\,\tilde{x}_k + \sum_{k=1}^{N}{}'' c_{i,k}\,\bar{x}_k + b_i - R_N^{(i)}\dfrac{M}{\eta} & [i = 1, 2, \ldots N] \\ \bar{x}_i = \sum_{k=1}^{N}{}' c_{i,k}\,\bar{x}_k + \sum_{k=1}^{N}{}'' c_{i,k}\,\tilde{x}_k + b_i + R_N^{(i)}\dfrac{M}{\eta}, & [i = 1, 2, \ldots N] \end{cases}$$

где сумма $\sum'$ распространена в данной строке на те $c_{i,k}$, для которых $c_{i,k} > 0$, а $\sum''$ на те, для которых $c_{i,k} < 0$. Заметим прежде всего, что эта система имеет определенную систему решений. В самом деле вычитая из вторых равенств первые, а также складывая соответственные равенства, получим две системы уравнений относительно неизвестных $(\bar{x}_i - \tilde{x}_i)$ и $(\bar{x}_i + \tilde{x}_i)$

$$(35)\quad \begin{cases} \bar{x}_i - \tilde{x}_i = \sum_{k=1}^{N}{}' c_{i,k}(\bar{x}_k - \tilde{x}_k) + \sum_{k=1}^{N}{}'' (-c_{i,k})(\bar{x}_k - \tilde{x}_k) + 2R_N^{(i)}\dfrac{M}{\eta} = \\ \qquad = \sum_{k=1}^{N} |c_{i,k}|(\bar{x}_k - \tilde{x}_k) + 2R_N^{(i)}\dfrac{M}{\eta} \\ \bar{x}_i + \tilde{x}_i = \sum_{k=1}^{N} c_{i,k}(\bar{x}_k + \tilde{x}_k) + 2b_i \\ \qquad\qquad [i = 1, 2, \ldots N] \end{cases}$$

Обе системы (35) вполне регулярны, поэтому из них можно найти значение $\bar{x}_i - \tilde{x}_i$ и $\bar{x}_i + \tilde{x}_i$, а тем самым $\bar{x}_i$ и $\tilde{x}_i$. При этом первая из этих систем положительная, вследствие чего $\bar{x}_i + \tilde{x}_i \geqslant 0$. Покажем, что числа $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N$ представляют приближение с недостатком к искомым $x_1, x_2, \ldots, x_N$, а $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_N$ приближение с избытком, т. е. выполнены неравенства (32). Для доказательства этого будем решать систему (34) по способу последовательных приближений, именно следующим образом: за начальные значения примем

$$\tilde{x}_i^{(0)} = -\frac{M}{\eta};\ \bar{x}_i^{(0)} = \frac{M}{\eta},$$

подставив эти значения в правые части равенств (34), найдем тогда $\tilde{x}_i^{(1)}$ и $\bar{x}_i^{(1)}$ и т. д. Решение системы (34) по такому способу равносильно тому, чтобы независимо решать методом последовательных приближений обе системы уравнений (35), начиная с значений

$$(\tilde{x}_i^{(0)} + \bar{x}_i^{(0)}) = 0;\ (\bar{x}_i^{(0)} - \tilde{x}_i^{(0)}) = \frac{2M}{\eta},$$

поэтому при $l \to \infty$ будет $\tilde{x}_i^{(l)} \to \tilde{x}_i$ и $\bar{x}_i^{(l)} \to \bar{x}_i$. Для начальных значений имеем, очевидно, $\tilde{x}_i^{(0)} \leqslant x_i \leqslant \bar{x}_i^{(0)}$, если x_i решение системы (2). Пусть уже установлено, что $\tilde{x}_i^{(l)} \leqslant x_i \leqslant \bar{x}_i^{(l)}$, покажем, что и

$$\tilde{x}_i^{(l+1)} \leqslant x_i \leqslant \bar{x}_i^{(l+1)}.$$

Действительно, например для $\tilde{x}_i^{(l+1)}$ имеем:

$$\tilde{x}_i^{(l+1)} = \sum_{k=1}^{N}{}' c_{i,k}\tilde{x}_k^{(l)} + \sum_{k=1}^{N}{}'' c_{i,k}\bar{x}_k^{(l)} + b_i - R_N^{(i)}\frac{M}{\theta} \leqslant \sum_{k=1}^{N} c_{i,k}x_k + b_i - \\ - \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_{i,k}| \cdot \frac{M}{\theta} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k + b_i = x_i.$$

Итак, для всех l установлено, что $\tilde{x}_i^{(l)} \leqslant x_i \leqslant \bar{x}_i^{(l)}$. Тогда, переходя к пределу, заключаем, что выполняется неравенство

$$\tilde{x}_i \leqslant x_i \leqslant \bar{x}_i. \tag{32}$$

Важно указать еще, что при увеличении числа N уравнений в системе (34) числа $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots$, а также и $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ стремятся к точным решениям $x_1, x_2, \ldots$. Это почти очевидно, так как разности $(\bar{x}_i - \tilde{x}_i)$ удовлетворяют первой из систем (35), свободные члены которой стремятся к нулю, а потому, пользуясь рассуждениями теоремы IV, легко установить, что числа $(\bar{x}_i - \tilde{x}_i)$ с увеличением N стремятся к нулю, поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \bar{x}_i = \lim_{N\to\infty} \tilde{x}_i = x_i. \tag{36}$$

Таким образом все задачи, поставленные в n° 1, относительно исследования бесконечных систем для вполне регулярных систем разрешены до конца.

Заметим, что для практического приближенного решения бесконечной системы и нахождения обоих приближений к искомым оказывается выгоднее не решать точно системы (34), а решать ее по способу последовательных приближений с тем, чтобы получить для $\tilde{x}_i$ приближения с недостатком, а для $\bar{x}_i$ приближения с избытком. При этом выгодно по ходу вычислений при каждом следующем приближении увеличивать число N уравнений, включаемых в рассмотрение.

n° 4. Общие теоремы о регулярных системах. Здесь первостепенное значение будет иметь понятие мажорантной системы. Пусть дана система

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k + b_i, \tag{2}$$

тогда мажорантной по отношению к ней будет такая регулярная система уравнений

$$X_i = \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k + B_i, \tag{15}$$

что удовлетворены неравенства

$$|c_{i,k}| \leqslant C_{i,k};\ |b_i| \leqslant B_i. \tag{6}$$

Теорема I′. *Если для системы (15), мажорантной по отношению к данной системе уравнений (2), существует положительное решение, т. е. числа $X_i^* \geqslant 0$, удовлетворяющие уравнениям (15), то и система (2) имеет решение x_i, причем оно удовлетворяет неравенству*

$$|x_i| \leqslant X_i^*. \tag{17}$$

Доказательство. К любой регулярной системе формально можно применить способ последовательных приближений, который был применен в n° 2 к вполне регулярным системам. Если при этом окажется, что ряд (8) сходящийся и дает нам решение системы, то это решение мы будем называть главным ее решением.

Покажем прежде всего, что система (15) имеет положительное главное решение $\{X_i\}$, не превосходящее $\{X_i^*\}$. Составляем для нее последовательные приближения

$$X_i^{(0)} = 0;\quad X_i^{(1)} = B_i;\quad X_i^{(2)} = B_i + \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k^{(1)};\ \ldots$$

$$X_i^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k^{(n)} + B_i.$$

Для начальных значений, так как X_i^* положительны, имеем $X_i^{(0)} \leqslant X_i^*$. Докажем теперь, что если установлено, что $X_i^{(n)} \leqslant X_i^*$, то и $X_i^{(n+1)} \leqslant X_i^*$. В самом деле, так как X_i^* удовлетворяют уравнениям (15), то

$$X_i^{(n+1)} = B_i + \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k^{(n)} \leqslant B_i + \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k^* = X_i^*.$$

Но в виду того, что числа $X_i^{(n)}$ возрастают и ограничены, ряд

$$X_i^{(0)} + (X_i^{(1)} - X_i^{(0)}) + (X_i^{(2)} - X_i^{(1)}) + \ldots \tag{37}$$

сходится и дает нам некоторое число X_i. В том, что числа X_i удовлетворяют системе уравнений (15), можно убедиться рассуждением, аналогичным тому, которое было применено к теореме I (стр. 30).

Итак мы нашли главные решения системы (15), удовлетворяющие очевидно неравенству:

$$X_i \leqslant X_i^*.$$

Перейдем теперь к системе (2). Применяя к ней способ последовательных приближений, построим ряд

$$x_i^{(0)} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) + (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) + \ldots \tag{8}$$

Чтобы установить его сходимость, достаточно показать, что члены этого

ряда не превосходят по модулю членов ряда (37). В самом деле, для первого и второго членов ряда это очевидно. Пусть установлено далее, что

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}| \leqslant X_i^{(n)} - X_i^{(n-1)}$$

покажем тогда, что и

$$|x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}| \leqslant X_i^{(n+1)} - X_i^{(n)}.$$

Действительно, по (9)

$$\left|x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}(x_k^{(n)} - x_k^{(n-1)})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}(X_i^{(n)} - X_i^{(n-1)}) = X_i^{(n+1)} - X_i^{(n)},$$

следовательно ряд (8) сходится, при этом сумма его x_i удовлетворяет неравенству

$$|x_i| = |\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}| \leqslant \lim_{n\to\infty} X_i^{(n)} = X_i \leqslant X_i^*.$$

Легко убедиться также, что числа x_i удовлетворяют системе (2).

Приведем некоторые важные следствия из этой теоремы.

Следствие I. Если свободные члены b_i удовлетворяют вместо неравенств $|b_i| \leqslant B_i$ неравенствам $|b_i| \leqslant KB_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где K постоянное число, то теорема остается верной.

В самом деле, взяв вместо X_i^* числа $X_i^* K$, мы получим систему положительных чисел, удовлетворяющих системе (15) со свободными членами KB_i, которая будет мажорантной для системы (2).

Следствие II. Введем обозначение

$$\rho_i = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}|. \tag{38}$$

Тогда, если существует такое число K, что числа b_i удовлетворяют неравенству

$$|b_i| < K\rho_i, \tag{39}$$

то система (2) имеет решение, удовлетворяющее неравенству: $|x_i| < K$.

Действительно, в таком случае для данной системы мажорантной будет служить система

$$X_i = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}|\ X_k + \rho_i \cdot K, \qquad [i = 1, 2, \ldots]$$

имеющая очевидное решение $X_i^* = K$ $(i = 1, 2, \ldots)$, а потому

$$|x_i| \leqslant X_i^* = K \qquad [i = 1, 2, \ldots]$$

Следствие III. Покажем, что установленное выше существование решения для вполне регулярной системы (теорема I) может быть получено как частный случай из теоремы I′.

В самом деле, применяя следствие II, мы видим, что система (2) имеет решение по абсолютной величине $< K$, если свободные члены удовлетворяют неравенствам (39), но эти неравенства будут очевидно удовлетворены, если $|b_i| < M$ и если мы за K примем

$$K = \frac{M}{\theta}.$$

Следствие IV. Всякая регулярная система, у которой лишь конечное число свободных членов b_i отлично от нуля, имеет ограниченное решение.

Действительно, всегда можно подобрать такое K, чтобы удовлетворить всем неравенствам

$$|b_i| < K\rho_i,$$

а тогда по следствию II система имеет решение x_i.

Пример. Рассмотрим систему [1]

$$x_1 = 0.\ x_1 + \frac{1}{1.3}x_2 + \frac{1}{3.5}x_3 + \frac{1}{5.7}x_4 + \ldots + b_1$$

$$x_2 = \frac{1}{1.3}x_1 + 0.\ x_2 + \frac{1}{1.3}x_3 + \frac{1}{3.5}x_4 + \ldots + b_2$$

$$x_3 = \frac{1}{3.5}x_1 + \frac{1}{1.3}x_2 + 0.\ x_3 + \frac{1}{1.3}x_4 + \ldots + b_3$$

. . . . . .

Эта система уравнений будет регулярной, но не вполне регулярной.

В самом деле, как легко проверить в данном случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} = \left(\frac{1}{1,3} + \frac{1}{3,5} + \frac{1}{5,7} + \ldots\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{1,3} + \frac{1}{3,5} + \ldots + \frac{1}{(2i-3)\ (2i-1)}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\,(2i-1)}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4i-2},$$

так что для любого i имеем $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} < 1$. Однако, очевидно нельзя указать такое $\theta > 0$, чтобы при всех i было $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} < 1 - \theta$.

---

[1] Эта система встретилась в работе инж. Л. С. Гильмана „К вопросу об определении напряжений на поверхности упругой среды, ограниченной плоскостью". Труды Ленингр. инст. инж. пром. строит., вып. 1, стр. 35. Ленинград. 1934. К этой же системе приводит и решение другого вопроса — см. ниже § 3, n° 4.

БИБЛИОТЕКА ... В. И. Ленина

На основании теоремы I′ и следствия II можем сделать заключение, что если свободные члены удовлетворяют условию $|b_i| < \frac{K}{4i-2}$, то данная система имеет ограниченное решение, которое может быть получено по способу последовательных приближений. Это условие можно заменить очевидно на то, что $|b_i| < \frac{K_1}{i}$, т. е. свободные члены системы должны быть порядка не выше $\frac{1}{i}$.

Рассмотрим теперь вопрос об единственности для регулярных систем. Заметим прежде всего, что, в отличие от вполне регулярных систем, система регулярная вообще говоря имеет не одно ограниченное решение.[1]

Рассмотрим в качестве примера следующую систему:

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) x_2$$

$$x_2 = \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) x_3$$

$$x_3 = \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) x_4$$

. . . . . .

Эта система регулярная и однородная, но на ряду с решением $x_1 = x_2 = \ldots = 0$ она имеет другое ограниченное решение

$$x_1 = 1;\ x_2 = \frac{2^2}{2^2-1};\ x_3 = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1};\ \ldots$$

$$\ldots x_i = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdots \frac{i^2}{i^2-1};\ \ldots$$

В том, что x_i удовлетворяют уравнениям системы, можно убедиться непосредственной подстановкой. Далее, они будут и ограничены в совокупности, ибо

$$x_i = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{i \cdot i}{(i-1)(i+1)} = \frac{2i}{i+1} < 2.$$

Возможность не единственного решения для регулярных систем указывает в частности на то, что при нахождении главного решения нельзя, как в случаях вполне регулярной системы, начинать с любых значений, а только с нулевых $x_i^{(0)} = 0$.

[1] Противоположного характера утверждения имеются в работах Б. М. Кояловича (цитированной выше и последовавших за ней). Так например он утверждает (лемма III, стр. 74), что система $x_i = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| x_k + \rho_i$ имеет единственным ограниченным и главным решением $x_i = 1$. Неверность этого показывает следующий простой пример: система $x_i = \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) x_{i+1} + \frac{1}{(i+1)^2}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ наряду с решением $x_i = 1$ имеет другое (главное): $x_i = \frac{1}{i+1}$.

В некотором смысле предложение об единственности может быть высказано однако и для регулярных систем, именно в следующей форме.

Теорема II′. *Если система* (2) *мажорируется системой* (15) *и* X_i *главное решение последней системы, то решение системы* (2), *удовлетворяющее условиям*

$$|x_i| < KX_i \tag{40}$$

где K *постоянное число, единственно.*

В самом деле, чтобы установить это, достаточно показать, что однородная система

$$z_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} z_k$$

не имеет других решений, удовлетворяющих неравенствам $|z_i| \leqslant 2KX_i$, кроме $z_i = 0$.

Пусть действительно z_i такое решение, тогда последовательно находим:

$$|z_i| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} z_k\right| \leqslant 2K \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k} X_k = 2K(X_i - B_i) = 2K(X_i - X_i^{(1)})$$

$$|z_i| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} z_k\right| \leqslant 2K \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}(X_k - X_k^{(1)}) =$$

$$= 2K\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k} X_k + B_i\right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k} X_k^{(1)} + B_i\right)\right] = 2K[X_i - X_i^{(2)}]$$

. . . . . .

$$. |z_i| \leqslant 2K[X_i - X_i^{(n)}],$$

но $(X_i - X_i^{(n)}) \to 0$, благодаря чему необходимо $z_i = 0$.

Замечание. Из доказанной теоремы вытекает в частности, что если главные решения мажорантной системы ограничены снизу $X_i \geqslant \alpha > 0$, то данная система имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $|x_i| < K\alpha$, т. е. единственное ограниченное решение. Таким образом и мажорантная система, которая является мажорантной и для самой себя, имеет в этом случае единственное ограниченное решение (в частности $X_i^* = X_i$).

Укажем еще, что если свободные члены системы удовлетворяют неравенству $|b_i| < K\rho_i$, то, как мы упоминали выше, она имеет мажорантную систему:

$$X_i = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| X_k + K\rho_i,$$

а тогда, если последняя система имеет ограниченное снизу главное решение $X_i \geqslant \alpha$, то данная система имеет единственное ограниченное решение.

Применим это замечание к установлению единственности решения для системы, рассмотренной в примере. Покажем, что при свободных членах, удовлетворяющих поставленному выше условию $|b_i| < \frac{K}{4i-2}$, система имеет единственное ограниченное решение. Для этого достаточно установить, что система со свободными членами $b_i = \rho_i = \frac{1}{4i-2}$

$$X_1 = \frac{1}{1\cdot 3}X_2 + \frac{1}{3\cdot 5}X_3 + \frac{1}{5\cdot 7}X_4 + \ldots + \frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{1}{1\cdot 3}X_1 + \frac{1}{1\cdot 3}X_3 + \frac{1}{3\cdot 5}X_4 + \ldots + \frac{1}{6}$$

$$X_3 = \frac{1}{3\cdot 5}X_1 + \frac{1}{1\cdot 3}X_2 + \frac{1}{1\cdot 3}X_4 + \ldots + \frac{1}{10}$$

. . . . . .

$$X_i = \frac{1}{(2i-1)(2i-3)}X_1 + \frac{1}{(2i-3)(2i-5)}X_2 + \ldots + \frac{1}{1\cdot 3}X_{i-1} + \frac{1}{1\cdot 3}X_{i+1} + \ldots + \frac{1}{4i-2}$$

. . . . . .

имеет главное решение $X_i = 1$, для чего, в свою очередь, достаточно показать, что

$$X_i > \alpha > 0 \qquad [i = 1, 2, \ldots]$$

Для первого приближения имеем

$$X_i^{(1)} = \frac{1}{4i-2}.$$

Покажем, что для n-го приближения справедливо неравенство:

(*) $$X_i^{(n)} \geqslant \frac{n}{4i-4+2n}.$$

Оно верно при $n = 1$; покажем, что оно остается верным при переходе от n к $n+1$.

Действительно, на основании i-го уравнения системы:

$$X_i^{(n+1)} = \frac{1}{(2i-1)(2i-3)}X_1 + \frac{1}{(2i-3)(2i-5)}X_2 + \ldots + \frac{1}{1\cdot 3}X_{i-1} + \frac{1}{1\cdot 3}X_{i+1} + \ldots + \frac{1}{4i-2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(2i-1)(2i-3)}\cdot\frac{n}{2n} + \frac{1}{(2i-3)(2i-5)}\cdot\frac{n}{2n+4} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 3}\cdot\frac{n}{4(i-1)-4+2n} + \frac{1}{1\cdot 3}\cdot\frac{n}{4(i-1)+4+2n} + \ldots + \frac{1}{4i-2} \geqslant \frac{1}{1\cdot 3}\left(\frac{n}{4i+2n} + \frac{n}{4i-2n-8}\right) + \frac{1}{3\cdot 5}\left(\frac{1}{4i+2n+4} + \frac{n}{4i+2n-12}\right) + \ldots + \frac{1}{(2i-1)(2i-3)}\left(\frac{n}{4(i-1)+4(i-1)+2n} + \frac{n}{4(i-1)-4(i-1)+2n}\right) + \frac{1}{4i-2}.$$

Далее очевидно

$$\frac{n}{4(i-1)+2n-4(i-1)} + \frac{n}{4(i-1)+2n+4(i-1)} > \frac{2n}{4(i-1)+2n}$$

. . . . . .

$$\frac{n}{4(i-1)+2n-4} + \frac{n}{4(i-1)+2n+4} > \frac{2n}{4(i-1)+2n}.$$

Поэтому, соединяя в предыдущей оценке члены попарно и пользуясь только что написанными неравенствами, найдем

$$X_i^{(n+1)} > \frac{2n}{4(i-1)+2n}\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2i-1)(2i-3)}\right) + \frac{1}{4i-2} = \frac{2n}{4i-4+2n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4i-2}\right) + \frac{1}{4i-2} = \frac{1}{4i-2} + \frac{n(4i-4)}{(4i-4+2n)(4i-2)} > \frac{1}{4i-2} + \frac{n(4i-4)}{(4i-2)(4i-2+2n)} = \frac{4i-2+2n+n(4i-4)}{(4i-2)(4i-2+2n)} = \frac{n+1}{4i-4+2(n+1)}$$

и неравенство (*) установлено. Переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, найдем

$$X_i \geqslant \frac{1}{2},$$

а тогда согласно сказанному выше $X_i = 1$. Итак мы показали, что при свободных членах порядка $\frac{1}{i}$ рассматриваемая система имеет всегда ограниченное решение и притом единственное.

Дальнейшие теоремы о вполне регулярных системах также переносятся на регулярные, в частности теорема III о сравнении систем остается в силе, если говорить о главных решениях систем (2) и (15); теорема IV может быть здесь установлена в такой форме:

Теорема IV′. Пусть *дана последовательность систем* ($s = 1, 2, \ldots$):

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}^{(s)} x_k + b_i^{(s)}, \qquad [i = 1, 2, \ldots] \tag{41}$$

имеющих общую мажорантную систему (15)

$$|c_{i,k}^{(s)}| \leqslant C_{i,k}; \quad |b_i^{(s)}| \leqslant B_i,$$

причем последняя допускает положительное решение. Тогда, если свободные члены и коэфициенты системы (41) *стремятся к свободным членам и коэфициентам системы уравнений* (2), *при* $s \to \infty$

$$\lim_{s\to\infty} b_i^{(s)} = b_i, \quad \lim_{s\to\infty} c_{i,k}^{(s)} = c_{i,k},$$

то и главное решение системы (41) $\overset{s}{x}_i$ *при* $s \to \infty$ *стремится к главному решению системы* (2)

$$\lim_{s\to\infty} \overset{s}{x}_i = x_i.$$

Доказательство. Главное решение системы (41) на основании теоремы I′ получается, при применении способа последовательных приближений, в виде ряда

$$\overset{s}{x}_i = \overset{s}{x}_i^{(0)} + \left(\overset{s}{x}_i^{(1)} - \overset{s}{x}_i^{(0)}\right) + \left(\overset{s}{x}_i^{(2)} - \overset{s}{x}_i^{(1)}\right) + \ldots$$

При всех s (i фиксировано) этот ряд мажорируется аналогичным рядом, составленным для системы (15):

$$X_i^{(0)} + (X_i^{(1)} - X_i^{(0)}) + (X_i^{(2)} - X_i^{(1)}) + \ldots = X_i.$$

В силу этого ряд, дающий $\overset{s}{x}_i$, сходится относительно s равномерно и потому в нем допустим почленный переход к пределу по s

при $s \to \infty$. Осуществляя этот переход, находим:

$$\lim_{s\to\infty} \overset{s}{x}_i = \lim_{s\to\infty} \overset{s}{x}_i^{(0)} + \lim_{s\to\infty} \left(\overset{s}{x}_i^{(1)} - \overset{s}{x}_i^{(0)}\right) + \ldots = x_i^{(0)} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) + \ldots = x_i,$$

где x_i — главное решение системы уравнений (2).

Теорема V′. Если система (2) имеет мажорантную систему с положительными решениями, то к ней применим метод редукции и приводит к главному решению системы (2).

Утверждение теоремы следует сразу из теоремы IV′, если систему (2) рассматривать как предельную для систем (26) при $N \to \infty$.

n° 5. Некоторые дополнения к теории регулярных систем. Приведем прежде всего некоторые результаты Б. М. Кояловича о регулярных системах.

Заметим предварительно, что всегда можно добиться того, чтобы решения мажорирующей системы были равны единице: $X_i^* = 1$. Действительно, если бы это условие не было соблюдено, мы могли бы вместо неизвестных x_i рассмотреть новые $z_i = \frac{x_i}{X_i^*}$, которые определялись бы из системы

$$z_i = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{i,k} \frac{X_k^*}{X_i^*}\right) z_k + \frac{b_i}{X_i^*}. \tag{42}$$

Для последней мажорантной является система

$$Z_i = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{i,k} \frac{X_k^*}{X_i^*}\right) Z_k + \frac{B_i}{X_i^*} \tag{43}$$

с решением $Z_i = 1$.

Сделаем далее предположение, что в данной системе $c_{i,k} \geqslant 0$ и у мажорантной системы коэфициенты те же что и у данной ($C_{i,k} = c_{i,k}$), а также, что решение X_i^* мажорантной системы есть главное ее решение $X_i = X_i^*$.[1]

Таким образом окончательно данная система принимает вид

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k + b_i, \quad c_{i,k} \geqslant 0, \tag{44}$$

а мажорантная система благодаря тому, что $X_i = 1$, заменится на ряд тождеств:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} + B_i \qquad [i = 1, 2, \ldots] \tag{45}$$

Предположим, что нам известно значение первых p неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Подставим значение этих неизвестных во все уравнения,

[1] Это условие у Б. М. Кояловича-повсюду незаконно опущено.

начиная с $(p+1)$-го, тогда получим для неизвестных $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots$ опять бесконечную систему уравнений такого же вида.

$$(46)\quad x_i = \sum_{k=p+1}^{\infty} c_{i,k}x_k + \left(b_i + \sum_{k=1}^{p} c_{i,k}x_i\right), \ \ldots \ [i = p+1, p+2, \ldots]$$

которая имеет мажорантную систему

$$(47)\quad X_i = \sum_{k=p+1}^{\infty} c_{i,k}X_k + \left(B_i + \sum_{k=1}^{p} c_{i,k}X_k\right) \ [i = p+1, p+2, \ldots]$$

Сравнивая свободные члены системы (46) со свободными членами системы (47), можно указать и известные границы, в которых содержатся искомые $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots$ Именно, если отношение этих свободных членов для всех x_i заключено в границах между h и H:

$$(48)\quad h \leqslant V_i^{(p)} = \frac{\sum_{k=1}^{p} c_{i,k}x_k + b_i}{\sum_{k=1}^{p} c_{i,k}X_k + B_i} = \frac{\sum_{k=1}^{p} c_{i,k}x_i + b_i}{\sum_{k=1}^{p} c_{i,k} + B_i} \leqslant H,$$

то неизвестные x_i системы (46) заключены в пределах

$$h = hX_i \leqslant x_i \leqslant HX_i = H \quad [i = p+1, p+2, \ldots]$$

Это совершенно ясно, так как из (45) и (46) видно, что если рассмотреть неизвестные $x_i - h$ и $H - x_i$ $[i = p+1, p+2, \ldots]$, то для них получается система с положительными свободными членами, а тогда и

$$x_i - h \geqslant 0; \quad H - x_i \geqslant 0 \ [p = p+1, p+2, \ldots]$$

Отношения $V_i^{(p)}$, входящие в (48), Б. М. Коялович называет лимитантами. Далее он дает следующее интересное применение лимитант. При практическом решении систем было замечено, что при увеличении i — номера неизвестной — отношение $\frac{x_i}{X_i}$ приближается к постоянному числу, иначе говоря x_i можно записать в виде

$$(49)\quad x_i = (G + \varepsilon_i)X_i,$$

где G постоянная и $\varepsilon_i \to 0$. Пользуясь лимитантами, Б. М. Коялович точно установил, что это обстоятельство имеет место для регулярных систем, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию, а именно следующему:

(a) Все коэфициенты, лежащие по левую сторону диагонали, имеют порядок свободных членов мажорантной системы, т. е. существуют такие два числа l и L, что

$$(50)\quad l < \frac{c_{i,k}}{B_i} < L \quad [k = 1, 2, \ldots, i-1; \quad i = 1, 2, 3, \ldots].$$

Если система регулярная и удовлетворяет условию (a), то при $i \to \infty$ неизвестные стремятся к определенному конечному пределу

$$(51)\quad \lim_{i\to\infty} x_i = G.^1$$

В заключение укажем на некоторые возможные обобщения теории регулярных систем.

I. Иногда приходится рассматривать совокупность двух бесконечных систем

$$(52)\quad \begin{cases} x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}y_k + b_i; \\ y_i = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{i,k}x_k + \beta_i; \end{cases}$$

с двумя рядами неизвестных $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ На такие системы очевидно переносятся результаты n° n° 1 — 4, так как вводя новые неизвестные z_i, полагая

$$z_{2i-1} = x_i; \quad z_{2i} = y_i \qquad [i = 1, 2, \ldots]$$

получим для них один ряд уравнений.

II. Можно рассматривать в обе стороны бесконечные системы уравнений с неизвестными x_i $[i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots]$, именно системы вида

$$(53)\quad x_i = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{i,k}x_k + b_i. \ [i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots]$$

На эти системы также переносится теория регулярных систем, в частности, например, если

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_{i,k}| < 1 - \theta, \quad [i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots]$$

то для системы (53) остается верным все сказанное о вполне регулярных системах.

III. Упомянем еще о квази-регулярных системах. Мы будем называть так системы, в которых условие регулярности $\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| < 1$ выполняется лишь во всех строках, начиная с некоторой

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| < 1. \ [i = N+1, N+2, \ldots]$$

[1] См. Б. М. Коялович. Исследование и т. д. Гл. V. Автор делает здесь еще некоторое второе предположение, однако оно является излишним, так же как и последняя часть рассуждения автора, стр. 162 — 165.

Вопрос о существовании решения такой системы сводится при известных условиях к подобному же вопросу для некоторой конечной системы. В самом деле, уравнения этой системы, начиная с $(N+1)$-го, образуют регулярную систему; если она имеет мажорантную, то из этой системы можно определить неизвестные $x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$, при этом эти неизвестные выразятся через свободные члены и первые неизвестные $x_1, \ldots, x_N$:

$$x_i = a_i^{(i)} x_1 + \ldots + a_N^{(i)} x_N + \xi_i \quad [i = N+1, N+2, \ldots]$$

Если мы полученные таким образом их выражения подставим в первые N уравнений, то для неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_N$ получим систему N уравнений с N неизвестными. Если эта конечная система имеет решение, то мы можем с помощью его получить и решение первоначальной бесконечной системы.

IV. Во многих случаях система, не являющаяся регулярной, приводится к виду регулярной с помощью некоторых преобразований, например с помощью подстановки вида $z_i = x_i a_i$, или с помощью сложения и вычитания равенств системы.

V. Пелле (Pellet) в своей работе (цит. на стр. 27) рассматривает и нелинейные системы того же типа, что и регулярные.

Рассмотрим систему уравнений

$$(54)\quad x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots) = b^{(i)} + \sum_{k_1=1}^{\infty} c_{k_1}^{(i)} x_{k_1} + \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty} c_{k_1 k_2}^{(i)} x_{k_1} x_{k_2} + \ldots + \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_j=1}^{\infty} c_{k_1 k_2 \ldots k_j}^{(i)} x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_j} + \ldots$$

и мажорантную для нее систему, т. е. систему того же вида

$$(55)\quad X_i = F_i(X_1, X_2, \ldots) = B^{(i)} + \sum_{k_1=1}^{\infty} C_{k_1}^{(i)} X_{k_i} + \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty} C_{k_1 k_2}^{(i)} X_{k_1} X_{k_2} + \ldots + \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_j=1}^{\infty} C_{k_1, k_2, \ldots k_j}^{(i)} X_{k_1} X_{k_2} \ldots X_{k_j} + \ldots,$$

где функции F_j являются мажорантными для f; именно всегда

$$|b^{(i)}| \leqslant B^{(i)}; \quad |c_{k_1, k_2, \ldots k_j}^{(i)}| \leqslant C_{k_1, k_2, \ldots k_j}^{(i)}.$$

Можно показать тогда, что если мажорантная система имеет положительное решение $X_i^* \geqslant 0$, то и данная система имеет решение и притом такое, что $|x_i| \leqslant X_i^*$.

На этом мы заканчиваем теорию регулярных систем. Мы уделили им столь большое место в виду важности их для приложений. В следующем номере мы даем обзор других исследований, относящихся к бесконечным системам уравнений; там, несмотря на чрезвычайно важное теоретическое значение этих исследований, мы ограничимся лишь изложением основных результатов без доказательств, за которыми отсылаем интересующихся к цитированным выше специальным руководствам В. Ф. Кагана и Fr. Riesz'a.

n° 6. Краткий обзор других исследований, относящихся к бесконечным системам. I. Бесконечные определители. Впервые бесконечные определители были применены в 1877 году Hill'ем при интегрировании одного диференциального уравнения, получающегося при исследовании движения луны. Вскоре, в связи с этим, Пуанкаре (H. Poincaré) развил начала их теории. После того систематическое их исследование было проведено в ряде работ Коха (Koch).

Рассмотрим бесконечную матрицу:

$$(56)\quad \begin{vmatrix} 1+c_{11}, & c_{12}, & c_{13}, \ldots \\ c_{21}, & 1+c_{22}, & c_{23}, \ldots \\ c_{31}, & c_{33}, & 1+c_{33}, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

и предположим, что двойной ряд $\sum_{i,k=1}^{\infty} |c_{ik}|$ сходится; тогда можно показать, что определитель из n^2 элементов этой матрицы Δ_n при $n \to \infty$ стремится к пределу; этот предел Δ называют бесконечным определителем матрицы (41). При сделанном предположении его называют нормальным определителем.

Если мы заменим далее в матрице (41) k-й столбец на ряд ограниченных чисел $b_1, b_2, \ldots$, то опять будет существовать предел конечных определителей $\Delta_n^{(k)}$ при $n \to \infty$, который обозначим $\Delta^{(k)}$.

При введении таких определителей для системы уравнений, коэфициенты которых составляют матрицу (56)

$$(57)\quad x_i + \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k = b_i$$

может быть развита теория решения, аналогичная теории решения конечных систем с помощью определителей, в частности могут быть доказаны теоремы, аналогичные теоремам Крамера и Руше.

Можно доказать именно следующие предложения:

1) Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное ограниченное решение, которое дается равенствами

$$x_i = \frac{\Delta^{(i)}}{\Delta}. \tag{58}$$

2) Если определитель $\Delta = 0$, то однородная система, получаемая из (57), имеет отличные от нуля решения; приэтом она имеет r независимых решений, где r есть ранг матрицы (56) (число всегда конечное); таким образом в частности в однородной системе можно зафиксировать r неизвестных так, чтобы она стала определенной.

3) Если $\Delta = 0$, то неоднородная система (57), вообще говоря, не имеет решения. Для того чтобы она имела решение, свободные члены b_i системы должны удовлетворять некоторым определенным соотношениям (числом r). Если эти соотношения выполнены, то решение существует, но не единственно.

Кох показал, что эти результаты остаются верными для гораздо более широких классов определителей, чем нормальные. Наиболее интересное обобщение состоит в том, что требование сходимости ряда $\sum_{i,k=1}^{\infty} |c_{i,k}|$ можно заменить требованием сходимости рядов

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_{i,i}|, \quad \sum_{i,k=1}^{\infty} c_{i,k}^2 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2,$$

тогда и решение будет удовлетворять условию: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ сходится. Также можно вместо упомянутых выше требований потребовать, например, сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} |c_{ii}|$ и того, чтобы $|c_{i,k}| \leqslant \alpha_i$, где ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ сходится.

II. Результаты Гильберта (Hilbert).[1] В связи с построением теории интегральных уравнений Гильбертом была развита специальная теория бесконечных систем уравнений.

Рассмотрим наряду с системой (57) билинейную форму

$$K(x, y) = \sum_{i,k=2}^{\infty} c_{i,k} x_i y_k. \tag{59}$$

Эта форма называется вполне непрерывной, если выполнено условие

$$\left| \sum_{i,k=1}^{n} c_{i,k} x_i y_k - \sum_{i,k=1}^{m} c_{i,k} x_i y_k \right| < \varepsilon \text{ при } n, m \geqslant N$$

[1] F. Riesz. Гл. IV—V. — D. Hilbert. Gründzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 1912.

равномерно относительно x_i и y_k, лежащих в области

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \leqslant 1.$$

Достаточным условием для этого является, например, сходимость ряда $\sum_{i,k=1}^{\infty} c_{i,k}^2$, но можно указать и другие более слабые достаточные условия, которые имеют однако довольно сложный характер.

Для систем (57) с вполне непрерывной формой (59) Гильбертом было доказано следующее предложение, обобщающее подобное же предложение для конечных систем; при сходимости ряда $\sum b_i^2$ либо данная система имеет единственное определенное решение, удовлетворяющее условию: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ сходится, либо имеет решение, отличное от нуля, соответствующая системе (57) однородная система. Также распространяются и остальные теоремы о конечных системах.

III. Исследования Шмидта (Schmidt).[1] Шмидт рассматривает системы вида (57) при единственном условии $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}^2$—сходится. Для таких систем им было дано необходимое и достаточное условие существования решения. Так, например, условие того, чтобы однородная система (57) не имела решения со сходящимся рядом $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$, есть обращение в нуль следующего выражения:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left\{ \begin{vmatrix} s_{11} \dots s_{1\alpha} & c_{1k} \\ \dots & \dots \\ s_{\alpha 1} \dots s_{\alpha\alpha} & c_{\alpha k} \\ c_{1k} \dots c_{\alpha k} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} s_{11} \dots s_{1\alpha} \\ \dots \\ s_{\alpha 1} \dots s_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \right\}, \quad \text{где } s_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha k} c_{\beta k}.$$

$k = 1, 2, \dots$

Аналогичного вида условие можно дать и для неоднородной системы, а также подобного же вида выражениями задать и самые неизвестные.

§ 3. Решение граничных задач с помощью неортогональных рядов

n° 1. Общие принципы. В § 1 мы рассмотрели решение граничных задач по методу Фурье с помощью рядов по фундаментальным функ-

[1] E. Schmidt. Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Palermo Rend. 25 (1908), стр. 53—77. Некоторые методы, указанные E. Smidt'ом а также T. Kötteritzsch, могут оказаться полезными и для численного решения бесконечных систем. См. диссертацию E. Goldschmidt'a „Über die Numerische Verwendbarkeit der Methoden zur Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen". Würzburg 1912.

циям, т. е. рядов по функциям, которые образуют на контуре ортогональную систему функций (в случае задачи Дирихле; вообще же образуют ортогональную систему контурные операторы над ними). Однако, разыскание такой системы функций представляет вообще большие затруднения, поэтому мы рассмотрим здесь способы нахождения решения в виде ряда, составленного из произвольных решений, не образующих на контуре ортогональной системы. Здесь находят применение бесконечные системы уравнений.

Итак, пусть требуется найти решение уравнения эллиптического типа:

$$L(u) = 0 \tag{1}$$

при граничном условии

$$P(u) = f(s) \quad \text{на контуре } L. \tag{2}$$

Пусть нам известен некоторый бесконечный ряд решений уравнения (1): $u_1(x, y)$; $u_2(x, y)$; .... Операция $P(u)$ на контуре над этими решениями дает некоторую систему функций дуги

$$P[u_n(x, y)] = \varphi_n(s) \text{ на } L \qquad [n = 1, 2, \ldots] \tag{3}$$

Если бы мы могли разложить данную функцию $f(s)$ в ряд по функциям $\varphi_n(s)$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(s), \tag{4}$$

то мы смогли бы написать искомое решение в виде ряда [1]

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y). \tag{5}$$

Таким образом перед нами встает задача о разложении произвольной функции $f(s)$ по некоторой системе неортогональных функций. Рассмотрим в следующих n° способы решения этой задачи, а также примеры решения различных граничных задач с помощью таких разложений.

---

[1] Заметим, что для этого нет необходимости даже в разложении $f(s)$ в ряд по самим $\varphi_n(s)$, а достаточно разложить ее в ряд по их линейным комбинациям, т. е. написать $f(s)$ в виде

$$f(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{n_j} c_n^j \varphi_n(s) \right],$$

так как тогда аналогично можно составить и $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{n_j} c_n^j u_n(x, y) \right].$$

n° 2. Решение задачи о разложении произвольной функции по наперед заданным функциям с помощью ортогонализации. Пусть дана бесконечная система функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \tag{6}$$

определенных в промежутке (a, b).

Прежде всего мы можем из данной системы функций исключить те, которые представляют линейные комбинации предшествующих, так как они по существу не обогащают систему. Проведем теперь ортогонализацию системы (6), а именно построим систему функций

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots \tag{7}$$

ортогональных и нормированных, притом такую, что каждая функция системы (7) представляет некоторую линейную комбинацию функций системы (6), точнее $\psi_n(x)$ имеет вид

$$\psi_n(x) = a_1^{(n)} \varphi_1(x) + a_1^{(n)} \varphi_2(x) + \ldots + a_n^{(n)} \varphi_n(x). \tag{8}$$

Проведем эту ортогонализацию последовательно. Первая функция $\psi_1(x)$ должна иметь вид $\psi_1(x) = c\varphi_1(x)$. Подбирая постоянную c из условия $\int_a^b \psi_1^2 dx = 1$, найдем

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\int_a^b \varphi_1^2(x)\, dx}}.$$

Пусть первые функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ определены. Функция, $\psi_{n+1}(x)$ должна быть составлена линейно из них и функции $\varphi_{n+1}(x)$ т. е. имеет вид

$$\psi_{n+1}(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \ldots + c_n\psi_n(x) + c\varphi_{n+1}(x). \tag{9}$$

Постоянные c_i определяем из условия ортогональности $\psi_{n+1}(x)$ к $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$, именно помножая (9) на $\psi_i(x)$ и интегрируя, получим, пользуясь ортогональностью и нормированностью $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$:

$$c_i + c \int_a^b \varphi_{n+1}(x)\, \psi_i(x)\, dx = 0.$$

Определяя отсюда c_i, подставляя в (9) и найдя еще постоянную из условия $\int_a^b \psi_{n+1}^2 dx = 1$, в результате получим

$$\psi_{n+1}(x) = \frac{\varphi_{n+1}(x) - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b \varphi_{n+1}\psi_i\, dx \right) \psi_i(x)}{\left\{ \int_a^b \left[\varphi_{n+1}(x) - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b \varphi_{n+1}\psi_i\, dx \right) \psi_i(x) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{10}$$

С помощью этого равенства можно последовательно находить функции

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ldots.$$

Заметим, что пользуясь определителями, можно было бы прямо написать выражение n-ой функции $\psi_n(x)$:

$$(10')\qquad \psi_n(x)=\frac{\begin{vmatrix} \int_a^b \varphi_1^2\,dx & \int_a^b \varphi_1\varphi_2\,dx\ldots & \int_a^b \varphi_1\varphi_{n-1}\,dx & \varphi_1(x)\\ \int_a^b \varphi_2\varphi_1\,dx & \int_a^b \varphi_2^2\,dx\ldots & \int_a^b \varphi_2\varphi_{n-1}\,dx & \varphi_2(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \int_a^b \varphi_n\varphi_1\,dx & \int_a^b \varphi_n\varphi_2\,dx\ldots & \int_a^b \varphi_n\varphi_{n-1}\,dx & \varphi_n(x)\end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{n-1}\cdot\Delta_n}},$$

где Δ_n — так называемый определитель Грамма функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} \int_a^b \varphi_1^2\,dx & \int_a^b \varphi_1\varphi_2\,dx\ldots & \int_a^b \varphi_1\varphi_n\,dx\\ \int_a^b \varphi_2\varphi_1\,dx & \int_a^b \varphi_2^2\,dx\ldots & \int_a^b \varphi_2\varphi_n\,dx\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \int_a^b \varphi_n\varphi_1\,dx & \int_a^b \varphi_n\varphi_2\,dx\ldots & \int_a^b \varphi_n^2\,dx\end{vmatrix}$$

Этот определитель наверное отличен от нуля, если функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ линейно независимы.

В том, что функции $\psi_1,\ldots,\psi_n$, определенные равенством (10′), ортогональны и нормированы, можно убедиться непосредственной проверкой.

Подобно тому, как мы провели ортогонализацию для функций, заданных на интервале, может быть проведена ортогонализация и для функций, заданных на контуре L, нужно только повсюду вместо $\int_a^b$ взять $\int_L$.

После того как построена ортогональная система, можно для всякой функции $f(s)$ написать ее разложение в ряд по этим функциям:

$$(11)\qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\psi_n(x);\quad A_n=\int_a^b f(x)\,\psi_n(x)\,dx.$$

Отметим, что, конечно, нельзя гарантировать вообще сходимость ряда в первой части равенства (11), поэтому правильнее говорить, что этот

ряд соответствует функции $f(x)$, а не равен $f(x)$. Знание ряда по функциям $\psi_n(x)$, соответствующего функции $f(x)$, позволяет, так как ψ_n есть линейная комбинация (8) функций φ_i, написать ряд по линейным комбинациям функций φ_i соответствующий $f(x)$:

$$(12)\qquad I(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[a_1^{(n)}\varphi_1(x)+a_2^{(n)}\varphi_2(x)+\ldots+a_n^{(n)}\varphi_n(x)\right].$$

Для вопроса о сходимости рядов (11) и (12) имеет существенное значение так называемая полнота системы функций $\{\varphi_n(x)\}$. Система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *полной*, если не существует функции $\Phi(x)$ с $\int_a^b \Phi|(x)|^2\,dx>0$ ортогональной одновременно по всем функциям $\varphi_n(x)$, т. е. такой, что

$$(13)\qquad \int_a^b \varphi_n(x)\,\Phi(x)\,dx=0 \qquad [n=1,\ 2,\ldots]$$

Отметим следующее, почти очевидное, свойство полных систем: две непрерывные функции, имеющие все коэфициенты Фурье равными, между собой совпадают. Действительно разность двух таких функций ортогональна ко всем $\varphi_i(x)$, а потому равна нулю.

Очевидно, что система функций $\varphi_n(x)$ будет полной одновременно с системой функций $\psi_n(x)$. Относительно многих систем функций известна их полнота, например тригонометрические функции $\cos nx$, $\sin nx$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ образуют полную систему в промежутке $(0,2\pi)$; положительные степени $x:1,\ x,\ x^2,\ldots$ полную систему в любом интервале.[1] Можно показать, что общим условием для полноты ортогональной системы функций является выполнение для любой интегрируемой с квадратом функции $f(x)$ так называемого уравнения замкнутости

$$(14)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2=\int_a^b f^2(x)\,dx;\quad A_n=\int_a^b f(x)\,\psi_n(x)\,dx.$$

Если система функций $\psi_n(x)$ и полная, все же нельзя утверждать, что для всякой функции $f(x)$ ряд в правой части (11) сходится, однако можно утверждать, что имеет место сходимость этого ряда к $f(x)$ в более общем смысле.

---

[1] См. напр. И. И. Привалов. Ряды Фурье. Г. М. Мюнтцем было установлено, что любая система степеней $1,\ x^{\lambda_1},\ x^{\lambda_2},\ldots$ образует полную систему в интервале $(0,1)$, если только ряд $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ расходится. См. Festschrift, H. A. Schwarz, 1914, стр. 303. Далее Szegö (Berichte der Sächs. Akad. d. Wiss., t. 178, 1926) показал, что функции $\frac{1}{x+a_1},\ \frac{1}{x+a_2},\ldots$ образуют полную систему в любом интервале, каковы бы ни были числа $a_n>0$, с $\lim a_n=\infty$.

Рассмотрим следующий интеграл:

$$I_n = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^{n} A_i \psi_i(x) \right]^2 dx.$$

Интегрируя, пользуясь при этом ортогональностью и нормированностью $\psi_i(x)$ и определением A_i, без труда убедимся, что

$$(15) \qquad I_n = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^{n} A_i \psi_i(x) \right]^2 dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{i=1}^{n} A_i \int_a^b f(x)\,\psi_i(x)\,dx +$$

$$+ \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} A_i \psi_i(x) \right]^2 dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} A_i^2.$$

Отсюда на основании уравнения замкнутости ясно, что величина I_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому при больших n сумма n членов ряда (11) $\sum_{i=1}^{n} A_i \psi_i(x)$ хотя и может в отдельных точках сильно отличаться от $f(x)$, но в среднем — интегрально отличается от $f(x)$ весьма мало. Говорят вообще, что последовательность функций $F_n(x)$ сходится в среднем к функции $F(x)$, если

$$(16) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b [F(x) - F_n(x)]^2\,dx = 0.$$

Мы можем сказать поэтому в виду (15), что *частичные суммы ряда в правой части равенства* (11) *сходятся в среднем к функции* $f(x)$; то же относится тем самым и к ряду (12). Воспользуемся сейчас же этим фактом. Пусть функция $f(s)$ представляет контурные значения поставленной задачи, а $\varphi_n(s)$ контурные значения основных решений $u_n(x, y)$. При этом пусть система функций $\varphi_n(s)$ полная. Ортогонализовав эту систему, получим для функции $f(s)$ разложения (11) и (12).

Составим функцию

$$(17) \quad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[a_1^{(n)} u_1(x, y) + a_2^{(n)} u_2(x, y) + \ldots + a_n^{(n)} u_n(x, y) \right].$$

Эта функция $u(x, y)$ формально удовлетворяет всем условиям задачи. Покажем, что во всяком случае при задаче Дирихле для уравнения Лапласа ряд (17) сходится и представляет действительное решение задачи. Докажем именно следующую теорему:

Теорема. *Пусть* $u_n(x, y)$ *гармонические функции в области* D, *ограниченной контуром* Γ, *состоящим из конечного числа аналитических дуг. Пусть контурные значения функций* $u_n(x, y)$ *образуют полную систему функций* $\varphi_n(s)$. *Тогда, если* $f(s)$ *непрерывная функция, удовлетворяющая условиям Дирихле,*[1] *ряд* (17) *сходится и дает гармоническую в области* D *функцию* $u(x, y)$, *значения которой при приближении к контуру стремятся к* $f(s)$.

Докажем прежде всего эту теорему для случая, когда область D есть единичный круг. Введем полярные координаты. Функция $u_n(x, y)$ на контуре обращается в $\varphi_n(\theta)$, поэтому она выражается интегралом Пуассона:

$$(18) \qquad u_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)\,\varphi_n(\lambda)}{1 - 2r\cos(\theta - \lambda) + r^2}\,d\lambda,$$

благодаря чему общий член ряда (17) — функция $v_n(x, y)$ также выражается интегралом Пуассона

$$(19) \quad v_n(r, \theta) = A_n \left[a_1^{(n)} u_1(r, \theta) + a_2^{(n)} u_2(r, \theta) + \ldots + a_n^{(n)} u_n(r, \theta) \right] =$$

$$= \frac{A_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)\,\psi_n(\lambda)}{1 - 2r\cos(\theta - \lambda) + r^2}\,d\lambda.$$

Определим с помощью интеграла Пуассона и ряда гармоническую функцию

$$(20) \qquad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \lambda) + r^2} f(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\, r^n,$$

где a_n и b_n — коэфициенты Фурье функции $f(\theta)$. Эта функция при приближении к контуру стремится к $f(\theta)$, так как [это видно из (20)] при $r \to 1$, ряд для $u(r, \theta)$ стремится к ряду Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

дающему в сумме $f(\theta)$. Нетрудно проверить, что предел будет равен $f(\theta)$, если при стремлении точки изнутри к контуру r и θ будут изменяться и одновременно. Докажем теперь, что внутри единичного круга ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(r, \theta)$ сходится и дает в сумме $u(r, \theta)$. Рассмотрим

[1] Эти условия нужны лишь для упрощения доказательства.

для этого разность

$$(21)\qquad \left|u(r,\theta)-\sum_{i=1}^{n}v_i(r,\theta)\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\lambda)+r^2}\left[f(\lambda)-\sum_{i=1}^{n}A_i\psi_i(\lambda)\right]d\lambda.$$

Пользуясь для интеграла, стоящего в правой части (21), неравенством Шварца:

$$(22)\qquad \left|\int_a^b f_1\cdot f_2\,dx\right|\leqslant\left[\int_a^b f_1^2\,dx\cdot\int_a^b f_2^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}},$$

найдем

$$(23)\qquad \left|u(r,\theta)-\sum_{i=1}^{n}v_i(r,\theta)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\lambda)+r^2}\right)^2 d\lambda\right]^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^{2\pi}\left[f(\lambda)-\sum_{i=1}^{n}A_i\psi_i(\lambda)\right]^2 d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В первом интеграле в правой части подинтегральная функция не превосходит очевидно $\left[\frac{1-r^2}{(1-r)^2}\right]^2=\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2<\frac{4}{(1-r)^2}$, а сам первый интеграл — величины $\frac{\sqrt{2\pi}\cdot 2}{1-r}$, т. е. представляет величину ограниченную. Второй интеграл, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}A_n\psi_n(\lambda)$ сходится в среднем к $f(\lambda)$ [ср. (15)], имеет пределом нуль. Итак установлена сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty}v_i(r,\theta)$ и то, что сумма его равна $u(r,\theta)$, а тем самым доказано равенство (17).

В случае, если бы данная область представляла не круг, мы могли бы установить равенство (17) с помощью аналогичных рассуждений, с той только разницей, что вместо формулы Пуассона пришлось бы воспользоваться общей формулой, дающей решение в случае любой области.

$$(24)\qquad u(x,y)=\int_L G(x,y,s)\,f(s)\,ds,$$

которая строится с помощью функции Грина.

Пример. Решим в качестве примера опять задачу Дирихле для прямоугольника, для определенности возьмем квадрат $(-1,1;-1,-1;1,-1;1,1)$. За фундаментальные решения примем, однако, теперь не те ортогональные функции $\sin x\cdot\operatorname{ch}y,\ldots$, что в п° 1 § 1, а фундаментальные решения для круга $r^n\cos n\varphi$, $r^n\sin n\varphi$. Эти функции на

контуре квадрата уже не будут ортогональны, поэтому нам придется провести их ортогонализацию.

Если перейти к декартовым координатам $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$ и разложить $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ по известным формулам Муавра, то найдем так называемые гармонические полиномы:

$$r^n\cos n\varphi=r^n\left[\cos^n\varphi-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi-\ldots\right]=$$

$$=x^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}y^4-\ldots$$

$$r^n\sin n\varphi=r^n\left[n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+\ldots\right]=$$

$$=nx^{n-1}y-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3+\ldots$$

Отсюда первые гармонические полиномы будут:

$$1;\ x;\ y;\ x^2-y^2;\ 2xy;\ x^3-3xy^2;\ 3x^2y-y^3;\ x^4-6x^2y^2+y^4;$$
$$4x^3y-4xy^3;\ \ldots$$

Ортогонализуем эти полиномы; при этом, чтобы сократить вычисления, ограничимся четными полиномами:

$$1;\ x^2-y^2;\ x^4-6x^2y^2+y^4;\ \ldots$$

Заметим, что сохранение лишь этой частичной последовательности полиномов даст возможность решать задачу Дирихле только с симметричными граничными условиями.

Обозначим контур квадрата через L. Первую функцию 1 мы должны только нормировать. Имеем, очевидно:

$$\int_L 1^2\,ds=\int_{(1,-1)}^{(1,1)}ds+\int_{(1,1)}^{(-1,1)}ds+\int_{(-1,1)}^{(-1,-1)}ds+\int_{(-1,-1)}^{(1,-1)}ds=$$

$$=\int_{-1}^{1}dy+\int_{1}^{-1}(-dx)+\int_{1}^{-1}(-dy)+\int_{-1}^{1}dx=8,$$

поэтому первая функция $\psi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{8}}$. Для второй функции вычисляем

прежде всего

$$\int_L 1\,(x^2-y^2)\,ds = \int_{(1,-1)}^{(1,1)} + \int_{(1,1)}^{(-1,1)} + \int_{(-1,1)}^{(-1,-1)} + \int_{(-1,-1)}^{(1,-1)} =$$

$$= \int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy + \int_{1}^{-1}(x^2-1)(-dx) + \int_{1}^{-1}(1-y^2)(-dy) +$$

$$+ \int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx = 0.$$

Следовательно функция (x^2-y^2) ортогональна к 1, а потому ее надо лишь нормировать

$$\int_L (x^2-y^2)^2\,ds = 4\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2\,dx = \frac{64}{15},$$

откуда окончательно $\psi_2(x) = \sqrt{\frac{15}{64}}\,(x^2-y^2)$. Далее для нахождения $\psi_3(x)$ по (10) ищем

$$\int_L (x^4-6x^2y^2+y^4)\,\frac{1}{\sqrt{8}}\,ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}}\left[4\int_{-1}^{1}(x^4+1)\,dx - 24\int_{-1}^{1}x^2\,dx\right] = -6{,}4\cdot\frac{1}{\sqrt{8}},$$

$$\int_L (x^4-6x^2y^2+y^4)\sqrt{\frac{15}{64}}\,(x^2-y^2)\,ds =$$

$$= \sqrt{\frac{15}{64}}\int_L (x^6-7x^4y^2+7x^2y^4-y^6)\,ds = 0.$$

Тогда

$$\psi_3 = C\left[\varphi_3 - \left(\int_L \varphi_3\psi_1\,ds\right)\psi_1 - \left(\int_L \varphi_3\psi_2\,ds\right)\psi_2\right] =$$

$$= C\left(x^4-6x^2y^2+y^4+6{,}4\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}\right).$$

Наконец, нормируя функцию ψ_3 по условию $\int_L \psi_3^2\,ds = 1$, окончательно получим

$$\psi_3 = \frac{x^4-6x^2y^2+y^4+0{,}8}{\left[\int_L (x^4-6x^2y_2+y^4+0{,}8)^2\,ds\right]^{\frac{1}{2}}} = 0{,}2244\,(x^4-6x^2y^2+y^4+0{,}8).$$

С помощью найденных первых, а также дальнейших полиномов $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ можно решать задачу Дирихле для квадрата с различными (симметричными) условиями на контуре.[1] В качестве примера решим задачу Дирихле с граничными условиями:

$$u = 1-x^2 \text{ при } y = \pm 1, \quad u = 1-y^2 \text{ при } x = \pm 1,$$

или кратко $u = f(s)$ на L. Мы должны по указанному выше методу разложить $f(s)$ на контуре L в ряд по $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$
Для этого ищем

$$a_1 = \int_L f(s)\,\psi_1(s)\,ds = 4\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{8}}\,(1-x^2)\,dx = \frac{16}{3\sqrt{8}} = \frac{4}{3}\sqrt{2},$$

$$a_2 = \int_L f(s)\,\psi_2(s)\,ds = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{15}{64}}\,(x^2-1)(1-x^2)\,dx +$$

$$+ 2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{15}{64}}\,(1-y^2)(1-y^2)\,dy = 0,$$

$$a_3 = \int_L f(s)\,\psi_3(s)\,ds =$$

$$= 0{,}2244\cdot 4\int_{-1}^{1}(x^4-6x_2+1+0{,}8)(1-x^2)\,dx = 0{,}8206.$$

В таком случае

$$f(s) \cong a_1\psi_1(s) + a_2\psi_2(s) + a_3\psi_3(s),$$

---

[1] Для того чтобы в самом деле утверждать возможность решения задачи Дирихле для любых симметричных граничных условий, нужно проверить, что найденная система функций $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ является на контуре полной (по отношению к подобным граничным условиям). Пусть даны контурные условия $u = f_1(x)$ при $y = \pm 1$, $u = f_2(y)$ при $x = \pm 1$. По виду построенных полиномов ясно, что полиномы $\psi_1, \psi_3, \ldots$ не меняются от перестановки x и y, а $\psi_2, \psi_4, \ldots$ меняют знак. Далее полиномами $\psi_1, \psi_3 \ldots$ при $y = \pm 1$ могут быть представлены $1; x^4, x^8, \ldots$, поэтому, например в виду вышеуказанной теоремы Мюнтца (см. прим. на стр. 57), они образуют полную систему аналогично $\psi_1, \psi_4, \ldots$; следовательно мы можем приблизиться к $\frac{f_1(x)+f_2(x)}{2}$ комбинацией $\psi_1, \psi_4, \ldots$; (взятых при $y = \pm 1$), а к $\frac{f_1(x)-f_2(x)}{2}$ линейной комбинацией $\psi_2, \psi_4, \ldots$ (взятых при $y = \pm 1$). Тогда сумма этих комбинаций будет при $y = \pm 1$ близка к $\frac{f_1+f_2}{2} + \frac{f_1-f_2}{2} = f_1$, а при $x = \pm 1$ к $\frac{f_1+f_2}{2} - \frac{f_1-f_2}{2} = f_2$. Откуда и ясно, что система полная и по доказанной выше теореме $u_n(x, y) \to u(x, y)$.

а самую гармоническую функцию приближенно найдем в виде:

$$u(x,y) \simeq \frac{4}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}} + 0{,}8206\cdot 0{,}2244\,(x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 0{,}8) =$$

$$= \frac{2}{3} + 0{,}1841\,(x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 0{,}8).$$

Отсюда например $u(0,0) \simeq 0{,}814$, точно же по методу n° 1 нашли бы $u(0,0) = 0{,}816$.

Замечание I. Отметим, что способ решения задачи Дирихле, использованный в примере для решения этой задачи для квадрата, может быть применен для уравнения Лапласа и в случае других областей. Именно всегда можно взять те же гармонические полиномы $r^n \cos n\varphi$ и $r^n \sin n\varphi$ и ортогонализовать их на контуре данной области. Наиболее удобен этот способ в случае областей, ограниченных многоугольниками. Метод этот требует, правда, весьма значительных вычислений, однако эти вычисления все же являются выполнимыми практически, особенно, если удается внести в них упрощения, пользуясь соображениями симметрии и т. п.

Замечание II. Следует отметить, что наряду с обычными ортогональными и нормированными системами, которые мы рассматривали выше

$$\int_a^b \varphi_i\varphi_k\,dx = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{„ } i \neq k \end{cases}$$

оказываются полезными также системы ортогональные и нормированные по весу $p(x)$, где $p(x) \geqslant 0$ некоторая интегрируемая функция, именно такие, что

$$\int_a^b \varphi_i\varphi_k p\,dx = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{„ } i \neq k \end{cases}$$

В случае обычной ортогонализации, очевидно, вес $p(x) = 1$. При ортогонализации по весу также может быть для всякой функции составлено разложение в ряд по функциям φ_i:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(x); \quad a_i = \int_a^b \varphi_i f\,p\,dx.$$

Произвольная система функций может быть, так же как и в обычном случае, ортогонализована и нормирована по весу, нужно только во всех интегралах, входящих в (10), прибавить к подъинтегральной функции множитель $p(x)$.

Иногда находят применение и другие обобщения ортогональных систем например биортогональные системы; так называют две системы

функций $\{\varphi_i(x)\}$, $\{\psi_i(x)\}$, удовлетворяющие условиям

$$\int_a^b \varphi_i\psi_k\,dx = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{„ } i \neq k \end{cases}$$

Для всякой функции $f(x)$ может быть и здесь составлено разложение

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(x); \quad a_i = \int_a^b f\psi_i\,dx.$$

Замечание III. Мы рассматривали в этом n° граничные условия вида

$$P(u) = f(s) \text{ на контуре } L,$$

где $P(u)$ — некоторый линейный оператор на контуре. Однако, тот же путь решения применим и в более общем случае, когда на различных частях контура заданы различные операторы

$$P_1(u) = f_1(s) \text{ на } L_1; \quad P_2(u) = f_2(s) \text{ на } L_2,$$

где L_1 и L_2 — две части контура L. Например имеем подобную задачу, если на одной части контура задана сама функция, а на другой ее нормальная производная. В случае такой смешанной задачи нужно составить по основным решениям $u_n(x,y)$ функции $\varphi_n(s)$, определенные следующим образом

$$\varphi_n(s) = \begin{cases} P_1[u_n(x,y)] & \text{на } L_1 \\ P_2[u_n(x,y)] & \text{на } L_2 \end{cases}$$

ортогонализовать и нормировать эту систему функций, после чего составить разложение по этой системе функции $f(s)$, равной $f_1(s)$ в пределах L_1 и $f_2(s)$ в пределах L_2.

n° 3. Решение задачи о разложении произвольной функции по наперед заданным с помощью бесконечных систем уравнений.

Рассмотрим ту же задачу о разложении произвольной функции $f(s)$ в промежутке (a, b) по функциям $\varphi_n(s)$. Напишем искомое разложение с неопределенными коэфициентами A_k в виде:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k(x). \tag{25}$$

Возьмем теперь любую полную систему функций $\{\psi_i(x)\}$, помножим обе части равенства (25) на $\psi_i(x)$ и проинтегрируем его, тогда получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} A_k = b_i, \qquad [i = 1, 2, \ldots] \tag{26}$$

где

$$(27)\qquad c_{i,k}=\int_a^b \varphi_k(x)\psi_i(x)\,dx;\quad b_i=\int_a^b f(x)\psi_i(x)\,dx.$$

Система (25) служит для определения постоянных A_i. Если нам удастся определить значения A_i, удовлетворяющие системе (26), причем такие, что ряд в правой части (25) сходится к некоторой функции $f^*(x)$ [1] (хотя бы ряд сходился лишь в среднем) и при этом таков, что допустимо почленное интегрирование ряда (25), то сумма этого ряда $f^*(x)=f(x)$. В самом деле, функции $f(x)$ и $f^*(x)$ имеют одинаковые интегралы: $\int \psi_i f\,dx=\int \psi_i f^*\,dx$, в таком случае для ортогональной системы, получающейся ортогонализацией из функций ψ_i, f и f^* имеют одинаковыми все коэфициенты Фурье, а тогда по сделанному выше замечанию [стр. 57] они совпадают.

Полезно указать также другой способ получения системы (26), практически пожалуй даже более удобный. Именно к системе (26) можно притти другим путем. Разложим в ряд по какой-либо полной ортогональной системе функций $\{\psi_i(x)\}$, например в обыкновенный ряд Фурье, функцию $f(x)$ и все $\varphi_k(x)$; пусть

$$(28)\qquad f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i\psi_i(x);\quad \varphi_k(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_{i,k}\psi_i(x),$$

где $c_{i,k}$ и b_i определяются формулами (27). Подставим теперь ряды (28) в равенство (25) и приравняем коэфициенты при $\psi_i(x)$ в обеих частях этого равенства, тогда и получим очевидно систему (26). Отметим, что второй способ получения системы (26) предполагает, в отличие от первого, систему функций $\psi_i(x)$ ортогональной и нормированной.

Нельзя дать более или менее общих условий, при которых система (26) имеет решение. Однако в ряде практически важных случаев система (26) оказывается регулярной, как мы увидим дальше на примерах. Упомянем об одном таком случае. Если функции $\psi_n(x)$ тригонометрические, а функции $\varphi_n(x)$ весьма близки к ним, то система оказывается регулярной. Более того: пусть $\psi_n(x)$ любые ортогональные и нормированные в промежутке (a, b), ограниченные функции:

$$(29)\ |\psi_n(x)|\leqslant\frac{M}{b-a}\ \text{и пусть}\ |\varphi_n(x)-\psi_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon_n}{M},\ \text{причем}\ \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n=q<1.$$

[1] Отметим, что из результата Левина следует, что достаточным условием для существования таких A_i будет биортогональность системы функций $\varphi_k(x)$ к некоторым функциям $\alpha_k(x)$. (Math. Zeitschr. 32, 1930).

Тогда система (26) будет вполне регулярной. В самом деле

$$(30)\quad\begin{cases}|c_{i,k}|=\left|\int_a^b \varphi_k(x)\psi_i(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int \psi_k(x)\psi_i(x)\,dx\right|+\\ +\left|\int_a^b[\varphi_k(x)-\psi_k(x)]\psi_i(x)\,dx\right|\leqslant\frac{\varepsilon_k}{M}\cdot\frac{M}{b-a}(b-a)=\varepsilon_k\ \text{для}\ i\neq k.\\ |c_{i,i}-1|=\left|\int_a^b\varphi_i(x)\psi_i(x)\,dx-1\right|\leqslant\\ \leqslant\int_a^b|\varphi_i(x)-\psi_i(x)|\,|\psi_i(x)|\,dx\leqslant\varepsilon_i\end{cases}$$

В силу этого, если ввести

$$(31)\qquad c^*_{i,k}=-c_{i,k}\quad i\neq k;\quad c^*_{i,i}=1-c_{i,i},$$

то система (26) перепишется так:

$$(32)\qquad A_i=\sum_{k=1}^{\infty}c^*_{i,k}A_k+b_i,\qquad [i=1,2,\ldots]$$

причем она очевидно вполне регулярна, так как в виду неравенств (30)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c^*_{i,k}|=|c_{i,i}-1|+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}|c_{i,k}|<\varepsilon_i+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}\varepsilon_k=q<1.$$

Приведем теперь несколько примеров задач математической физики, решаемых с помощью бесконечных систем.

п° 4. **Пример 1.** *Смешанная граничная задача для уравнения Лапласа.* Рассмотрим следующую граничную задачу. Найти функцию гармоническую в единичном круге, для которой на половине контура окружности заданы значения самой функции, а на другой половине значения ее нормальной производной

$$u|_{r=1}=f(\theta)\ \text{при}\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=\varphi(\theta)\ \text{при}\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi.$$

При этом для упрощения вычислений предположим условия симметричными относительно оси OX, т. е.

$$f(-\theta)=f(\theta);\quad \varphi(\pi+\theta)=\varphi(\pi-\theta).$$

Искомое решение, в виду симметрии относительно оси OX, ищем в форме ряда

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta.$$

На основании первого условия должны иметь:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta = f(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

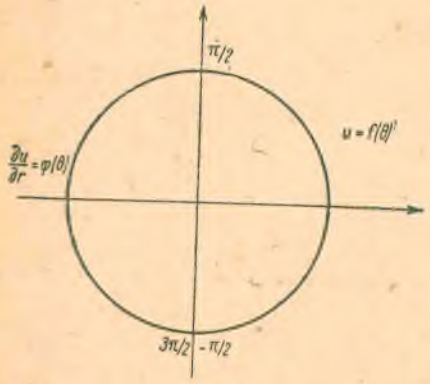


Рис. 2.

Функции $1, \cos 2\theta, \cos 4\theta, \ldots$ образуют полную систему в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; помножив поэтому написанное равенство на каждую из этих функций и проинтегрировав в пределах $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, найдем требуемую систему для определения неизвестных коэфициентов A_n. Для окончательного составления этой системы вычислим прежде всего

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos k\theta \cdot \cos 2i\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(k+2i)\theta + \cos(k-2i)\theta]\, d\theta =$$

$$= \begin{cases} \pi & \text{при } k = 2i = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } k = 2i \qquad [i > 0] \\ 0 & \text{при } k = 2j \qquad [j \neq i] \\ \frac{(-1)^{i+j} 2(2j+1)}{(2j+1)^2 - 4i^2} & \text{при } k = 2j+1 \end{cases}$$

Введем еще обозначение

$$\alpha_{2i} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) \cdot \cos 2i\theta\, d\theta, \qquad [i = 0, 1, 2, \ldots]$$

тогда получающуюся систему уравнений можем записать в виде:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \pi A_0 + \frac{2\cdot 1}{1\cdot 1} A_1 - \frac{2\cdot 3}{3\cdot 3} A_3 + \frac{2\cdot 5}{5\cdot 5} A_5 - \frac{2\cdot 7}{7\cdot 7} A_7 + \ldots = \alpha_0 \\ \frac{\pi}{2} A_2 - \frac{2\cdot 1}{-1\cdot 3} A_1 + \frac{2\cdot 3}{1\cdot 5} A_3 - \frac{2\cdot 5}{3\cdot 7} A_5 + \frac{2\cdot 7}{5\cdot 9} A_7 - \ldots = \alpha_2 \\ \frac{\pi}{2} A_4 + \frac{2\cdot 1}{-3\cdot 5} A_1 - \frac{2\cdot 3}{-1\cdot 7} A_3 + \frac{2\cdot 5}{1\cdot 9} A_5 - \frac{2\cdot 7}{3\cdot 11} A_7 + \ldots = \alpha_4 \\ \frac{\pi}{2} A_6 - \frac{2\cdot 1}{-5\cdot 7} A_1 + \frac{2\cdot 3}{-3\cdot 9} A_3 - \frac{2\cdot 5}{-1\cdot 11} A_5 + \frac{2\cdot 7}{1\cdot 13} A_7 - \ldots = \alpha_6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\pi}{2} A_{2i} + \frac{(-1)^i 2\cdot 1}{(1-2i)(1+2i)} A_1 + \frac{(-1)^{i+1} 2\cdot 3}{(3-2i)(3+2i)} A_3 + \ldots + \\ \qquad + \frac{(-1)^{i+j} 2(2j+1)}{(2j+1-2i)(2j+1+2i)} A_{2j+1} + \ldots = \alpha_{2i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Далее, граничное условие на второй части дает нам:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos n\theta = \varphi(\theta) \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi.$$

Помножим здесь обе части равенства на $\cos 2i(\theta - \pi) = \cos 2i\theta$; соответственный интеграл будет отличаться от предыдущего только знаком, а именно

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos k\theta \cdot \cos 2i\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(k\theta - k\pi) \cos(2i\theta - 2i\pi)\, d\theta =$$

$$= (-1)^k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos k\theta \cos 2i\theta d\theta.$$

Если теперь кроме того введем обозначение

$$\beta_{2i} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \varphi(\theta) \cos 2i\theta d\theta,$$

то полученная система уравнений будет:

$$(b)\quad \begin{cases} -\frac{2\cdot 1^2}{1\cdot 1}A_1+\frac{2\cdot 3^2}{3\cdot 3}A_3-\frac{2\cdot 5^2}{5\cdot 5}A_5+\frac{2\cdot 7^2}{7\cdot 7}A_7-\ldots=\beta_0 \\ 2\cdot\frac{\pi}{2}A_2+\frac{2\cdot 1^2}{-1\cdot 3}A_1-\frac{2\cdot 3^2}{1\cdot 5}A_3+\frac{2\cdot 5^2}{3\cdot 7}A_5-\frac{2\cdot 7^2}{5\cdot 9}A_7+\ldots=\beta_2 \\ 4\cdot\frac{\pi}{2}A_4-\frac{2\cdot 1^2}{-3\cdot 5}A_1+\frac{2\cdot 3^2}{-1\cdot 7}A_3-\frac{2\cdot 5^2}{1\cdot 9}A_5+\frac{2\cdot 7^2}{3\cdot 11}A_7-\ldots=\beta_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2i\cdot\frac{\pi}{2}A_{2i}+\frac{(-1)^{i+1}2\cdot 1^2}{(1-2i)(1+2i)}A_1+\frac{(-1)^{i+2}2\cdot 3^2}{(3-2i)(3+2i)}A_3+\ldots+ \\ \qquad+\frac{(-1)^{i+j+1}2(2j+1)^2}{(2j+1-2i)(2j+1+2i)}A_{2j+1}+\ldots=\beta_{2i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Произведем некоторое преобразование полученных систем. Исключим прежде всего неизвестные $A_2, A_4, \ldots$, для чего каждое (i-ое) уравнение системы (b) разделим на $2i$ и вычтем из него соответственное уравнение системы (a), первое уравнение системы (b) перепишем без изменений. В результате придем к системе

$$(c)\quad \begin{cases} -\frac{2\cdot 1}{1}A_1+\frac{2\cdot 3}{3}A_3-\frac{2\cdot 5}{5}A_5+\frac{2\cdot 7}{7}A_7-\ldots=\beta_0 \\ \frac{2\cdot 1}{-1\cdot 2}A_1-\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}A_3+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 2}A_5-\frac{2\cdot 7}{5\cdot 2}A_7+\ldots=\frac{\beta_2}{2}-\alpha_2 \\ -\frac{2\cdot 1}{-3\cdot 4}A_1+\frac{2\cdot 3}{-1\cdot 4}A_3+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 4}A_5-\frac{2\cdot 7}{3\cdot 4}A_7+\ldots=\frac{\beta_4}{4}-\alpha_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{(-1)^{i+1}2\cdot 1}{(1-2i)2i}A_1+\frac{(-1)^{i+2}2\cdot 3}{(3-2i)2i}A_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\ \qquad+\frac{(-1)^{i+j+1}2\cdot(2j+1)}{(2j+1-2i)2i}A_{2j+1}+\ldots=\frac{\beta_{2i}}{2i}-\alpha_{2i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Умножим теперь еще i-ое уравнение ($i\neq 0$) на i, а первое разделим на 2 и введем новые неизвестные

$$B_1=-A_1\cdot 1;\quad B_3=A_3\cdot 3;\quad B_5=-A_5\cdot 5;\quad \ldots;$$
$$B_{2j-1}=(-1)^j A_{2j-1}(2j-1);\quad \ldots$$

для них получим систему

$$(d)\quad \begin{cases} B_1+\frac{B_3}{3}+\frac{B_5}{5}+\frac{B_7}{7}+\ldots=\frac{\beta_0}{2} \\ -\frac{B_1}{-1}-\frac{B_3}{1}-\frac{B_5}{3}-\frac{B_7}{5}-\ldots=\frac{\beta_2}{2}-\alpha_2 \\ \frac{B_1}{-3}+\frac{B_3}{-1}+\frac{B_5}{1}+\frac{B_7}{3}+\ldots=\frac{\beta_4}{2}-2\alpha_4 \\ -\frac{B_1}{-5}-\frac{B_3}{-3}-\frac{B_5}{-1}-\frac{B_7}{1}-\ldots=\frac{\beta_6}{2}-3\alpha_6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

В этой системе возьмем полусуммы первого и второго уравнений, второго и третьего и т. д., при этом у некоторых полученных уравнений изменим знаки, тогда будем иметь окончательно

$$(e)\quad \begin{cases} B_1-\frac{B_3}{1\cdot 3}-\frac{B_5}{3\cdot 5}-\frac{B_7}{5\cdot 7}-\ldots=\frac{1}{4}(\beta_0+\beta_2-2\alpha_2) \\ -\frac{B_1}{1\cdot 3}+B_3-\frac{B_5}{1\cdot 3}-\frac{B_7}{3\cdot 5}-\ldots=-\frac{1}{4}(\beta_2+\beta_4-2\alpha_2-4\alpha_4) \\ -\frac{B_1}{3\cdot 5}-\frac{B_3}{1\cdot 3}+B_5-\frac{B_7}{1\cdot 3}-\ldots=\frac{1}{4}(\beta_4+\beta_6-4\alpha_4-6\alpha_6) \\ -\frac{B_1}{5\cdot 7}-\frac{B_3}{3\cdot 5}-\frac{B_5}{1\cdot 3}+B_7-\ldots=-\frac{1}{4}(\beta_6+\beta_8-6\alpha_6-8\alpha_8) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Такой переход от системы (d) к системе (e) является законным лишь на половину, именно: всякое решение системы (d) будет удовлетворять очевидно и системе (e); за обратное мы, однако, поручиться не можем.

Последнюю систему (e) мы рассматривали в качестве примера в п° 4 § 2, и там было установлено, что эта система имеет наверное ограниченные решения, если свободные члены имеют порядок $\frac{1}{n}$. Так как справа у нас стоят величины β_{2i} и $2i\alpha_{2i}$, т. е. коэфициенты Фурье функций $\varphi(\theta)$ и $\frac{df}{d\theta}$, то достаточно потребовать, чтобы эти функции $\varphi(\theta)$ и $f'(\theta)$ были ограниченной вариации. После того как числа B_1, $B_3, \ldots$ будут определены из последней системы, по ним можно найти числа $A_1, A_3, \ldots$, а по этим числам можно из системы (a) найти A_0, $A_2, A_4, \ldots$ Однако, чтобы доказать, что полученные значения A_i действительно дают решение первоначальной задачи, ограниченность чисел B_{2i-1} недостаточна. В самом деле, например, при свободных членах

$\frac{1}{4i-2}$ в i-ом уравнении получим решение $B_{2i-1}=1$; очевидно, однако, что это решение не удовлетворяет системе (d), так как при его подстановке ряды в правой части оказываются расходящимися. Поэтому нужно сделать более сильное ограничение относительно свободных членов системы (e).

Предположим, что свободные члены системы имеют порядок $\frac{1}{n\sqrt{n}}$, т. е. $|\beta_{2n-2}|$ и $|2n\alpha_{2n-2}|$ не превосходят $\frac{K}{n\sqrt{n}}$; в таком случае можно показать, что решения будут порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$, т. е. $|B_{2n-1}|<\frac{K_1}{\sqrt{n}}$.[1] Докажем, что эти решения системы (e) удовлетворяют и системе (d). Прежде всего ясно, что подстановка их в уравнения системы (d) дает в левых частях сходящиеся ряды с общим членом порядка $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Рассмотрим n-ое уравнение системы (d) и оценим его левую часть, пользуясь тем, что $|B_{2n-1}|<\frac{K_1}{\sqrt{n}}$. При этом при оценке мы воспользуемся заменой суммы на интеграл, подобной той, которая проводится при выводе интегрального признака сходимости рядов Коши. Имеем, беря абсолютные величины

$$\left|\frac{B_1}{-(2n-3)}+\frac{B_3}{-(2n-5)}+\cdots+\frac{B_{2n-3}}{1}+\frac{B_{2n-1}}{1}+\frac{B_{2n+1}}{3}+\cdots\right|\leqslant$$

$$\leqslant K_1\left|\frac{1}{(2n-3)\sqrt{1}}+\frac{1}{(2n-5)\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{3\sqrt{n+1}}+\cdots\right|\leqslant$$

$$\leqslant K_1\left[\int_0^{n-1}\frac{dx}{(2n-1-2x)\sqrt{x}}+\int_n^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(2x+1-2n)}+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=$$

$$=K_1\left[\frac{1}{\sqrt{2(2n-1)}}\ln\frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n-2}}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2(2n-1)}}\ln\frac{\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\leqslant\frac{K^*\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Правая часть n-ого уравнения системы (d) также, при сделанных пред-

[1] Для доказательства этого достаточно проверить, что подстановка $B_{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ в систему (e) дает свободные члены порядка $\frac{1}{n\sqrt{n}}$, и затем воспользоваться теоремой III.

положениях, сколь угодно мала. Это показывает, что каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно найти достаточно далекое уравнение системы (d), которое верно с точностью до ε. Коротко можно сказать, что бесконечно далекое уравнение системы (d) удовлетворено. Возьмем n-ое уравнение системы (d), которое удовлетворено с точностью до ε. Равенство, получающееся сложением n-го и $(n-1)$-го равенства системы (d) есть, удвоенное $(n-2)$-ое равенство системы (e), а потому удовлетворено точно. Отсюда заключаем, что $(n-1)$-ое равенство удовлетворено с точностью до ε, и продолжая таким же образом, установим то же самое для всех равенств вплоть до первого. В виду произвольности ε можем заключить, что все равенства системы (d) удовлетворены точно. После этого найдем числа

$$A_{2n-1}=\frac{(-1)^n B_{2n-1}}{2n-1},$$

которые будут порядка $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ и дадут решение системы (c). Далее из системы (a) можем найти $A_0, A_2, A_4, \ldots$; легко установить с помощью оценки, аналогичной той, которая проведена на предыдущей странице, что числа A_{2n} будут порядка $n^{-\frac{3}{2}}\ln n$ и удовлетворяют вместе с A^{2n-1} уравнениям системы (a) и (b). Далее, если мы рассмотрим для функции $u(r,\theta)$ и $\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}$ ряды по $\cos 2n\theta$ в промежутках $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3}{2}\pi$, то эти ряды будут сходиться, абсолютно и равномерно,[1] а потому допустим будет предельный переход почленно при $r\to 1$, что даст в силу равенств системы (a) и (b)

$$\lim_{r\to 1}u(r,\theta)=f(\theta) \qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{r\to 1}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}=\varphi(\theta) \qquad \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi.$$

Мы на этом примере показали, как может быть проведено решение подобной задачи с помощью бесконечных систем с полным исследованием получающихся систем. Заметим, что рассмотренная задача может быть решена и без бесконечных систем, именно решение ее может быть получено в форме определенного интеграла.[2]

К бесконечной системе, но более сложного вида, может быть приведено также решение более общей задачи:

[1] По отношению к ряду для $\frac{\partial u}{\partial r}$ это правда справедливо лишь при некоторых дополнительных ограничениях.

[2] Эта задача представляет частный случай задачи Гильберта, рассмотренной в курсе В. И. Смирнова, т. III, стр. 382.

найти u при условии

$$a_1 u + b_1 \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = f_1(\theta); \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$a_2 u + b_2 \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = f_2(\theta); \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi.$$

n° 5. Пример 2. Расчет защемленной пластинки. Известно, что прогиб тонкой прямоугольной пластинки со сторонами $2a$ и $2b$, защемленной по краям и подверженной равномерной нагрузке, представляет функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$(33)\quad \Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^4} = c; \quad c = \frac{P}{N} = \frac{12P(m^2-1)}{m^2 E h^3}$$

и граничным условиям

$$(34)\quad u = 0 \text{ при } x = \pm a;\ y = \pm b;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ при } x = \pm a;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm b.$$

Частное решение уравнения (33) очевидно будет

$$(35)\quad u_0 = \frac{c}{8}(a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2).$$

Тогда для функции $u_1 = u - u_0$ имеем уравнение

$$\Delta\Delta u_1 = 0$$

и граничные условия

$$(36)\quad \begin{cases} u_1 = 0 & \text{при } x = \pm a; \quad y = \pm b \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \pm\dfrac{ca}{4}(b^2 - y^2) & \text{при } x = \pm a \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \pm\dfrac{cb}{4}(a^2 - x^2) & \text{при } y = \pm b \end{cases}$$

В виду симметрии граничных условий u_1 представляет четную функцию переменных x и y. Поэтому достаточно будет, если искать решение в форме ряда, составленного из четных функций, удовлетворить граничным условиям при $x = +a$, $y = +b$, т. к. при $x = -a$ и $y = -b$ они будут удовлетворены автоматически. Разложим далее граничные функции в тригонометрический ряд, тогда граничные условия можем записать так:

$$(37)\quad \begin{cases} u = 0 \text{ при } x = a; \quad y = b; \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=a} = \dfrac{a^3 c \cdot 8\varphi^2}{\pi^3} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^3} \cos\frac{n\pi}{2b}\, y, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y}\Big|_{y=b} = \dfrac{a^3 c \cdot 8\varphi}{\pi^3} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^3} \cos\frac{n\pi}{2a}\, x, \end{cases}$$

где $\varphi = \dfrac{b}{a}$.

Искомое решение пытаемся найти в форме

$$(38)\quad u_1 = -\frac{ca^3}{2\pi^2}\left\{ \sum_{n=1,3,5,\ldots} A_n \frac{H_1(y, n\pi)}{n^2 \operatorname{ch}^2\frac{n\pi\varphi}{2}} \cos\frac{n\pi}{2a}x + \right.$$

$$\left. + \varphi^3 \sum_{n=1,3,5,\ldots} B_n \frac{H(x, n\pi)}{n^2 \operatorname{ch}^2\frac{n\pi}{2\varphi}} \cos\frac{n\pi}{2b}\, y \right\},$$

где функции H и H_1 представляют решения дифференциального уравнения (78), которое было введено при исследовании прогиба свободно опертой пластинки (§ 1 n° 5):

$$(39)\quad \begin{cases} H(x, n\pi) = (a+x)\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{2b}(a-x) + (a-x)\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{2b}(a+x) \\ H_1(y, n\pi) = (b+y)\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{2a}(b-y) + (b-y)\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{2a}(b+y). \end{cases}$$

Очевидно, что решение (38) удовлетворяет формально уравнению $\Delta\Delta u_1 = 0$ и условиям $u_1 = 0$ при $x = a$ и $y = b$. Мы должны подобрать теперь коэфициенты A_n и B_n так, чтобы удовлетворить последним двум условиям (5).

Легко проверить, что

$$(40)\quad \begin{cases} H'(x, n\pi)\big|_{x=a} = -\left(\dfrac{n\pi}{\varphi} + \operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{\varphi}\right); \\ H_1'(y, n\pi)\big|_{y=b} = -(n\pi\varphi + \operatorname{sh} n\pi\varphi) \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$(41)\quad \begin{cases} \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a} = \\ = \dfrac{ca^3}{2\pi^2}\left\{ \sum\limits_{n=1,3,\ldots} A_n \dfrac{H_1(y,n\pi)}{n^2 \operatorname{ch}^2 \dfrac{n\pi\varphi}{2}} \dfrac{n\pi}{2a} \sin\dfrac{n\pi}{2} + \varphi^3 \sum\limits_{n=1,3,\ldots} B_n \dfrac{\dfrac{n\pi}{\varphi} + \operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{\varphi}}{n^2 \operatorname{ch}^2 \dfrac{n\pi}{2\varphi}} \cos\dfrac{n\pi}{2b} y \right\} \\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b} = \\ = \dfrac{ca^3}{2\pi^2}\left\{ \sum\limits_{n=1,3,\ldots} A_n \dfrac{n\pi\varphi + \operatorname{sh} n\pi\varphi}{n^2 \operatorname{ch}^2 \dfrac{n\pi\varphi}{2}} \cdot \cos\dfrac{n\pi}{2a} x + \varphi^3 \sum B_n \dfrac{H(x,n\pi)}{n^2 \operatorname{ch}^2 \dfrac{n\pi}{2\varphi}} \dfrac{n\pi}{2b} \sin\dfrac{n\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$

Чтобы сравнить теперь выражения (41) и (37), нужно функции $H(x, n\pi)$ и $H_1(y, n\pi)$ разложить в ряды по $\cos\dfrac{n\pi}{2a}x$ и $\cos\dfrac{n\pi}{2b}y$. Имеем:

$$(42)\quad \begin{cases} \dfrac{n\pi}{2a} H_1(y, n\pi) = \sum\limits_{i=1,3,\ldots} C_i \cos\dfrac{i\pi}{2b} y \\ \dfrac{n\pi}{2b} H(x, n\pi) = \sum\limits_{i=1,3,\ldots} D_i \cos\dfrac{i\pi}{2a} x, \end{cases}$$

где, согласно формулам для коэфициентов рядов по ортогональным функциям,

$$(43)\quad \begin{cases} C_i = \dfrac{n\pi}{2a} \dfrac{\int\limits_0^b H_1(y, n\pi) \cos\dfrac{i\pi}{2b} y\, dy}{\int\limits_0^b \cos^2\dfrac{i\pi}{2b} y\, dy} = \dfrac{16\varphi^2}{n\pi\left(\dfrac{i^2}{n^2}+\varphi^2\right)^2} \cdot \dfrac{i}{n} \operatorname{ch}^2 \dfrac{n\pi\varphi}{2} \sin\dfrac{i\pi}{2}, \\ D_i = \dfrac{n\pi}{2b} \dfrac{\int\limits_0^a H(x, n\pi) \cos\dfrac{i\pi}{2a} x\, dx}{\int\limits_0^a \cos^2\dfrac{i\pi}{2a} x\, dx} = \dfrac{16\varphi^2}{n\pi\left(\dfrac{i^2}{n^2}\varphi^2+1\right)^2} \cdot \dfrac{i}{n} \operatorname{ch}^2 \dfrac{n\pi}{2\varphi} \sin\dfrac{i\pi}{2}. \end{cases}$$

Подставляя вместо H ряды (42) в выражения (41) и приравнивая их к выражениям (37), придем после сокращения на ca^3 к следующим равенствам:

$$-\frac{8\cdot\varphi^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\ldots} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^3} \cos\frac{n\pi}{2b} y + \sum_{n=1,3,\ldots} \sum_{i=1,3,\ldots} \left\{ \frac{8}{n^3\pi^3} \cdot \frac{i}{n} \frac{A_n}{\left(\frac{i^2}{n^2}+\varphi^2\right)^2} \varphi^2 \sin\frac{n\pi}{2} \cdot \sin\frac{i\pi}{2} \cdot \cos\frac{i\pi}{2b} y \right\} +$$

$$+ \sum_{n=1,3,\ldots} \frac{\varphi^3 B_n}{2n^2\pi^2} \cdot \frac{\frac{n\pi}{\varphi} + \operatorname{ch}\frac{n\pi}{\varphi}}{\operatorname{ch}^2\frac{n\pi}{2\varphi}} \cos\frac{n\pi}{2b} y = 0.$$

$$(44)\quad -\frac{8\varphi}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\ldots} \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3} \cos\frac{n\pi}{2a} x + \sum_{n=1,3,\ldots} \sum_{i=1,3,\ldots} \left\{ \frac{8}{n^3\pi^3} \frac{i}{n} \frac{B_n}{\left(\frac{i^2}{n^2}\varphi^2+1\right)^2} \varphi^5 \sin\frac{n\pi}{2} \sin\frac{i\pi}{2} \cos\frac{i\pi}{2a} x \right\} +$$

$$+ \sum_{n=1,3,\ldots} \frac{A_n}{2n^2\pi^2} \frac{n\pi\varphi + \operatorname{sh} n\pi\varphi}{\operatorname{ch}^2\frac{n\pi\varphi}{2}} \cdot \cos\frac{n\pi}{2a} x = 0.$$

Превращая двойные ряды в ординарные по $\cos\dfrac{n\pi}{2b}y$ и $\cos\dfrac{n\pi}{2a}x$ (заменив при этом i на n, а n на ρ) и приравнивая нулю все коэфициенты при этих функциях, приходим, после деления на $\dfrac{8\varphi^2\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3\pi^3}$, к системе уравнений

$$(45)\quad \begin{cases} \beta_n B_n \sin\dfrac{n\pi}{2} + \sum\limits_{\rho=1,3,\ldots} A_\rho \left(\dfrac{n^2}{n^2+\rho^2\varphi^2}\right)^2 \sin\dfrac{\rho\pi}{2} = 1, \\ \alpha_n A_n \sin\dfrac{n\pi}{2} + \sum\limits_{\rho=1,3,\ldots} B_\rho \left(\dfrac{n^2}{\varphi^2 n^2+\rho^2}\right)^2 \sin\dfrac{\rho\pi}{2} = \dfrac{1}{\varphi^4}, \end{cases} \quad [n=1,3,5,7,\ldots]$$

где мы обозначили для простоты письма

$$(46)\quad \begin{cases} \alpha_n = \varphi^{-5}\,\dfrac{n\pi}{16}\,\dfrac{n\pi\varphi + \operatorname{sh} n\pi\varphi}{\operatorname{ch}^2\dfrac{n\pi\varphi}{2}}; \\ \beta_n = \varphi\,\dfrac{n\pi}{16}\,\dfrac{\dfrac{n\pi}{\varphi} + \operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{\varphi}}{\operatorname{ch}^2\dfrac{n\pi}{2\varphi}}. \end{cases}$$

Из системы (45) должны быть определены коэфициенты A_n и B_n, тогда по ним можно составить решение (38).

Остановимся подробнее на случае квадратной пластинки.

В этом случае

$$b = a;\ \varphi = \frac{b}{a} = 1;\quad B_n = A_n;\quad \beta_n = \alpha_n.$$

Из двух систем уравнений (45) можем сохранить одну. Для полного написания этой системы вычисляем α_n, имеем

$$\alpha_1 = \frac{\pi^2}{16\operatorname{ch}^2\dfrac{\pi}{2}} + \frac{2\pi}{16}\operatorname{th}\frac{\pi}{2} = 0{,}45814;\quad \alpha_3 = \frac{9\pi^2}{16\operatorname{ch}^2\dfrac{3\pi}{2}} + \frac{6\pi}{16}\operatorname{th}\frac{3}{2}\pi = 1{,}17989$$

$$\alpha_5 = 1{,}96355;\quad \alpha_7 = 2{,}74889;\quad \alpha_9 = 3{,}53417;\quad \alpha_{11} = 4{,}31969.$$

Для больших n ($n \geqslant 10$) можем принять

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{16}\,\frac{n\pi + \operatorname{sh} n\pi}{\operatorname{ch}^2\dfrac{n\pi}{2}} = \frac{n\pi}{16}\,\frac{n\pi + \operatorname{sh} n\pi}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{ch} n\pi} \cong \frac{n\pi}{8}.$$

Если мы в системе (45) член суммы, содержащий A_n, присоединим к члену, стоящему вне суммы, то система примет вид (15) (см. стр. 79). Эта система, как мы покажем ниже, является регулярной и имеет определенное ограниченное решение при данных свободных членах. Это решение может быть найдено как по способу последовательных приближений, указанному в § 2, так и несколько видоизмененным способом последовательных приближений, а именно следующим. Отделим члены за главной диагональю и перенесем их в правую часть; тогда, отбросив эти члены сначала и решив оставшуюся рекуррентную систему, получим первое приближение для неизвестных A_1, A_3,... Вставив эти первые приближения в отделенные члены и решив вновь получившуюся рекуррентную систему, получим вторые приближения для неизвестных, и т. д. Нетрудно установить, что эти последовательные приближения будут стремиться к тому же главному решению, что и приближения, получаемые обычным методом. Пользуясь именно сейчас ука-

$$(47)\quad \begin{cases} 0{,}70814\,A_1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2 A_3 + \left(\frac{1}{26}\right)^2 A_5 - \left(\frac{1}{50}\right)^2 A_7 + \left(\frac{1}{82}\right)^2 A_9 - \left(\frac{1}{122}\right)^2 A_{11} + \ldots = 1 \\ \left(\frac{9}{10}\right)^2 A_1 - 1{,}42989\,A_3 + \left(\frac{9}{34}\right)^2 A_5 - \left(\frac{9}{58}\right)^2 A_7 + \left(\frac{9}{90}\right)^2 A_9 - \left(\frac{9}{130}\right)^2 A_{11} + \ldots = 1 \\ \left(\frac{25}{26}\right)^2 A_1 - \left(\frac{25}{34}\right)^2 A_3 + 2{,}21355\,A_5 - \left(\frac{25}{74}\right)^2 A_7 + \left(\frac{25}{106}\right)^2 A_9 - \left(\frac{25}{146}\right)^2 A_{11} + \ldots = 1 \\ \left(\frac{49}{50}\right)^2 A_1 - \left(\frac{49}{58}\right)^2 A_3 + \left(\frac{49}{74}\right)^2 A_5 - 2{,}99889\,A_7 + \left(\frac{49}{130}\right)^2 A_9 - \left(\frac{49}{170}\right)^2 A_{11} + \ldots = 1 \\ \left(\frac{81}{82}\right)^2 A_1 - \left(\frac{81}{90}\right)^2 A_3 + \left(\frac{81}{106}\right)^2 A_5 - \left(\frac{81}{130}\right)^2 A_7 + 3{,}78417\,A_9 - \left(\frac{81}{202}\right)^2 A_{11} + \ldots = 1 \\ \left(\frac{121}{122}\right)^2 A_1 - \left(\frac{121}{130}\right)^2 A_3 + \left(\frac{121}{146}\right)^2 A_5 - \left(\frac{14}{170}\right)^2 A_7 + \left(\frac{121}{202}\right)^2 A_9 - 4{,}51969\,A_{11} + \ldots = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\

занным методом, Hencky[1] нашел следующие значения для неизвестных:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1{,}4138 & A_{15} &= 0{,}0193 \\ A_3 &= 0{,}0945 & A_{17} &= -0{,}0141 \\ A_5 &= -0{,}1093 & A_{19} &= 0{,}0103 \\ A_7 &= 0{,}0770 & A_{21} &= -0{,}077 \\ A_9 &= -0{,}0510 & A_{23} &= 0{,}0051 \\ A_{11} &= 0{,}0371 & A_{25} &= -0{,}0041; \\ A_{13} &= -0{,}0264 \end{aligned}$$

Теперь, когда постоянные A_1, A_3, ... определены, определен и прогиб пластинки в любом месте $w = w_0 + w_1$, который находится из равенств (35) и (38), а с помощью его могут быть найдены также моменты и другие необходимые для расчета величины. Так, например, прогиб посредине:

$$w(0, 0) = \frac{qa^4}{8} - \frac{qa^3}{2\pi^2} \sum_{n=1, 3, \ldots} \frac{4a \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{n\pi}{2}} A_n;$$

наибольший момент посредине стороны:

$$M_x\Big|_{\substack{x=a \\ y=0}} = \frac{a^2 p}{4}\left(1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^1A_n}{n}\right).$$

Аналогичным образом может быть проведено решение и для неквадратной пластинки, только в этом случае придется принять во внимание обе системы уравнений (45).

На основании полученного решения Hencky дает следующие численные результаты, приводя для сравнения результаты для заделанной балки ($\varphi = \infty$):

$\varphi = \frac{a}{b}$	В центре пластинки		В середине стороны	
	M_y	M_x	M_y	M_x
1,0	$0{,}092pa^2$	$0{,}092pa^2$	$0{,}205pa^2$	$0{,}205pa^2$
1,5	$0{,}148pa^2$	$0{,}080pa^2$	$0{,}306pa^2$	$0{,}226pa$
∞	$0{,}167pa^2$	—	$0{,}333pa^2$	—

Проведем теперь исследование системы уравнений (47). Докажем, что эта система регулярная и имеет ограниченное решение, при данных

[1] См. Hencky, H. Über die Spannungszustand in rechteckigen Platten, München 1913. Другое решение задачи рассмотренной в этом п° дано в книге Б. Г. Галеркина, Упругие тонкие плиты. Госстройиздат 1933, стр. 90. См. также Б. М. Коялович. Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка СПБ, 1902 и Тимошенко, Теория упругости.

свободных членах. Оценим для этого сумму модулей коэфициентов (кроме диагонального) в каждом уравнении системы. Имеем для $n = 1, 3, 5, \ldots$

$$\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^2 + \left(\frac{n^2}{n^2+3^2}\right)^2 + \ldots + \left[\frac{n^2}{n^2+(n-2)^2}\right]^2 +$$

$$+ \left[\frac{n^2}{n^2+(n+2)^2}\right]^2 + \ldots < \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{n}{2}-1} \left[\frac{n^2}{n^2+(2x+1)^2}\right]^2 dx +$$

$$+ \int_{\frac{n}{2}}^{\infty} \left[\frac{n^2}{n^2+(2x+1)^2}\right]^2 dx < \frac{n}{2}\int_0^{\infty} \frac{du}{(u^2+1)^2} =$$

$$= \frac{n}{2}\left[\frac{u}{2(1+u^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u\right]_0^{\infty} = \frac{\pi n}{8}.$$

Диагональный же коэфициент при неизвестном A_n равняется по абсолютной величине

$$\alpha_n + \left(\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)^2 = \alpha_n + \frac{1}{4} > \frac{n\pi}{8} + \frac{1}{4};$$

[в том, что $\alpha_n > \frac{\pi n}{8}$, легко убедиться, пользуясь (46)]. Разделяя уравнения системы (47) на этот диагональный коэфициент $\alpha_n + \frac{1}{4}$ и перенося все члены, кроме диагонального, направо, приведем систему (47) к нормальному виду. При этом сумма модулей коэфициентов при неизвестных в правой части будет

$$\sum_{p=1}^{\infty} |c_{n,p}| = \frac{1}{\alpha_n + \frac{1}{4}}\left[\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^2 + \left(\frac{n^2}{n^2+3^2}\right)^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{n^2}{n^2+(n-2)^2}\right)^2 + \left(\frac{n^2}{n^2+(n+2)^2}\right)^2 + \ldots\right] <$$

$$< \frac{\frac{n\pi}{8}}{\frac{n\pi}{8} + \frac{1}{4}} < 1 - \frac{1}{n\pi} < 1.$$

Это неравенство показывает, что получившаяся система регулярная и что она имеет, наверное, ограниченные решения при свободных членах порядка не выше $\frac{1}{n\pi}$, т. е. $< \frac{K}{n\pi}$. Но после деления на $\alpha_n + \frac{1}{4}$ свободные члены 1 заменяются на

$$\frac{1}{\alpha_n + \frac{1}{4}} < \frac{1}{\frac{n\pi}{8}} = 8 \cdot \frac{1}{n\pi},$$

т. е. удовлетворяют этому условию для $K = 8$. Итак система уравнений (47) действительно имеет ограниченное решение и метод последовательных приближений представляет сходящийся процесс.[1]

§ 4. Применение двойных рядов к решению граничных задач.

n° 1. Постановка задачи. Основания метода. Пусть ставится задача: найти решение уравнения эллиптического типа

$$M(u) = f(x, y), \tag{1}$$

при нулевых граничных условиях:

$$P(u) = 0 \text{ на контуре } L \tag{2}$$

и различных свободных членах $f(x, y)$. Заметим, что требование нулевых граничных условий не уменьшает общности. В самом деле, если бы граничные условия были не нулевые

$$P(u) = \varphi(s) \text{ на } L,$$

то, построив произвольную функцию $u_0(x, y)$, удовлетворяющую последним граничным условиям, мы бы для разности $u_1 = u - u_0$ имели, очевидно, нулевые граничные условия

$$P(u_1) = P(u) - P(u_0) = 0 \text{ на } L$$

и уравнение

$$M(u_1) = M(u) - M(u_0) = f(x, y) - M[u_0(x, y)],$$

т. е. того же типа, что и (1), лишь с другим свободным членом.

Для решения поставленной задачи оказывается часто полезным использование двойных рядов. Предположим, что мы нашли функции $u_{i,k}(x, y)$, удовлетворяющие нулевым граничным условиям

$$P[u_{i,k}(x, y)] = 0 \text{ на } L, \tag{3}$$

[1] Единственность ограниченных решений у этой системы уравнений установлена в цит. на стр. 27 работе Р. О. Кузьмина, однако его доказательство опирается на теорему единственности для бигармонической проблемы, а не на непосредственное исследование системы. Представляет интерес дать прямое доказательство единственности так, как это было сделано на стр. 44—46 по отношению к рассмотренной там системе.

и пусть

$$M[u_{i,k}(x, y)] = v_{i,k}(x, y). \tag{4}$$

Допустим, что мы умеем разложить функцию $f(x, y)$ в ряд по функциям $v_{i,k}$

$$f(x, y) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} v_{i,k}(x, y), \tag{5}$$

тогда искомое решение граничной задачи можем формально написать в виде

$$u(x, y) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} u_{i,k}(x, y). \tag{6}$$

Укажем теперь способ нахождения функций $u_{i,k}(x, y)$. За них можно во многих случаях принять с успехом фундаментальные функции уравнения

$$L(u) = \lambda u, \tag{7}$$

при граничном условии $P(u) = 0$. Эти функции ортогональны между собой и образуют, вообще говоря, полную систему функций в данной области. Предположим, что подобные функции $u_{i,k}(x, y)$ и числа $\lambda_{i,k}$ найдены так, что

$$L(u_{i,k}) = \lambda_{i,k} u_{i,k}. \tag{8}$$

Тогда, если функция $f(x, y)$ разложена в ряд

$$f(x, y) = \sum_{i,k=1}^{\infty} A_{i,k} u_{i,k}(x, y), \tag{9}$$

то искомое решение $u(x, y)$ пишется в виде

$$u(x, y) = \sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{A_{i,k}}{\lambda_{i,k}} u_{i,k}(x, y). \tag{10}$$

Фундаментальные функции $u_{i,k}$ часто оказывается возможным отыскать по методу Фурье.

n° 2. Уравнение Пуассона для прямоугольника. Поставим следующую задачу: найти решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x, y), \tag{11}$$

обращающееся в нуль на границах некоторого прямоугольника

$$u = 0 \text{ при } x = 0; \quad y = 0$$
$$x = a \quad y = b. \tag{12}$$

В § 1 нами было приведено решение с помощью метода Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при произвольных граничных условиях. Это решение давало в известных случаях возмож-

ность найти решение и поставленной сейчас задачи относительно уравнения Пуассона. В этом n° мы даем с помощью двойных рядов решение задачи в общем случае при произвольной функции $f(x, y)$.

Поступая как сказано выше, ищем по методу Фурье фундаментальные функции уравнения

$$\Delta u = \lambda u.$$

Подставляя в него $u = X(x) \cdot Y(y)$, будем иметь:

$$X''Y + XY'' = \lambda XY$$

или

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \lambda,$$

для чего необходимо

$$\frac{X''}{X} = p; \qquad \frac{Y''}{Y} = q,$$

где p и q — постоянные. Определяя далее функции $X(x)$ и $Y(y)$ из этих уравнений и из граничных условий

$$X(a) = X(0) = 0; \qquad Y(b) = Y(0) = 0,$$

найдем, что нетривиальное решение существует только при условии

$$p = -\frac{m^2\pi^2}{a^2}; \qquad q = -\frac{n^2\pi^2}{b^2} \qquad [m = 1, 2, 3, \ldots; \; n = 1, 2, 3, \ldots]$$

и это решение будет именно

$$X_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a}; \qquad Y_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Функции

$$u_{m,n}(x, y) = X_m(x) \cdot Y_n(y) = \sin\frac{m\pi x}{a} \cdot \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{13}$$

образуют полную систему ортогональных функций в прямоугольнике $(0, a; 0, b)$. Далее

$$\Delta X_m Y_n = -\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) X_m Y_n. \tag{14}$$

Функцию $f(x, y)$ можем, вообще говоря, разложить в двойной ряд Фурье,[1] т. е. в ряд по функциям $u_{m,n}$:

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{15}$$

где

$$a_{m,n} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(\xi, \eta) \sin\frac{m\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi\eta}{b}\, d\xi\, d\eta. \tag{16}$$

[1] См. напр. И. Привалов, Ряды Фурье, § 27.

Тогда искомое решение u в виду (10) можно написать так:

$$u(x, y) = -\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{17}$$

Полученному решению (17) можно придать несколько иной вид.

Подставив в (17) вместо коэфициентов Фурье $a_{m,n}$ их выражения (16), получим:

$$u(x, y) = -\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{4 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) ab} \int_0^a\int_0^b f(\xi, \eta) \sin\frac{m\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi\eta}{b}\, d\xi d\eta =$$

$$= \int_0^a\int_0^b \left[-\frac{4}{\pi^2 ab} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{m\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi\eta}{b}}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\right] f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

Если рассмотреть отдельно стоящую в скобках функцию четырех переменных

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{4}{\pi^2 ab} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{m\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi\eta}{b}}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \tag{19}$$

то с помощью этой функции, от свободного члена не зависящей, решение задачи при любом свободном члене можем записать весьма просто:

$$u(x, y) = \int_0^a\int_0^b G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \tag{20}$$

Функцию $G(x, y; \xi, \eta)$ можно назвать функцией Грина для данной задачи. Относительно этой функции заметим, что ряд для нее сходится всегда и дает конечное значение, за исключением случая $\xi = x$; $\eta = y$, когда она оказывается бесконечной логарифмического порядка. Таким образом двойной интеграл, дающий $u(x, y)$, является вообще несобственным, однако подинтегральная функция наверное абсолютно интегрируема. Функция $G(x, y; \xi, \eta)$ представляет, с точностью до постоянного множителя, функцию Грина для прямоугольника.[1]

Заметим, что с помощью двойных тригонометрических рядов уравнение Пуассона может решаться для прямоугольника не только в случае задачи Дирихле, но и при других граничных условиях, например в случае задачи Неймана. Кроме того, с помощью двойных рядов могут

[1] См. Гурса, Курс математического анализа, т. III, ч. 1, стр. 191.

решаться граничные задачи для прямоугольника не только в случае уравнения Пуассона, но и для всех уравнений второго порядка эллиптического типа с постоянными коэфициентами, не содержащих смешанной производной и первых производных, т. е. для уравнений вида:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+cu=f(x,y). \tag{21}$$

n° 3. Применение к уравнениям четвертого порядка. Общие принципы применения двойных рядов к решению уравнений 4-го порядка остаются те же, поэтому мы ограничимся рассмотрением только двух частных задач.

1. Свободно закрепленная по краям прямоугольная пластинка. Диференциальное уравнение для прогиба ее есть:

$$N\cdot\Delta\Delta u=N\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)=p(x,y), \tag{22}$$

где $p(x,y)$ единичная нагрузка и граничные условия

$$u=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=0;\ x=a;\quad u=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ при } y=0;\ y=b. \tag{23}$$

Частный случай этой задачи при p постоянном был уже рассмотрен в n° 5, § 1. Основные функции, удовлетворяющие граничным условиям, здесь будут, как легко проверить:

$$\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \qquad [m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots].$$

Поэтому решение ищем в виде двойного ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Применяя операцию $N\Delta\Delta$ к одному члену, убеждаемся, что

$$N\Delta\Delta A_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}= \tag{24}$$

$$=N\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\pi^4 A_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

т. е. при подстановке в правую часть этот член приобретает множитель.

$$N\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2.$$

Это показывает, что коэфициенты Фурье $u(x,y)$ должны отличаться от коэфициентов Фурье $p(x,y)$ обратным множителем.

Таким образом, если

$$p(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{25}$$

то

$$u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{N\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{a^2}\right)^2}, \tag{26}$$

где

$$a_{m,n}=\frac{4}{ab}\int_0\int_0 p(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi d\eta. \tag{27}$$

Ряд для $u(x,y)$ будет наверное абсолютно сходящимся, и притом сходятся также ряды для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, служащие для определения моментов.

Рассмотрим в качестве примера изгиб под действием сосредоточенной силы величиной P, приложенной в точке $x=\xi$, $y=\eta$. Такую силу можно рассматривать как предельную для равномерной нагрузки интенсивности $\frac{P}{\delta^2}$, приложенной на промежутке $(\xi,\ \xi+\delta;\ \eta,\ \eta+\delta)$ при $\delta\to 0$. Найдем предел коэфициента $a_{m,n}$ при $\delta\to 0$. Имеем для данного случая, пользуясь теоремой в среднем

$$a_{m,n}=\frac{4}{ab}\int_{\xi}^{\xi+\delta}\int_{\eta}^{\eta+\delta}\frac{P}{\delta^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy= \tag{28}$$

$$=\frac{4}{ab}\frac{P}{\delta^2}\sin\frac{m\pi}{a}(\xi+\theta\delta)\sin\frac{n\pi}{b}(\eta+\theta_1\delta)\cdot\delta^2\to\frac{4P}{ab}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}.$$

Таким образом прогиб под действием сосредоточенной силы P в точке $(\xi,\ \eta)$ дается рядом

$$u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4P}{N\pi^4 ab}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \tag{29}$$

Отметим, что для $u(x,y)$ и здесь имеем сходящийся ряд и предельный переход в $u(x,y)$ был допустим; однако, если бы заменили $a_{m,n}$ на его предельное значение в ряде для $p(x,y)$, мы получили бы расходящийся ряд, но в переходе к пределу в этом ряде мы не нуждались.

Подставим выражение (27) коэфициента $a_{m,n}$ в решение $u(x,y)$, тогда мы его можем представить в виде

$$u(x,y)=\int_0^a\int_0^b\left[\frac{4}{N\pi^4 ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\right]p(\xi,\eta)\,d\eta d\xi. \tag{30}$$

Или если обозначить стоящую в скобках функцию четырех переменных через $G(x, y, \xi, \eta)$, то

$$u(x, y) = \int_0^a \int_0^b G(x, y, \xi, \eta)\, p(\xi, \eta)\, d\eta d\xi. \tag{31}$$

Функция $G(x, y, \xi, \eta)$ называется функцией Грина для данной задачи; с помощью этой функции может быть получено в написанном виде решение для любого вида свободного члена, т. е. для любой нагрузки. Эта функция представляет, как убеждаемся, сравнивая с (29), прогиб для случая единичной силы $P = 1$, приложенной в точке (ξ, η), поэтому и естественно, что прогиб под нагрузкой интенсивности $p(x, y)$ дается формулой (31). Действительно, прогиб в точке (x, y) под действием силы $p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$, приложенной в точке (ξ, η), будет равен согласно (29)

$$G(x, y, \xi, \eta)\, p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

а потому прогиб под действием всей нагрузки интенсивности $p(\xi, \eta)$ дается интегралом (31).

С помощью двойных рядов может решаться бигармоническое уравнение и при различных других условиях. Примеры таких решений в применении к безбалочным перекрытиям можно найти в книге Леве.[1] Следует заметить, однако, что получение окончательных результатов при помощи двойных рядов требует весьма значительных вычислений.

2) Прямоугольная пластинка на упругом основании. Ее уравнение отличается от обычного уравнения пластинки тем, что к нагрузке добавляется со знаком минус реакция основания, пропорциональная прогибу, а потому уравнение будет

$$N \Delta\Delta u = p(x, y) - kNu$$

или

$$N\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + ku\right) = p(x, y).$$

Граничные условия и нагрузку примем соответствующие случаю бесконечного безбалочного перекрытия.

Перекрытие представляет бесконечную плиту, в которую на определенных расстояниях опираются колонны (рис. 3). В основаниях колонн на плиту действует, поэтому, на определенном прямоугольнике, равномерная нагрузка интенсивности p. Относительно линий раздела между колоннами должна быть полная симметрия, т. е. u является относительно этих линий четной функцией, а потому граничные условия для u будут:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \text{ при } x = \pm a; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \text{ при } y = \pm b.$$

При решении задачи достаточно, очевидно, ограничиться прямоугольником $(-a, a; -b, b)$.

[1] Д. Леве, Безбалочные перекрытия. Ленинград 1931.

Правая часть — интенсивность нагрузки $p(x, y)$ есть функция, равная p в прямоугольнике $(-a\alpha, a\alpha; -b\beta, b\beta)$ и нулю в остальном.

За фундаментальные решения, в виду четности искомой функции u, следует принять

$$\cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \qquad [m, n = 0, 1, 2, \ldots],$$

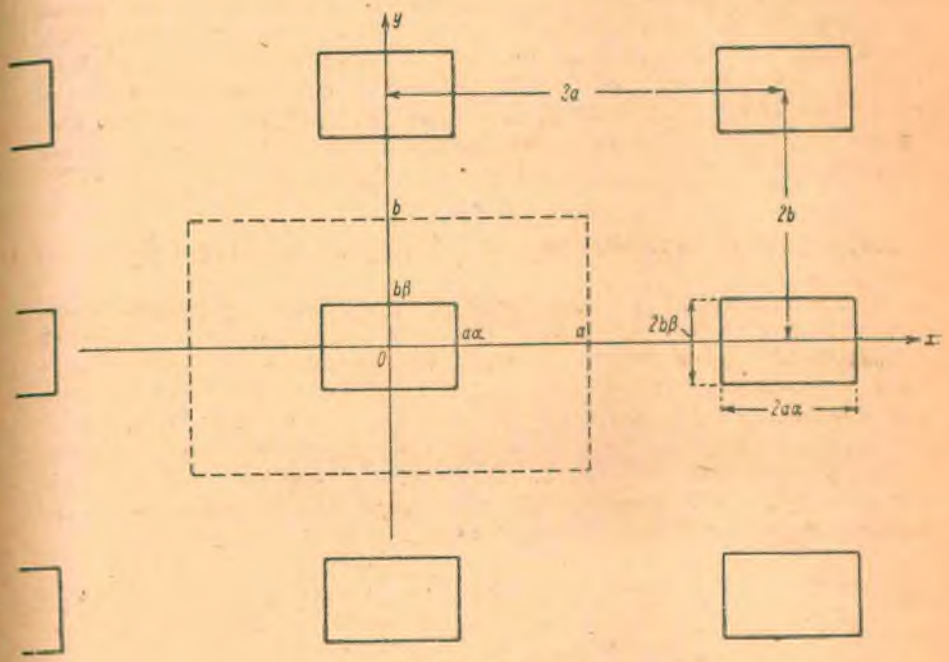


Рис. 3.

так как для этих функций граничные условия очевидно удовлетворены.

Так же как и в предыдущем случае найдем, что, если $a_{m,n}$ коэффициенты $p(x, y)$ в разложении по этим функциям, т. е. если

$$p(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \cos\frac{m\pi x}{a} \cdot \cos\frac{n\pi y}{b},$$

то

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{N\left[\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 + \frac{k}{N}\right]}.$$

Для разложения функции $p(x, y)$ в ряд ее удобно в данном случае предоставить в виде произведения функции от одного x на функцию от y.

Очевидно $$p(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y),$$

где $\varphi(x)$ — функция, равная $\sqrt{p}$ в $(-a\alpha, a\alpha)$ и нулю в остальном, а $\psi(y)$ равна $\sqrt{p}$ в $(-b\beta, b\beta)$ и нулю в остальном. Разлагая эти функции в ряд по косинусам, имеем:

$$c_m = \frac{2}{a}\int_0^{a\alpha} \sqrt{p}\cos\frac{m\pi x}{a}\,dx = \sqrt{p}\left[\frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{a}\right]_0^{a\alpha} = \frac{2\sqrt{p}}{m\pi}\sin m\pi\alpha,$$

$$[m = 1, 2, 3, \ldots]$$

$$c_0 = \frac{2}{a}\int_0^{a\alpha} \sqrt{p}\,dx = 2\sqrt{p}\alpha,$$

и следовательно

$$\varphi(x) = \sqrt{p}\alpha + 2\sqrt{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\alpha}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{a},$$

аналогично

$$\psi(y) = \sqrt{p}\beta + 2\sqrt{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\beta}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Тогда

$$p(x, y) = \varphi(x)\psi(y) = p\alpha\beta + 2p\beta\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\alpha}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{a} +$$

$$+ 2p\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\beta}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{b} +$$

$$+ \frac{4p}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\alpha \sin n\pi\beta \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}}{m\cdot n}.$$

Наконец

$$u(x, y) = \frac{p\alpha\beta}{kN} + \frac{2p\beta}{N}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\alpha\cos\frac{m\pi x}{a}}{m\pi\left[\pi^4\left(\frac{m}{a}\right)^4 + k\right]} +$$

$$+ \frac{2p\alpha}{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\beta\cos\frac{n\pi^4}{b}}{n\pi\left[\pi^4\left(\frac{n}{b}\right)^4 + k\right]} +$$

$$+ \frac{4p}{\pi^2 N}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\alpha\cdot\sin n\pi\beta}{mn\left\{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\pi^4 + k\right\}}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Заметим, что с помощью двойных тригонометрических рядов могут

с успехом решаться вообще граничные задачи для прямоугольника в случае уравнений вида

$$A\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + B\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} + C\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Fu = f(x, y),$$

где A, B, C, D, E, F постоянные и $B^2 - 4AC < 0$.

§ 5. Улучшение сходимости рядов, получаемых при решении

n° 1. Общие принципы, на которых основаны методы улучшения сходимости. Простейшие примеры. При приближенном решении многих задач анализа случается часто, что данный процесс, чаще всего ряд, оказывается сходящимся весьма медленно, что делает его почти, а иногда совсем, непригодным для действительного получения решения. Такая медленная сходимость вызывается обычно наличием особенности в данной задаче. Общий метод для уничтожения медленной сходимости состоит в выделении особенности.

Рассмотрим его раньше на одной более простой задаче — вычислении суммы медленно сходящихся рядов, с постоянными членами.

1) Пусть нам требуется например определить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots$$

Для непосредственного нахождения суммы этого ряда с точностью 0,001 нужно взять в нем 1000 членов. Поступим иначе: выделим из общего члена низшие степени $\frac{1}{n}$, вызывающие медленную сходимость. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4(n^2+1)}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^6}.$$

Первые два ряда, медленно сходящиеся, как известно, суммируются точно и имеют сумму $\frac{\pi^2}{6}$ и $\frac{\pi^4}{90}$, последний сходится столь быстро, что для вычисления его суммы ограничиваемся 4 членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{80} + \frac{1}{810} + \frac{1}{4352} \cong 0{,}514.$$

Окончательно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90} + 0{,}514 = 1{,}078.$$

Для улучшения сходимости в данном случае и в других аналогичных, когда общий член есть рациональная функция, можно было бы вместо рядов

$\sum \frac{1}{n^2}$ и $\sum \frac{1}{n^4}$ воспользоваться следующими, еще более элементарными

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18}.$$

Так выделяя последовательно из общего члена данного ряда члены выше написанных рядов с соответственно подобранными коэфициентами, имеем:

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{n-1}{(n^2+1)(n^2+n)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{n-3}{(n^2+n)(n+2)(n^2+1)}.$$

Первые два ряда дают в сумме $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, сумму последнего находим приближенно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{(n^2+n)(n+2)(n^2+1)} \cong -\frac{2}{12} - \frac{1}{120} + \frac{1}{2040} + \frac{2}{5460} \cong -0{,}174,$$

и окончательно сумма ряда будет равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{5}{4} - 0{,}174 = 1{,}076.$$

Почти в такой же форме этот метод улучшения сходимости был предложен еще в 1730 году Стирлингом.

n° 2. Метод улучшения сходимости тригонометрических рядов акад. А. Н. Крылова. Всякая функция, удовлетворяющая так называемым условиям Дирихле, имеет, как известно, сходящийся ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx);$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Однако коэфициенты a_n и b_n, вообще говоря, уменьшаются не быстро, и тогда ряд Фурье сходится медленно, а потому часто мало удобен для представления функции. Ряд Фурье будет быстро сходящимся, если сама функция $f(x)$ и некоторое число ее первых производных

[1] А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, Гл. VI. Ленинград 1932.

непрерывны и периодичны. В самом деле, пусть например $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ и $f'''(x)$ непрерывны и периодичны, а $f^{(IV)}(x)$ интегрируема. Обозначим через a_n и b_n коэфициенты Фурье $f(x)$; $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$ — $f'(x)$; $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$ — $f''(x)$; $a_n^{(3)}$, $b_n^{(3)}$ — $f'''(x)$; $a_n^{(4)}$, $b_n^{(4)}$ — $f^{(IV)}(x)$.

Интегрируя по частям выражения для a_n и b_n и пользуясь периодичностью $f(x)$, получим:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \left[\frac{1}{\pi} f(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = -\frac{b_n^{(1)}}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \left[-\frac{1}{\pi} f(x)\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{a_n^{(1)}}{n}.$$

Применяя далее те же формулы последовательно для $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, найдем:

$$a_n = -\frac{b_n^{(1)}}{n} = -\frac{a_n^{(2)}}{n^2} = \frac{b_n^{(3)}}{n^3} = \frac{a_n^{(4)}}{n^4};$$

$$b_n = \frac{a_n^{(1)}}{n} = -\frac{b_n^{(2)}}{n^2} = -\frac{a_n^{(3)}}{n^3} = \frac{b_n^{(4)}}{n^4}.$$

Числа $a_n^{(4)}$ и $b_n^{(4)}$, как коэфициенты Фурье интегрируемой функции, стремятся к нулю при $n \to \infty$, а потому ряд Фурье для $f(x)$ сходится в этом случае быстрее, чем ряд $\sum \frac{1}{n^4}$.[1]

Итак для того, чтобы иметь быстро сходящийся ряд Фурье для функции, нужно добиться непрерывности ее и ее первых производных. Этого можно часто достигнуть, выделяя из данной элементарного вида функцию, имеющую те же разрывы и такую, что и ее первые производные имеют те же разрывы, что и первые производные данной функции.

Построение такого рода функций совершается весьма элементарно. Исходим из известного и легко проверяемого разложения, когда разрывы данной функции и ее первых производных имеют простой характер.

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{-\pi - x}{2} & \text{при } -2\pi < x < 0 \\ \frac{\pi - x}{2} & \text{при } 0 < x < 2\pi, \\ 0 & x = 0,\ 2\pi,\ -2\pi \end{cases}$$

[1] Если $f^{(IV)}x$ — функция ограниченной вариации (в частности, если она удовлетворяет условию Дирихле) то ее коэфициенты Фурье имеют порядок $\frac{1}{n}$ и ряд для $f(x)$ сходится, как $\sum \frac{1}{n^5}$.

которое дает периодическую функцию, терпящую разрыв со скачком величиной π в точке $x=0$:

$$\sigma(+0)-\sigma(-0)=\pi,$$

и в остальном линейную. Функцию того же вида, но имеющую разрыв не при $x=0$, а при некотором $x=x_0$, $(0<x_0<2\pi)$ представляет функция $\sigma(x-x_0)$. Последняя функция определяется равенствами

$$\sigma(x-x_0)=\begin{cases}\dfrac{-\pi+(x_0-x)}{2} & 0\leqslant x<x_0\\ \dfrac{\pi+(x_0-x)}{2} & x_0<x\leqslant 2\pi,\\ 0 & x=x_0\end{cases}$$

и ряд Фурье для нее будет:

$$\sigma(x-x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-x_0)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx_0\sin nx-\sin nx_0\cos nx}{n}.$$

Для того чтобы получить элементарного вида функцию, имеющую разрыв в первой производной, интегрируем почленно ряд для функции $\sigma(x)$; найдем

$$\int_0^x\sigma(x)\,dx=-\frac{(\pi-x)^2}{4}+\frac{\pi^2}{4}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-\cos nx}{n^2}\right]_0^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2};\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

Так как $\sum\frac{1}{n^2}$ оказывается свободным членом ряда Фурье функции, стоящей слева, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\pi^2}{4}-\frac{(\pi-x)^2}{4}\right]dx=\frac{\pi^2}{6}.$$

Вводим поэтому окончательно периодическую функцию

$$\sigma_1(x)=\int_0^x\sigma(x)\,dx-\frac{\pi^2}{6}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{(\pi+x)^2}{4} & -2\pi\leqslant x\leqslant 0\\ \dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{(\pi-x)^2}{4} & 0\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases}$$

для которой, очевидно,

$$\sigma_1'(+0)-\sigma_1'(-0)=\pi.$$

Так же, как и для $\sigma(x)$, можно ввести функцию $\sigma_1(x-x_0)$, производная которой имеет скачок величиной π в точке $x=x_0$. Интегрируя

еще раз, введем периодическую функцию

$$\sigma_2(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\frac{3\pi x^2-2\pi^2x-x^3}{12}\qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi,$$

имеющую скачок во второй производной в точке $x=0$. Таким же образом можем построить и дальнейшие функции $\sigma_s(x)$.

Пусть теперь $f(x)$ функция, имеющая ограниченные производные k-го порядка, причем эти производные непрерывны всюду за исключением конечного числа точек, где они имеют разрыв 1-го рода. Производная $(k+1)$-го порядка удовлетворяет условию Дирихле. Пусть точки разрыва функции $f(x)$ есть $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{m_0}^{(0)}$, а величины скачков:

$$h_s=f(x_s^{(0)}+0)-f(x_s^{(0)}-0)\qquad (s=1,2,\ldots,m_0).$$

Пусть у j-ой производной имеются разрывы в точках $x_1^{(j)},\ldots,x_{m_j}^{(j)}$ величиной

$$h_s^{(j)}=f^{(j)}(x_s^{(j)}+0)-f^{(j)}(x_s^{(j)}-0)\quad (s=1,2,\ldots,m_j;\ j=1,2,\ldots,k).$$

Мы можем теперь функцию $f(x)$ представить в форме:

$$f(x)=\sum_{s=1}^{m_0}\frac{1}{\pi}h_s\sigma(x-x_s^{(0)})+\sum_{s=1}^{m_1}\frac{1}{\pi}h_s^{(1)}\sigma_1(x-x_s^{(1)})+\ldots+$$

$$+\sum_{s=1}^{m_k}\frac{1}{\pi}h_s^{(k)}\sigma_k(x-x_s^{(k)})+\varphi(x).$$

Функция $\varphi(x)$ при этом будет уже непрерывна вместе с k первыми производными, а $(k+1)$-ая ее производная удовлетворяет условию Дирихле. Проверим, например, что $\varphi(x)$ непрерывна. Сомнение могут вызывать только точки $x_s^{(0)}$, но в такой точке все члены непрерывны за исключением $f(x)$ и $\frac{1}{\pi}h_s\sigma(x-x_s^{(0)})$. Однако разность двух последних функций все же непрерывна, так как, сравнивая пределы справа и слева, имеем:

$$\left[f(x_s^{(0)}+0)-\frac{1}{\pi}h_s\sigma(x_s^{(0)}+0-x_s^{(0)})\right]-$$

$$-\left[f(x_s^{(0)}-0)-\frac{1}{\pi}h_s\sigma(x_s^{(0)}-0-x_s^{(0)})\right]=$$

$$=f(x_s^{(0)}+0)-f(x_s^{(0)}-0)-\frac{1}{\pi}h_s[\sigma(+0)-\sigma(-0)]=0.$$

Итак рассмотренная разность непрерывна, а потому и $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_s^{(0)}$.

Аналогичным образом можно убедиться и в непрерывности k первых производных функции $\varphi(x)$, наконец $(k+1)$-ая ее производная совпадает с $f^{(k+1)}(x)$ и удовлетворяет условию Дирихле. Поэтому ряд Фурье для функции $\varphi(x)$

$$\varphi(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$$

будет сходиться весьма быстро, именно α_n и β_n будут порядка $\frac{1}{n^{k+2}}$.

Ряд Фурье для функции $f(x)$, если принять во внимание ряды для $\sigma(x)$, $\sigma_1(x)$, и т. д., будет:

$$f(x)=\sum_{s=1}^{m_0}\frac{1}{\pi}h_s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-x_s^{(0)})}{n}-\sum_{s=1}^{m_1}\frac{1}{\pi}h_s^{(1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x-x_s^{(1)})}{n^2}-$$

$$-\sum_{s=1}^{m_2}\frac{1}{\pi}h_s^{(2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-x_s^{(2)})}{n^3}+\ldots+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx).$$

Мы выделили таким образом из ряда Фурье функции $f(x)$ медленно сходящиеся части, которые элементарно суммируются, и в остатке получили быстро сходящийся ряд.

Чаще впрочем приходится решать задачу в обратном порядке. Именно часто мы, не имея самой функции, получаем тем или иным способом ее ряд Фурье, обычно в результате решения какой-либо задачи математической физики. Во многих случаях оказывается, что этот ряд медленно сходится, тогда он весьма мало пригоден для вычисления значений самой функции, для нахождения же ее производных он вовсе непригоден, так как для них получаются из него расходящиеся ряды. В этом случае можно, что удается весьма часто, не обращаясь к порождающей функции, в самом ряде провести улучшение сходимости. Это удобнее всего осуществить, выделяя медленно сходящиеся части из ряда и суммируя их, на основании известных рядов для $\sigma(x-x_0)$, $\sigma_1(x-x_0)$ и т. д. Разберем два примера.

1) Рассмотрим ряд

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots$$

Его можно преобразовать так:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{2}\frac{\sin nx}{n}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-\pi)}{n}=\frac{1}{2}\sigma(x)-\frac{1}{2}\sigma(x-\pi).$$

Мы видим, что в данном случае этот способ дал возможность просуммировать ряд до конца. Именно, если воспользуемся выражением $\sigma(x)$, то найдем, что сумма этого ряда равна

$$S(x)=\frac{1}{2}[\sigma(x)-\sigma(x-\pi)]=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\frac{\pi-x}{2}-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{4} & \text{при } 0<x<\pi\\ \frac{1}{2}\left[\frac{\pi-x}{2}-\frac{2\pi-x}{2}\right]=-\frac{\pi}{4} & \text{при } \pi<x<2\pi\\ 0 & x=0,\ \pi,\ 2\pi.\end{cases}$$

2) Пусть дан ряд Фурье

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\frac{\pi}{2}}{n^2-1}\sin nx\quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

Выделив из коэфициента низшие степени $\frac{1}{n}$, имеем:

$$\frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5-n^3}.$$

После подстановки этого выражения ряд Фурье разбивается на три:

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}\sin nx}{n}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^3}\sin nx-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^5-n^3}\sin nx.$$

Первые два ряда, пользуясь, как и в предыдущем примере, рядами для $\sigma(x)$ и $\sigma_2(x)$, можем просуммировать в конечном

виде:

$$S_1(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}\sin nx}{n} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\sigma\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

$$S_2(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}\sin nx}{n^3} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n^3} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\sigma_2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Пользуясь определением функции $\sigma(x)$ и $\sigma_2(x)$ и их периодичностью, находим легко

$$S_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x-\pi}{\pi} & \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \\ 0 & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$S_2(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{6\pi}+\frac{\pi}{24}x & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -\frac{(x-\pi)^3}{6\pi}+\frac{\pi}{24}(x-\pi) & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

И таким образом окончательно для функции $f(x)$ получаем

$$f(x) = S_1(x) + S_2(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^3(n^2-1)}\sin nx \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Это представление функции, конечно, во много раз более удобно, чем первоначальное, так как позволяет легко вычислять значения функции $f(x)$ и ее первых производных.

Заметим, что улучшение сходимости рядов Фурье может применяться не только по отношению к рядам Фурье рассмотренного вида, т. е. к рядам Фурье, которых порождающая функция ограничена со своими первыми производными, но и к рядам Фурье других функций. Однако тогда для суммирования медленно сходящихся частей вышеописанные ряды для $\sigma(x)$, $\sigma_1(x)$ и т. д. могут оказаться недостаточными. Во многих случаях здесь можно использовать ряд

$$\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots = -Re[\ln(1-e^{ix})] = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$$

и ряды, получающиеся аналогичным образом, например,

$$\frac{\cos 2x}{1\cdot 2}+\frac{\cos 3x}{2\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 4}+\ldots =$$

$$= (1-\cos x)\ln 2\sin\frac{x}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\sin x+\cos x.$$

С помощью этих рядов, и рядов, указанных прежде, может быть проведено улучшение сходимости во всяком ряде вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A\left(\frac{1}{n}\right)\sin nx_0+B\left(\frac{1}{n}\right)\cos nx_0\right)\sin nx+\right.$$

$$\left.+\left(C\left(\frac{1}{n}\right)\sin nx_0+D\left(\frac{1}{n}\right)\cos nx_0\right)\cos nx\right],$$

где $A\left(\frac{1}{n}\right)$, $B\left(\frac{1}{n}\right)$, $C\left(\frac{1}{n}\right)$, $D\left(\frac{1}{n}\right)$ — аналитические функции от $\frac{1}{n}$ для малых значений аргумента.

n° 3. Ряды Фурье с усиленной сходимостью. Как было указано в предыдущем n°, периодическая функция, имеющая $(k-1)$ производных непрерывных и k-ую, удовлетворяющую условию Дирихле, имеет коэфициенты Фурье порядка $\frac{1}{n^{k+1}}$. Функция не периодическая, имеющая даже производные всех порядков внутри промежутка $(0, 2\pi)$, но такая, что она сама или одна из ее производных имеют различные значения при $x=0$ и $x=2\pi$, имеет медленно сходящееся разложение. А. С. Маневым[1] был предложен способ получения быстро сходящихся тригонометрических рядов, могущих служить для представления функций этого вида.

[1] А. С. Маневъ, Известия Акад. Наук СССР, 1932, стр. 1437; 1933, стр. 1113.

Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $(0, \pi)$ и имеет в нем непрерывные производные до $(k-1)$-го порядка и k-ую, удовлетворяющую условию Дирихле. Эта функция может быть разложена в ряд по $\sin 2nx$ и $\cos 2nx$, либо же она может быть разложена в ряд по одним $\sin nx$ или по одним $\cos nx$, что соответствует нечетному или четному ее продолжению на промежуток $(-\pi, 0)$. Эти ряды будут, однако, вообще говоря, сходиться медленно. Если мы не заинтересованы в специальном характере тригонометрического ряда, с помощью которого желаем представить $f(x)$, то мы можем продолжить ее на промежуток $(-\pi, 0)$ любым образом. Мы добьемся порядка $\frac{1}{n^{k+1}}$ в ее коэфициентах Фурье, если определим ее в промежутке $(-\pi, \pi)$ таким образом, чтобы, периодически продолжая ее на $(-\infty, +\infty)$, мы получили бы функцию, у которой существуют производные до k-го порядка и k-ая производная удовлетворяет условию Дирихле. Для осуществления такого продолжения достаточно $f(x)$ взять в промежутке $(-\pi, 0)$ равной $\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ полином $(2k-1)$-ой степени, который в точках 0 и $-\pi$ имеет вместе с производными до $(k-1)$-го порядка значения, равные соответствующим значениям $f(x)$ и ее производных при $x=0$ и $x=\pi$, именно

$$\varphi(0)=f(0) \qquad \varphi(-\pi)=f(\pi)$$
$$\varphi'(0)=f'(0) \qquad \varphi'(-\pi)=f'(\pi)$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$\varphi^{(k-1)}(0)=f^{(k-1)}(0) \qquad \varphi^{(k-1)}(-\pi)=f^{(k-1)}(-\pi).$$

Требуемый здесь полином $\varphi(x)$ удобнее всего искать в форме

$$\varphi(x)=(x+\pi)^k\left(A_0+A_1x+\ldots+\frac{A_{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1}\right)+$$
$$+x^k\left[B_0+B_1(x+\pi)+\ldots+\frac{B_{k-1}}{(k-1)!}(x+\pi)^{k-1}\right];$$

тогда коэфициенты $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}; B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}$ определяются, очевидно, из следующих двух систем уравнений:

$$\varphi(0)=\pi^kA_0=f(0),$$
$$\varphi'(0)=k\pi^{k-1}A_0+\pi^kA_1=f'(0),$$
$$\varphi''(0)=C_2^0k(k-1)\pi^{k-2}A_0+C_2^1k\pi^{k-1}A_1+C_2^2\pi^kA_2=f''(0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^{(k-1)}(0)=C_{k-1}^0k(k-1)\ldots2\pi A_0+C_{k-1}^1k(k-1)\ldots3\pi^2A_1+\ldots+$$
$$+C_{k-1}^{k-2}k\pi^{k-1}A_{k-2}+C_{k-1}^{k-1}\pi^kA_{k-1}=f^{(k-1)}(0)$$

$$\varphi(-\pi)=(-\pi)^kB_0=f(\pi),$$
$$\varphi'(-\pi)=k(-\pi)^{k-1}B_0+(-\pi)^kB_1=f'(\pi),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^{(k-1)}(-\pi)=C_{k-1}^0k(k-1)\ldots2(-\pi)B_0+$$
$$+C_{k-1}^1k(k-1)\ldots3(-\pi)^2B_1+\ldots+$$
$$+C_{k-1}^{k-1}(-\pi)^kB_{k-1}=f^{(k-1)}(\pi).$$

Если полином $\varphi(x)$ определен указанным способом, то функция

$$\psi(x)=\begin{cases} f(x) & 0\leqslant x\leqslant\pi \\ \varphi(x) & -\pi\leqslant x\leqslant 0 \end{cases},$$

продолженная дальше периодически, имеет $(k-1)$ непрерывных производных и k-ую, удовлетворяющую условию Дирихле. Ряд Фурье ее сходится как $\frac{1}{n^{k+1}}$, и так как в промежутке $(0, \pi)$ он дает функцию $f(x)$, то для последней мы и получили требуемое представление.

Пример. Построим быстро сходящийся ряд Фурье для функции

$$f(x)=x-\frac{\pi}{2}. \qquad 0\leqslant x\leqslant\pi$$

Желая получить сходимость порядка $\frac{1}{n^4}$, нужно принять $k=3$.

Система уравнений для данного случая принимает вид:

$$\pi^3A_0=-\frac{\pi}{2} \qquad -\pi^3B_0=\frac{\pi}{2}$$
$$3\pi^2A_0+\pi^3A_1=1 \qquad 3\pi^2B_0-\pi^3B_1=1$$
$$6\pi A_0+6\pi^2A_1+\pi^3A_2=0 \qquad -6\pi B_0+6\pi^2B_1-\pi^3B_2=0$$

Отсюда находим

$$A_0=-\frac{1}{2\pi^2}; \quad A_1=\frac{5}{2\pi^3}; \quad A_2=-\frac{12}{\pi^4};$$
$$B_0=-\frac{1}{2\pi^2}; \quad B_1=-\frac{5}{2\pi^3}; \quad B_2=-\frac{12}{\pi^4};$$

тогда

$$\varphi(x)=(x+\pi)^3\left(-\frac{1}{2\pi^2}+\frac{5}{2\pi^3}x-\frac{6}{\pi^4}x^2\right)+$$
$$+x^3\left[-\frac{1}{2\pi^2}-\frac{5}{2\pi^3}(x+\pi)-\frac{6}{\pi^4}(x+\pi)^2\right].$$

Разлагая теперь в ряд Фурье функцию

$$\psi(x)=\begin{cases} x-\dfrac{\pi}{2} & 0\leqslant x\leqslant\pi \\ \varphi(x) & -\pi\leqslant x\leqslant 0 \end{cases},$$

получим для $f(x)$ в промежутке $(0, \pi)$ требуемое разложение:

$$f(x)=\frac{240}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5\ldots}\left(\frac{1}{n^4}-\frac{12}{\pi^2 n^6}\right)\cos nx+\frac{1440}{\pi^4}\sum_{n=2,4,6\ldots}\frac{1}{n^5}\sin nx.$$

Этот метод улучшения сходимости может найти применение при решении задачи о разложении некоторой функции в ряд по данным функциям, не образующим ортогональную систему, задачи важной, как мы видели в § 3, для некоторых методов решения граничных задач. Пусть требуется разложить функцию $g(x)$ в промежутке $(0, \pi)$ по заданным функциям $f_n(x)$. Для нахождения коэфициентов такого разложения в § 3 был рассмотрен метод бесконечных систем уравнений. Если воспользоваться улучшением сходимости, то систему можем составить так. Продолжим функции $g(x)$ и $f_n(x)$ на $(-\pi, \pi)$ и составим для них быстро сходящиеся ряды:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$$f_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n^{(m)}\cos nx+\beta_n^{(m)}\sin nx).$$

Разыскивая тогда разложение $g(x)$ в виде

$$g(x)=A_1f_1(x)+A_2f_2(x)+\ldots,$$

получим, после подстановки рядов и приравнивания коэфициентов, систему уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_n^{(m)}A_m=a_n,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\beta_n^{(m)}A_m=b_n.$$

Эта система может оказаться более удобной для решения, чем составленная обычным способом, благодаря тому, что ее коэфициенты убывают гораздо быстрее.

n° 4. Общие методы улучшения сходимости при приближенном решении граничных задач. [1] Бесконечные ряды, которые мы находили при решении различных граничных задач, получались в результате известного преобразования ряда Фурье граничной функции. Именно,

[1] См. Л. В. Канторович, Труды Ленинград. Ин-та инж. пром. строит., т. I., в. 2, стр. 65; также Матем. Сборн., т. 41, в. 2, стр. 235 (1934).

коэфициенты ряда, дающего решение, определялись из коэфициентов Фурье граничной функции. Таким образом, для быстроты сходимости дающего решение, имеет существенное значение порядок коэфициентов Фурье граничной функции, т. е., в конечном счете, как мы видели в предшествующем n° 2, правильность граничной функции, точнее говоря, непрерывность ее и ее первых производных. Таким же образом и при решении с помощью двойных рядов уравнений с правой частью, например, $\Delta u=f(x, y)$; $\Delta\Delta u=f(x, y)$, в ряд, дающий решение, входят коэфициенты двойного ряда Фурье функции $f(x, y)$, и поэтому для того, чтобы обеспечить быструю сходимость, необходима регулярность функции $f(x, y)$.

Итак, для быстрой сходимости рядов, дающих решение, существенное, необходимое значение имеет регулярность самой задачи, именно существование и непрерывность первых производных: 1) у граничной функции, 2) у функции, стоящей в правой части. Как мы увидим ниже, выполнение этих двух условий является необходимым для быстрой сходимости и при других способах приближенного решения граничных задач, а не только при пользовании методом бесконечных рядов.

Изложенные соображения приводят к такой мысли. Вместо того, чтобы улучшать сходимость в рядах, получающихся в результате решения, поступить иначе, а именно: провести сначала предварительное, так сказать, „профилактическое“ улучшение поставленной граничной задачи, т. е. добиться выполнения двух вышеуказанных условий, а тогда ряды, получающиеся в результате решения, будут сами собой быстро сходящимися.

Общий прием для приведения задачи к регулярной состоит в следующем. Пусть речь идет о нахождении решения уравнения 2-го порядка эллиптического типа:

$$M[u(x, y)]=f(x, y),$$

обращающегося в данную функцию $\varphi(s)$ на контуре L, ограничивающем область D.

Будем искать функцию $u_0(x, y)$ такую, что

$$M[u_0(x, y)]=f_0(x, y),$$

$$u_0(x, y)=\varphi_0(s) \text{ на } L,$$

причем $f_0(x, y)$ и $\varphi_0(s)$ — любые функции, имеющие лишь те же особенности, что $f(x, y)$ и $\varphi(s)$, т. е. такие, что разности

$$f(x, y)-f_0(x, y)=f_1(x, y),$$

$$\varphi(s)-\varphi_0(s)=\varphi_1(s)$$

непрерывны вместе с некоторым числом первых производных. Если такая функция $u_0(x, y)$ построена, то, вводя новую неизвестную функцию

$$u_1(x, y)=u(x, y)-u_0(x, y),$$

имеем для ее нахождения уже регулярную задачу:

$$M[u_1(x, y)] = f_1(x, y),$$

$$u_1(x, y) = \varphi_1(s) \text{ на контуре } L.$$

После того как $u_1(x, y)$ будет найдена, добавляя известную функцию $u_0(x, y)$, получим искомое u. Отметим еще, что уничтожение особенностей в $f(x, y)$ и в $\varphi(s)$ можно производить последовательно. Именно, сначала можно уничтожить особенности в $f(x, y)$, при этом граничные данные могут измениться, а затем уничтожить особенности в граничной функции, но тогда, чтобы правая часть не изменилась, нужно искать $u_0(x, y)$, являющуюся решением однородного уравнения $M(u) = 0$. Дадим теперь приемы построения требуемой функции $u_0(x, y)$ для уничтожения особенностей того и другого вида.

1. Устранение особенностей в функции, заданной на контуре. Пусть функция $\varphi(s)$, заданная на контуре, имеет особые точки. Предположим, что она непрерывна вместе с несколькими первыми производными всюду, кроме отдельных точек, а именно: точек разрыва первого рода самой функции $\varphi(s)$ и угловых точек кривой $\sigma = \varphi(s)$, т. е. точек разрыва первого рода производной $\varphi(s)$ и т. п.

Пусть нам нужно устранить некоторую особенность функции $\varphi(s)$. Предположим для определенности, что в точке M_1, соответствующей $s = s_1$, она имеет разрыв первого рода со скачком

$$\varphi(s_1 + 0) - \varphi(s_1 - 0) = \sigma.$$

Возьмем простого вида область D_0, содержащую целиком данную область D и ограниченную некоторым контуром L_0, имеющим вблизи точки M_1 общую часть с контуром L. Задав на контуре L_0 простейшим образом граничные значения, образующие скачок величины σ в точке M_1, найдем в области D_0 решение уравнения $L(u_1) = 0$, удовлетворяющее этим условиям. Тогда беря для u_1 за контурные значения разность между $\varphi(s)$ и значениями $u_0(x, y)$ на L, мы и уничтожаем разрыв в точке M. Заметим, что требование общей части у контуров L и L_0 вблизи точки M_1 можно, с известными оговорками, заменить более слабым требованием, что в точке M_1 контур L_0 касается L.

В качестве области D_0 удобнее всего пользоваться: кругом, внешностью круга и полуплоскостью, соответствующим образом приставляя их к данному контуру.

Наиболее удобно этот прием провести в случае, когда оператор $M(u)$ есть оператор Лапласа Δu. В этом случае можно построить решения, регулярные во всех точках кроме одной и имеющие в ней данную особенность.

Пусть на контуре L точка M_1 есть точка разрыва первого рода $\varphi(s)$. Предположим, что в точке M_1 имеется касательная, и контур L вблизи M лежит по одну сторону касательной. Не ограничивая общности, можем

считать, что точка M_1 есть $(0, 0)$, а касательная есть ось ординат, и контур L (вблизи M_1) лежит вправо от нее. Тогда функция

$$U_0(x, y) = \frac{\sigma}{\pi} I(\ln z) = \frac{\sigma}{\pi} I[\ln(x + iy)] = \frac{\sigma}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$ [1]

есть регулярная гармоническая функция всюду кроме начала координат; в начале координат при движении вдоль контура L она претерпевает разрыв первого рода со скачком σ. Действительно,

$$y < 0 \qquad \lim_{\substack{y \to 0 \\ x \to 0}} \frac{\sigma}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\sigma}{\pi} \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\sigma}{2};$$

$$y > 0 \qquad \lim_{\substack{y \to 0 \\ x \to 0}} \frac{\sigma}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\sigma}{\pi} \operatorname{arctg} \infty = \frac{\sigma}{2};$$

так как $x > 0$ и x представляет бесконечно малую высшего порядка по сравнению с y при приближении по кривой L. Таким образом $U_0(x, y)$ имеет скачок величиной σ на кривой L, и вычитая эту функцию, мы уничтожаем соответствующий разрыв у $\varphi(s)$. Таким же образом может быть удален и разрыв в производной, только здесь нужно воспользоваться функцией:

$$U_0^*(x, y) = -\frac{\sigma^*}{\pi} \operatorname{Re}\{(x + iy)[\ln(x + iy) - 1]\} =$$

$$= -\frac{\sigma^*}{\pi}\left[x(\ln\sqrt{x^2 + y^2} - 1) - y \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right].$$

Эта функция $U_0^*(x, y)$ имеет в начале координат разрыв в производной по дуге контура L со скачком величины σ^*. Нужно, правда, для установления этого потребовать, что касательная к контуру L непрерывно меняется вблизи M_1 и что $\lim xy^{-1} \ln y = 0$. Второе из этих условий наверное выполнено, если в точке M_1 конечна кривизна кривой L. Вычитая функцию $U_0^*(x, y)$, мы можем устранить скачок величины σ^* в производной. Таким образом всегда (при сделанных выше предположениях) разрывы в самой контурной функции и ее производной по дуге могут быть устранены, в случае граничной задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = f(x, y)$, с помощью функций $U_0(x, y)$ и $U_0^*(x, y)$.

Заметим, что на самой оси ординат контурные значения функций $U_0(x, y)$ и $U_0^*(x, y)$ при приближении со стороны правой полуплоскости будут соответственно

$$U_0(0, y) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} & y > 0 \\ 0 & y = 0 \\ -\frac{\sigma}{2} & y < 0 \end{cases} \qquad U_0^*(0, y) = \begin{cases} \frac{\sigma^*}{2} y & y \geqslant 0 \\ -\frac{\sigma^*}{2} y & y \leqslant 0. \end{cases}$$

[1] $I(\ln z)$ обозначает мнимую часть $\ln z$.

Это показывает, что и в случае, когда вблизи точки M_1 контур имеет участок прямой, можно пользоваться для уничтожения особенности функциями $U_0(x, y)$ и $U_0^*(x, y)$.

Не трудно построить также и функции, дающие возможность устранять разрывы в производных высшего порядка.

Рассмотрим теперь применение изложенного метода к двум частным областям, именно кругу и кольцу.

1. Задача Дирихле для круга. Требуется найти функцию, гармоническую в круге $x^2+y^2 \leqslant R^2$ и обращающуюся на контуре в данную функцию $\varphi(\theta)$. Решение задачи дается, как мы знаем, в виде интеграла Пуассона или ряда

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\lambda) + r^2}\varphi(\lambda)\,d\lambda =$$

(*)

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n,$$

где a_n и b_n — коэфициенты Фурье функции $\varphi(\theta)$. Предположим, что функция $\varphi(\theta)$ имеет особую точку; пусть для определенности это будет разрыв со скачком σ при $\theta = 0$. Тогда коэфициенты Фурье функции $\varphi(\theta)$—a_n и b_n будут порядка $\frac{1}{n}$, и написанный выше ряд, дающий решение, для вычислений не пригоден, также мало удобно здесь и вычисление интеграла. Следуя указанному методу, мы должны вычесть из $u(x, y)$ функцию $U_0(x, y)$, которую нужно приспособить к точке $(R, 0)$. Таким образом нужно заменить в ней x на $R-x$ и взять именно функцию

$$\frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{R-x}.$$

Обозначим через $\varphi_0(\theta)$ ее контурные значения, тогда, вводя

$$x = R\cos\theta,\ y = R\sin\theta,$$

найдем

$$\varphi_0(\theta) = \frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{R\sin\theta}{R - R\cos\theta} = \frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sigma}{\pi}\frac{\pi-\theta}{2} \text{ для } 0<\theta<2\pi.$$

Ряд Фурье для функции $\varphi_0(\theta)$ будет:

$$\varphi_0(\theta) = \frac{\sigma}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}.$$

Теперь нужно определить гармоническую функцию $u(r, \theta)$ по контурной функции

$$\varphi_1(\theta) = \varphi(\theta) - \varphi_0(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) - \frac{\sigma}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$$

и к полученной функции $u_1(r, \theta)$ добавить

$$U_0(x, y) = \frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{R-x} = \frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{r\sin\theta}{R - r\cos\theta}.$$

В данном случае применение приема улучшения свелось по существу к тому, что мы выделили из ряда (*) медленно сходящуюся часть

$$\frac{\sigma}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

и просуммировали ее в конечном виде, т. е. провели улучшение сходимости тригонометрического ряда.

Таким образом, в данном простейшем случае метод улучшения граничных условий эквивалентен улучшению сходимости тригонометрических рядов.

Аналогичным образом, если при $\theta = 0$ функция $\varphi(\theta)$ имеет скачок в первой производной величины σ^*, то нужно из функции $u(x, y)$ вычесть функцию $U^*_0(x, y)$, в которой x заменено на $R-x$, т. е. вычесть

$$-\frac{\sigma^*}{\pi}\left[(R-x)\left(\ln\sqrt{(R-x)^2+y^2}-1\right) - y\operatorname{arctg}\frac{y}{R-x}\right] =$$

$$= -\frac{\sigma^*}{\pi}\operatorname{Re}\left[(R-x+iy)\left(\ln(R-x+iy)-1\right)\right].$$

В таком случае из контурной функции надо будет вычесть функцию $\varphi_0^*(\theta)$, получающуюся из вышенаписанной при подстановке $x = R\cos\theta$; $y = R\sin\theta$

$$\varphi_0^*(\theta) = -\frac{\sigma^*}{\pi}\left[R(1-\cos\theta)\left(\ln R\sqrt{2-2\cos\theta}-1\right) - \frac{\pi-\theta}{2}R\sin\theta\right] =$$

$$= -\frac{\sigma^*}{\pi}\operatorname{Re}\left[(R - Re^{-i\theta})\left(\ln(R-Re^{-i\theta})-1\right)\right].$$

2. Задача Дирихле для кольца. Функция, гармоническая в кольце $R_1 < r < R_2$ и обращающаяся на окружностях $r = R_1$ и $r = R_2$ в заданные функции $\varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2(\theta)$, может быть дана, как известно § 1, п° 4), в виде ряда:

$$(**)\qquad u = \frac{a_0^{(1)} - a_0^{(2)}}{2(\lg R_1 - \lg R_2)}\lg r + \frac{a_0^{(1)}\lg R_2 - a_0^{(2)}\lg R_1}{2(\lg R_2 - \lg R_1)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(a_k^{(1)}R_2^{-k} - a_k^{(2)}R_1^{-k})r^k + (a_k^{(1)}R_2^{k} - a_k^{(2)}R_1^{k})r^{-k}}{R_1^{k}R_2^{-k} - R_1^{-k}R_2^{k}}\cdot\cos k\theta + \right.$$

$$\left.+\frac{(\beta_k^{(1)}R_2^{-k} - \beta_k^{(2)}R_1^{-k})r^k + (\beta_k^{(1)}R_2^{k} - \beta_k^{(2)}R_1^{k})r^{-k}}{R_1^{k}R_2^{-k} - R_1^{-k}R_2^{k}}\cdot\sin k\theta\right].$$

Здесь $\alpha_k^{(1)}$ и $\beta_k^{(1)}$ — коэфициенты Фурье $\varphi_1(\theta)$, а $\alpha_k^{(2)}$ и $\beta_k^{(2)}$ — $\varphi_2(\theta)$. Сходимость вблизи окружностей $r=R_1$ и $r=R_2$ будет здесь та же, что и у тригонометрических рядов функций $\varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2(\theta)$, т. е. весьма медленная, если функции φ_1 и φ_2 имеют особенности.

В данном случае мы не будем проводить улучшение порядка сходимости, уничтожая отдельные особые точки, а уничтожим в один прием все особенности следующим образом. Составим две функции: $u_1^*(r,\theta)$ — решение задачи Дирихле для внешности круга радиуса $r=R_1$ при контурных значениях $\varphi_1(\theta)$, и $u_2^*(r,\theta)$ — решение задачи Дирихле для внутренности круга радиуса $r=R_2$ при граничной функции $\varphi_2(\theta)$:

$$u_1^*(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-R_1^2}{R_1^2-2rR_1\cos(\theta-\lambda)+r^2}\varphi_1(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\frac{\alpha_0^{(1)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(1)}\cos k\theta+\beta_k^{(1)}\sin k\theta)\left(\frac{R_1}{r}\right)^k;$$

$$u_2^*(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R_2^2-r^2}{R_2^2+2rR_2\cos(\theta-\lambda)+r^2}\varphi_2(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\frac{\alpha_0^{(2)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(2)}\cos k\theta+\beta_k^{(2)}\sin k\theta)\left(\frac{r}{R_2}\right)^k.$$

Вычтем их из функции $u(r,\theta)$, тогда для разности

$$v(r,\theta)=u(r,\theta)-u_1^*(r,\theta)-u_2^*(r,\theta)$$

контурные условия будут:

$$v(R_1,\theta)=-\frac{\alpha_0^{(2)}}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(2)}\cos k\theta+\beta_k^{(2)}\sin k\theta)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k,$$

$$v(R_2,\theta)=-\frac{\alpha_0^{(2)}}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(1)}\cos k\theta+\beta_k^{(1)}\sin k\theta)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k.$$

Для определения функции $v(r,\theta)$ мы получили задачу того же вида, что ранее для $u(r,\theta)$, но здесь коэфициенты Фурье контурной функции имеют по крайней мере порядок прогрессии $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k$, поэтому ряд (**) для функции $v(r,\theta)$ будет сходиться наверное, как прогрессия с знаменателем $\frac{R_1}{R_2}$. Это будет именно ряд:

$$v(r,\theta)=-\frac{\alpha_0^{(2)}-\alpha_0^{(1)}}{2(\lg R_1-\lg R_2)}\lg r-\frac{\alpha_0^{(2)}\lg R_2-\alpha_0^{(1)}\lg R_1}{2(\lg R_2-\lg R_1)}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha_k^{(2)}R_2^{-k}-\alpha_k^{(1)}R_1^{-k})r^k-(\alpha_k^{(2)}R_2^{k}-\alpha_k^{(1)}R_1^{k})r^{-k}}{R_1^{k}R_2^{-k}-R_1^{-k}R_2^{k}}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k\cos k\theta-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\beta_k^{(2)}R_2^{-k}-\beta_k^{(1)}R_1^{-k})r^k-(\beta_k^{(2)}R_2^{k}-\beta_k^{(1)}R_1^{k})r^{-k}}{R_1^{k}R_2^{-k}-R_1^{-k}R_2^{k}}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k\sin k\theta.$$

В том, что этот ряд сходится как геометрическая прогрессия с знаменателем $\frac{R_1}{R_2}$, можно убедиться и непосредственно.

После того как функция $v(r,\theta)$ найдена, добавив к ней $u_1^*(r,\theta)$ и $u_2^*(r,\theta)$, получим $u(r,\theta)$; что касается функций $u_1^*(r,\theta)$ и $u_2^*(r,\theta)$, то при их нахождении, с помощью ряда или интеграла Пуассона, можно применить указанные выше приемы улучшения сходимости для круга, в простейших же случаях они найдутся в конечном виде.

Изложенный здесь прием применим не только для кольца, но и для других многосвязных областей, и позволяет переходить от неаналитических к аналитическим контурным условиям.

II. Устранение особенностей в правой части. Уничтожение особенностей функции $f(x,y)$ может быть проведено с помощью приемов, построенных на тех же принципах, что и выше. Не входя в подробности, укажем два подобных приема.

1) Пусть функция $f(x,y)$ или ее частные производные имеют разрывы. Выделим функцию $f_0(x,y)$ простого вида и такую, что разность $f(x,y)-f_0(x,y)$ непрерывна вместе со своими первыми частными производными. Функцию $f_0(x,y)$ продолжим в некоторую простого вида область D_0, содержащую D; пусть получившаяся функция есть $f_0^*(x,y)$. Для этой функции решим уравнение $M(u)=f_0^*$ в области D_0 при любых граничных условиях; это решение и даст требуемую функцию $U_0(x,y)$.

Область D_0 желательно брать такую, для которой мы можем решить уравнение $M(u)=f$ с любым свободным членом. Например, для уравнения Пуассона можно брать прямоугольник. Тогда для нахождения разности $u_1=u-u_0$ получится задача с регулярной правой частью. За функцию $f_0(x,y)$ можно взять, в частности, самую функцию $f(x,y)$, тогда для u_1 будем иметь однородное уравнение.

2) Можно поступить и иначе. Для уничтожения данной особенности f достаточно построить какую-нибудь функцию $u_0(x,y)$, для которой результат операции $M(u_0)$ имеет ту же особенность, что и f. Вычитая u_0 из u, мы и уничтожим эту особенность.

Например, если $M(u) = \Delta u$, и функция $f(x, y)$ терпит вдоль линии $x = x_1$ скачок величиной $\sigma(y)$, за такую функцию можно принять:

$$u_0(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - x_1)^2 \sigma(y) & x \geqslant x_1 \\ 0 & x \leqslant x_1 \end{cases}$$

Оба приема изменят контурные значения, поэтому после применения их могут появиться особенности первого рода — в граничных условиях. Эти особенности могут быть уничтожены рассмотренными выше (1) способами. Отметим, что при этом свободный член $f(x, y)$ уже не изменится.

ГЛАВА II

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

§ 1. Замена интегрального уравнения системой линейных уравнений

n° 1. Основные определения. Интегральным уравнением Фредгольма второго рода называется уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x),$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция, $K(x, y)$ — ядро уравнения, $f(x)$ — свободный член, λ — численный параметр. Если свободный член отсутствует, получаем однородное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy.$$

Уравнением первого рода называется уравнение вида

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x).$$

К решению интегральных уравнений второго рода может быть приведено большинство граничных задач математической физики[1].

Основных проблем, возникающих при решении уравнения второго рода, две:

1) Непосредственное нахождение решения неоднородного уравнения при определенном значении параметра λ и определенной или произвольной правой части.

2) Задача о решении однородного уравнения. Однородное уравнение, как правило, имеет только тривиальное нулевое решение $\varphi(x) = 0$,

[1] По теории интегральных уравнений см: Ловитт, Линейные интегральные уравнения; Г. Вирда, Интегральные уравнения. ГТТИ, 1933; Э. Гурса, Курс анализа, т. III, ч. 2.

и лишь при исключительных значениях параметра λ оно имеет нетривиальное решение. Эти исключительные значения λ называются собственными значениями для данного интегрального уравнения, а соответствующие решения однородного уравнения — собственными функциями. Вторая задача — это и есть задача отыскания собственных значений и собственных функций интегрального уравнения.

В приложениях с решением задач первого типа встречаемся при применениях к уравнениям эллиптического типа, и с задачами второго рода — главным образом при применении к уравнениям гиперболического и параболического типа. Следует указать, что решение второй задачи представляет более трудную и более общую задачу — именно, если известны все собственные числа λ и отвечающие им собственные функции, то, как известно из общей теории интегральных уравнений, решение задачи 1) может быть легко получено.

n°2. Замена интегрального уравнения конечной системой линейных уравнений. Пусть дано интегральное уравнение второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x). \tag{1}$$

Входящий в это равенство интеграл мы можем с помощью любой формулы приближенного интегрирования приближенно заменить на некоторое простого вида выражение, не содержащее знака интеграла. Действительно, всякая линейная формула приближенного интегрирования имеет вид:

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \psi(x_k) + \rho, \tag{2}$$

где A_k и x_k — постоянные для данного промежутка и для данной формулы числа, а ρ — погрешность. При этом обычно $A_k > 0$ и $\sum_{k=1}^{n} A_k = b - a$.[1] Например, в случае формулы прямоугольников:

$$x_1 = a;\quad x_2 = a + \frac{b-a}{n};\quad \ldots;\quad x_n = a + (n-1)\frac{b-a}{n};\quad A_k = \frac{b-a}{n};$$

формулы трапеций:

$$x_1 = a;\quad x_2 = a + \frac{b-a}{n-1};\quad \ldots;\quad x_n = b;$$

$$A_1 = A_n = \frac{b-a}{2n-1};\quad A_2 = A_3 = \ldots = A_{n-1} = \frac{b-a}{n-1};$$

[1] Для формул, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем, будем предполагать эти условия выполненными.

формулы Понселе:

$$x_1 = a + \frac{b-a}{2n};\quad x_2 = a + 3\frac{b-a}{2n};\quad \ldots;\quad x_n = a + (2n-1)\frac{b-a}{2n};$$

$$A_k = \frac{b-a}{n};$$

для формулы Чебышева:

$$x_k = \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} x_k^{(n)};\quad A_k = \frac{b-a}{n},$$

где $x_k^{(n)}$ — точки Чебышева.

Наконец, для формулы Гаусса:

$$x_k = a + (b-a)\,x_k^{(n)};\quad A_k = (b-a)\,A_k^{(n)},$$

где $x_k^{(n)}$ — точки Гаусса, а $A_k^{(n)}$ — коэфициенты Гаусса, составленные для интервала (0, 1).

После применения формулы (2) к интегралу в левой части уравнения (1) приходим к равенству:

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x, x_k)\,\varphi(x_k) = f(x) + \lambda\rho(x). \tag{3}$$

В частности, полагая в равенстве (3) последовательно

$$x = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$

приходим к следующей системе уравнений, которой удовлетворяют числа $\varphi(x_i)$ — значения искомой функции в точках x_i:

$$\varphi(x_i) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i, x_k)\,\varphi(x_k) = f(x_i) + \lambda\rho_i, \qquad [i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n] \tag{4}$$

где $\rho_i = \rho(x_i)$. Отбрасывая в правой части равенств (4) малую величину ρ_i, точное значение которой нам неизвестно, мы получим следующую систему n уравнений с n неизвестными $\widetilde{\varphi}(x_1),\ \widetilde{\varphi}(x_2),\ \ldots,\ \widetilde{\varphi}(x_n)$:

$$\widetilde{\varphi}(x_i) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i, x_k)\,\widetilde{\varphi}(x_k) = f(x_i) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{5}$$

или в развернутом виде:

$$(5')\quad \begin{cases} \tilde{\varphi}(x_1)[1-\lambda A_1 K(x_1,x_1)]-\lambda\tilde{\varphi}(x_2)A_2K(x_1,x_2)-\ldots- \\ \qquad -\lambda\tilde{\varphi}(x_n)A_nK(x_1,x_n)=f(x_1), \\ -\lambda\tilde{\varphi}(x_1)A_1K(x_2,x_1)+\tilde{\varphi}(x_2)[1-\lambda A_2K(x_2,x_2)]-\ldots- \\ \qquad -\lambda\tilde{\varphi}(x_n)A_nK(x_2,x_n)=f(x_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda\tilde{\varphi}(x_1)A_1K(x_n,x_1)-\lambda\tilde{\varphi}(x_2)A_2K(x_n,x_2)-\quad\ldots+ \\ \qquad +\tilde{\varphi}(x_n)[1-A_n\lambda K(x_n,x_n)]=f(x_n). \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, мы найдем приближения $\tilde{\varphi}(x_1)$, $\tilde{\varphi}(x_2)$, ..., $\tilde{\varphi}(x_n)$ для значений искомой функции $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, ..., $\varphi(x_n)$.[1] По этим значениям приближенное значение самой функции может быть найдено с помощью того или иного приема интерполирования. В данном специальном случае удобнее всего получить это значение — $\tilde{\varphi}(x)$ исходя из равенства (3), отбросив в нем $\rho(x)$ и заменив $\varphi(x_i)$ на $\tilde{\varphi}(x_i)$. Тогда $\tilde{\varphi}(x)$ напишется в виде

$$(6)\qquad \tilde{\varphi}(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}A_kK(x,x_k)\tilde{\varphi}(x_k).$$

Очевидно, что точность результата, полученного при замене интегрального уравнения (1) системой линейных уравнений (5), будет тем выше, чем меньшую погрешность мы совершаем, заменяя интеграл суммой. Точная оценка погрешности, получающейся при применении этого метода, составляет содержание следующего n°, здесь мы сделаем лишь несколько замечаний общего характера.

Прежде всего остановимся на выборе формулы механических квадратур. В виду того, что увеличение числа вводимых ординат неизвестной функции чрезвычайно повышает трудность решения системы уравнений (5), желательно вообще использовать наиболее точные из формул, именно формулы Гаусса и Чебышева. При этом формула Гаусса несколько более точна, но зато в формуле Чебышева все A_k равны между собой, и потому при ее применении система (4) имеет более простой и удобный

[1] Замена интегрального уравнения системой линейных уравнений применялась уже в фундаментальных работах Фредгольма и Гильберта для теоретических исследований. Там всегда использовалась формула прямоугольника. Использование этой замены для приближенного решения систематически проведено в работах финского математика Nyström'a, Comm. Phys.-Math. Soc. Scient. Fenn., t. IV, N—15. Acta Math. t. 54. Им же было предложено применение других, более точных, формул приближенного интегрирования.

вид. Отметим еще, что в специальном случае, когда функции $f(x)$ и $K(x,y)$ периодичны и имеют период равный $b-a$ [тогда периодично, конечно, и решение $\varphi(x)$], — ту же точность, что и формула Гаусса, дает формула прямоугольников, и тогда конечно удобнее пользоваться последней. При этом система (4) здесь имеет следующий весьма простой вид, если взять для определенности $a=0$, $b=2\pi$:

$$\tilde{\varphi}\left(i\frac{2\pi}{n}\right)-\frac{2\pi\lambda}{n}\sum_{k=0}^{n-1}K\left(i\frac{2\pi}{n},\ k\frac{2\pi}{n}\right)\tilde{\varphi}\left(k\frac{2\pi}{n}\right)=f\left(i\frac{2\pi}{n}\right)\cdot[i=1,2,\ldots,n].$$

Применение высших формул квадратур может быть оправдано только в случае, если подинтегральная функция правильна (имеет некоторое число производных). В данном случае нужна следовательно правильность $K(x,y)$ и $\varphi(y)$, но правильность последней будет обеспечена, если кроме ядра и свободный член $f(x)$ будет правилен.[1]

Полезно указать, что в некоторых случаях, когда в самой поставленной задаче нет правильности, ее можно все же добиться. Например, если ядро правильно, а свободный член имеет особенности, то, вводя новую неизвестную функцию

$$(7)\qquad \psi(x)=\varphi(x)-f(x),$$

мы для нее получим уравнение

$$(8)\qquad \psi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\psi(y)\,dy=\lambda\int_a^b K(x,y)f(x)\,dx,$$

т. е. уравнение того же вида, что и для $\varphi(x)$, но в котором свободный член уже правилен.

Рассмотрим еще случай, когда ядро имеет особенность при $y=x$, как это часто бывает, именно оно само или его производная $K_y'(x,y)$ терпит разрыв непрерывности при $y=x$. В этом случае выгодно, прежде чем заменять интегральное уравнение на систему линейных уравнений, преобразовать его следующим образом:

$$(9)\quad \varphi(x)\left[1-\lambda\int_a^b K(x,y)\,dy\right]-\lambda\int_a^b K(x,y)[\varphi(y)-\varphi(x)]\,dy=f(x).$$

Действительно, если теперь рассмотрим второй интеграл, стоящий в правой части, то мы увидим, что благодаря наличию множителя

[1] Действительно, если например существуют и интегрируемы $f^{(n)}(x)$ и $K_{x^n}^{(n)}(x,y)$, то, дифференцируя n раз по x интегральное уравнение (1), убедимся, что существует n-ая производная $\varphi(x)$:

$$\varphi^{(n)}(x)=\lambda\int_a^b K_{x^n}^{(n)}(x,y)\varphi(y)\,dy+f^{(n)}(x).$$

$[\varphi(y)-\varphi(x)]$, обращающегося в нуль при $y=x$, его подинтегральная функция оказывается более правильной, чем $K(x, y)\varphi(y)$, и замена этого интеграла на конечную сумму более оправданной, чем для первоначального. Что касается $\int_a^b K(x, y)\,dy$, то, так как он не содержит неизвестной функции, он может быть вычислен без труда и даст некоторую определенную функцию $\chi(x)$. Строя для уравнения (9) систему уравнений так же, как построена система (5) для уравнения (1), придем к системе:

$$\tilde{\varphi}(x_i)[1-\lambda\chi(x_i)]- \tag{10}$$

$$-\lambda\sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i, x_k)[\tilde{\varphi}(x_k)-\tilde{\varphi}(x_i)]=f(x_i), \qquad [i=1, 2, \ldots, n]$$

решение которой дает лучшее приближение в этом случае, чем решение системы (5). [1]

Наконец следует указать, что метод замены интегрального уравнения на систему алгебраических пригоден также и для приближенного решения второй задачи о нахождении собственных чисел и собственных функций. Именно для решения этой задачи вместо системы уравнений (4) нужно рассмотреть соответствующую однородную систему

$$\tilde{\varphi}(x_i)-\lambda\sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i, x_k)\varphi(x_k)=0. \qquad [i=1, 2, \ldots, n] \tag{11}$$

Определитель этой системы будет

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda A_1K(x_1,x_1), & -\lambda A_2K(x_1,x_2), & \ldots, & -\lambda A_nK(x_1,x_n) \\ -\lambda A_1K(x_2,x_1), & 1-\lambda A_2K(x_2,x_2), & \ldots, & -\lambda A_nK(x_2,x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda A_1K(x_n,x_1), & -\lambda A_2K(x_n,x_2), & \ldots, & 1-\lambda A_nK(x_n,x_n) \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Приравнивая нулю этот определитель и решая соответствующее уравнение

$$\Delta(\lambda)=0, \tag{13}$$

найдем те значения λ, при которых система уравнения (11) имеет решение $\{\tilde{\varphi}(x_i)\}$, не равное тождественно нулю. [2] Эти значения λ и будут

[1] См. Л. В. Канторович, „О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенности", Матем. сборн. 41, в. 2. Здесь указан и другой способ уничтожения особенности в ядре при $y=x$.

[2] Удобный прием раскрытия определителя вида (12) предложен акад. А. Н. Крыловым, см. ниже стр. 245. Удачный прием непосредственного решения уравнения (13), без раскрытия определителя, дан Geiringer'ом и Pollaček'ом, его изложение можно найти в статье П. Ф. Панковича. Журн. прикл. матем. и мех. т. II.

приближенными значениями для собственных чисел. Далее, беря значения λ, равные корням уравнения (13), и составляя при этих значениях λ соответствующие им независимые решения системы уравнений (11), можем получить приближенные выражения для собственных функций уравнения.

n° 3. Оценка погрешности, получающейся в результате замены интегрального уравнения системой линейных уравнений. Мы рассмотрим подробно оценку погрешности при решении первой задачи, о нахождении функции $\varphi(x)$.

Если обозначить через $\Delta_{i,k}$ алгебраическое дополнение элемента i-ой строки и k-го столбца в определителе $\Delta(\lambda)$ (12), то решение системы уравнений (5) может быть написано в виде:

$$\tilde{\varphi}(x_i)=\frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta_{i,k}f(x_k)}{\Delta(\lambda)}. \qquad [i=1, 2, \ldots, n] \tag{14}$$

Оценим, насколько эти приближенные значения отличаются от точных значений искомой функции $\varphi(x)$ в тех же точках,

$$\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n).$$

Предположим, что функции $f(x)$ и $K(x, y)$ имеют некоторое число p ограниченных производных; столько же производных имеет тогда и $\varphi(x)$. [1]

Обозначим через $H^{(s)}$, $N^{(s)}$, $M_x^{(s)}$, $M_y^{(s)}$ верхние границы

$$|\varphi^{(s)}(x)|, \quad |f^{(s)}(x)|, \quad \left|\frac{d^s}{dx^s}K(x, y)\right|, \quad \left|\frac{d^s}{dy^s}K(x, y)\right|$$

и через $H^{(0)}$, $N^{(0)}$, $M^{(0)}$ верхние границы самих функций $\varphi(x)$, $f(x)$ и $K(x, y)$. В таком случае могут быть легко оценены и производные подинтегральной функции $K(x, y)\varphi(y)$, а именно, на основании правила Лейбница, очевидно:

$$\left|\frac{d^s}{dy^s}[K(x, y)\varphi(y)]\right| \leqslant H^{(0)}M_y^{(s)}+ \tag{15}$$

$$+C_s^1 H^{(1)}M_y^{(s-1)}+\ldots+H^{(s)}M^{(0)}=T^{(s)}.$$

Если обозначить теперь через σ максимальную ошибку, которую мы совершим, заменяя $\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy$ суммой, т. е. максимум модуля величины:

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy-\sum_{k=1}^{n} A_n K(x, x_k)\varphi(x_k)=\rho(x) \tag{16}$$

так, что

$$|\rho(x)|\leqslant\sigma, \quad |\rho_i|\leqslant\sigma, \tag{17}$$

[1] См. примеч. на стр. 115.

то эта величина σ может быть легко оценена некоторым выражением, содержащим $T^{(s)}$.

Эта оценка может быть произведена с помощью известных выражений остаточных членов, которые имеются для всех формул механических квадратур. В частности имеем, например:

для формулы трапеций

$$\sigma \leqslant \frac{1}{12}\,\frac{(b-a)^3}{(n-1)^2}\,T^{(2)};$$

для формулы Симпсона

$$\sigma \leqslant \frac{1}{90}\,(b-a)^5\,\frac{T^{(4)}}{(n-1)^4};$$

для формулы Гаусса

$$\sigma \leqslant \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}\left\{\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{(n+1)\ldots 2n}\right\}^2\cdot\frac{T^{(2n)}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}.$$

Во всех формулах эта оценка имеет вид $\sigma \leqslant k_n T^{(s)}$, где k_n — определенный для данной формулы квадратур множитель, не зависящий от вида подинтегральной функции.

Выведем теперь требуемую оценку. Пусть $\varphi(x)$ есть решение интегрального уравнения (1). Значения ее в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\varphi(x_i) - \lambda\sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i, x_k)\,\varphi(x_k) = f(x_i) + \lambda\rho_i.$$

Для решения этой системы воспользуемся формулами (14), взяв только $f(x_k)+\lambda\rho_k$ вместо $f(x_k)$; найдем тогда:

$$\varphi(x_i) = \frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta_{i,k}\,[f(x_k)+\lambda\rho_k]}{\Delta(\lambda)}. \tag{18}$$

Сравнивая с (14), получаем

$$|\varphi(x_i) - \tilde{\varphi}(x_i)| = \left|\frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta_i^{(k)}\lambda\rho_k}{\Delta(\lambda)}\right| \leqslant \sigma|\lambda|\,\frac{\sum_{k=1}^{n}|\Delta_{i,k}|}{\Delta(\lambda)} \leqslant |\lambda|\,\sigma B, \tag{19}$$

если через B обозначить максимум отношения $\sum_{k=1}^{n}|\Delta_{i,k}|$ и $|\Delta(\lambda)|$, т. е. такое число, что

$$\frac{\sum_{k-1}^{n}|\Delta_{i,k}|}{|\Delta(\lambda)|} \leqslant B. \tag{20}$$

Оценка (19) является довольно удобной, так как требующиеся для этой оценки величины $\Delta_i^{(k)}$ и $\Delta(\lambda)$ определяются сами собой, когда производится фактическое решение системы уравнений (5). Остается еще указать предел погрешности, которую мы допускаем в остальных точках, пользуясь для $\tilde{\varphi}(x)$ интерполяционной формулой (6). В самом деле, приближенное значение $\varphi(x)$:

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda\sum_{k=1}^{n} K(x, x_k)\,\tilde{\varphi}(x_k). \tag{6}$$

С другой стороны, точное значение $\varphi(x)$ по (3) равно:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{k=1}^{n} A_k K(x, x_k)\,\varphi(x_k) + \lambda\rho(x),$$

где $|\rho(x)| \leqslant \sigma$. Вычитая из одного равенства другое и пользуясь (19), получим

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leqslant |\lambda|\sum_{k=1}^{n} A_k\,|K(x, x_k)|\cdot|\varphi(x_k) - \tilde{\varphi}(x_k)| + |\lambda|\cdot\sigma \leqslant \tag{21}$$

$$\leqslant |\lambda|\,\sigma\,[1 + |\lambda|\,BM^{(0)}(b-a)],$$

так как $\sum_{k=1}^{n} A_k = b-a$. Единственным недостатком полученной оценки (21) является то обстоятельство, что σ оценивается через $T^{(s)}$, в состав же $T^{(s)}$ входят $H^{(0)}, H^{(1)}, \ldots, H^{(s)}$ границы неизвестной функции $\varphi(x)$ и ее производных. Это неудобство удается устранить однако, так как эти границы можно выразить через известные величины $M_x^{(s)}$, $N^{(s)}$ и B. Прежде всего дифференцируя s раз уравнение (1), находим:

$$\varphi^{(s)}(x) = \lambda\int_a^b\left[\frac{d^s}{dx^s}\,K(x, y)\right]\varphi(y)\,dy + f^{(s)}(x),$$

откуда

$$H^{(s)} \leqslant H^{(0)}\cdot|\lambda|(b-a)\,M_x^{(s)} + N^{(s)}. \qquad [s = 0, 1, 2, \ldots] \tag{22}$$

Теперь выражение $T^{(s)}$ (15) может быть оценено так:

$$T^{(s)} = H^{(0)}M_y^{(s)} + C_s^1 H^{(1)}M_y^{(s-1)} + \ldots + H^{(s)}M^{(0)} \leqslant$$

$$\leqslant N^{(0)}M_y^{(s)} + C_s^1 N^{(1)}M_y^{(s-1)} + \ldots + N^{(s)}M^{(0)} +$$

$$+ |\lambda|(b-a)(M^{(0)}M_y^{(s)} + C_s^1 M_x^{(1)}M_y^{(s-1)} + \ldots + M_x^{(s)}M^{(0)})\,H^{(0)} =$$

$$= P_s + Q_s H^{(0)},$$

где P_s и Q_s — известные величины. Далее σ оценивается как было указано выше через $T^{(s)}$, и следовательно ее оценка имеет вид:

$$\sigma \leqslant k_n T^{(s)} \leqslant k_n (P_s + Q_s H^{(0)}), \tag{23}$$

где k_n — коэфициент при производной, входящий в остаточный член примененной формулы квадратур.

Пользуясь неравенством (23), оценку (21) можем переписать так:

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leqslant [M^{(0)} |\lambda| B(b-a)+1]\, k_n (P_s + Q_s H^{(0)}) |\lambda|. \tag{24}$$

Обозначим через S верхнюю границу приближенного решения $\tilde{\varphi}(x)$.[1] Тогда получим

$$|\varphi(x)| \leqslant S + [M^{(0)} |\lambda| B(b-a)+1]\, k_n (P_s + Q_s H^{(0)}) |\lambda|.$$

Отсюда и

$$H^{(0)} \leqslant S + [M^{(0)} |\lambda| B(b-a)+1]\, k_n (P_s + Q_s H^{(0)}) |\lambda|.$$

Далее, преобразуя это неравенство, находим оценку для $H^{(0)}$:

$$H^{(0)} \leqslant \frac{S + [M^{(0)} |\lambda| B(b-a)+1] |\lambda| k_n P_s}{1 - [M^{(0)} |\lambda| B(b-a)+1] |\lambda| k_n Q_s}, \tag{25}$$

верную, если знаменатель правой части положителен. Для этого, так как k_n весьма мало, требуется лишь, чтобы остальные величины B, $M^{(0)}$, Q, $|\lambda|$ оказались не слишком большими.

В случае, если этот знаменатель положителен, решение $\varphi(x)$ оказывается ограниченным, а это сразу позволяет утверждать, что данное значение λ не есть собственное число. Действительно, в противном случае к $\varphi(x)$ можно было бы добавить произвольное решение однородного уравнения, которое может быть взято сколько угодно большим, а тогда неравенство (25) не соблюдалось бы.

Подставляя оценку $H^{(0)}$ из неравенства (25) в (24), можем получить окончательную оценку $|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)|$ — точности приближения, в которой участвуют лишь известные величины.

---

[1] Величина S может быть найдена непосредственно по (6), но она легко может быть оценена и через введенные уже постоянные. Действительно, по (14) и (20):

$$|\tilde{\varphi}(x_i)| \leqslant B \cdot N^{(0)}.$$

Далее, в виду (6)

$$|\tilde{\varphi}(x)| \leqslant |f(x)| + \sum_{k=1}^{n} A_k |K(x, x_k)| \cdot |\tilde{\varphi}(x_k)| \leqslant N^{(0)} + M^{(0)} (b-a) N^{(0)} B.$$

Отсюда видно, что последнее полученное выражение может быть принято в качестве S.

[2] Некоторая попытка оценки погрешности при замене интегрального уравнения системой линейных уравнений была сделана А. Акбергеновым, Труды 2 матем. съезда.

Приведенные оценки позволяют также оценить и погрешность, сделанную при нахождении собственных чисел и функций по этому способу. Не вдаваясь здесь в подробности, ограничимся лишь принципиальным указанием.

Возьмем некоторую область значений λ, например круг $|\lambda| < \Lambda_0$. Оценим в этой области $\sum_{k=1}^{n} |\Delta_{i,k}|$; пусть эта оценка есть число R. Тогда в неравенстве (25) можем принять за B величину $\frac{R}{\Delta(\lambda)}$. Если теперь значение λ будет таким, что

$$1 - \left[M^{(0)} |\lambda| \cdot \frac{R}{\Delta |\lambda|} (b-a) + 1 \right] |\lambda| k_n Q_s > 0, \tag{26}$$

то λ не есть собственное число. Поэтому собственные значения могут быть расположены только в области значений λ, не удовлетворяющих неравенству (26). Это замечание и дает возможность оценить точность приближенных значений для собственных чисел, найденных решением уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Оценка погрешности при определении собственных функций может быть произведена на основании подобных же соображений, на которых мы не останавливаемся подробнее.

n° 4. *Пример.* Применим рассмотренный выше способ приближенного решения интегральных уравнений к решению уравнения

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xy} \varphi(y)\, dy = 1 - \frac{1}{2x} (e^x - 1).$$

Заменяя это интегральное уравнение на систему, при $n = 2$, и приняв во внимание, что здесь $\lambda = \frac{1}{2}$, $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$, получим систему (5) для данного случая в виде:

$$\left(1 - \frac{1}{4} K_{1,1}\right) \tilde{\varphi}(x_1) - \frac{1}{4} K_{1,2} \tilde{\varphi}(x_2) = f_1,$$

$$-\frac{1}{4} K_{2,1} \tilde{\varphi}(x_1) + \left(1 - \frac{1}{4} K_{2,2}\right) \tilde{\varphi}(x_2) = f_2.$$

При этом предполагаем, что за x_1 и x_2 взяты абсциссы Гаусса для интервала $(0,1)$: $x_1 = 0{,}2113$; $x_2 = 0{,}7887$. Вычислив значения $K_{i,k} = K(x_i, x_k)$; $f_i = f(x_i)$ и подставив их в систему, приведем ее к виду:

$$0{,}7386\, \tilde{\varphi}(x_1) - 0{,}2954\, \tilde{\varphi}(x_2) = 0{,}4434,$$

$$-0{,}2954\, \varphi(x_1) + 0{,}5343\, \varphi(x_2) = 0{,}2384.$$

Значения необходимых определителей будут:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}7386 & -0{,}2954 \\ -0{,}2954 & 0{,}5343 \end{vmatrix} = 0{,}3074,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0{,}4434 & -0{,}2954 \\ 0{,}2384 & 0{,}5343 \end{vmatrix} = 0{,}3073,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0{,}7386 & 0{,}4434 \\ -0{,}2954 & 0{,}2384 \end{vmatrix} = 0{,}3071,$$

откуда

$$\tilde{\varphi}(x_1) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0{,}9997; \quad \tilde{\varphi}(x_2) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0{,}9990.$$

Поэтому приближенное решение в остальных точках по формуле (6) дается равенством:

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{4}\left(e^{0{,}2113x}\,0{,}9997 + e^{0{,}7887x}\,0{,}9990\right) + 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1).$$

Точное решение данного уравнения, как легко проверить подстановкой, есть $\varphi(x) = 1$. Сравнивая значения этих решений в точках x_1, x_2, видим, что разница будет соответственно 0,0003 и 0,0010. Можно например найти еще $\varphi(0) = 0{,}9997$, и опять разница 0,0003. Как видим, приближенное решение почти совпадает с точным.

Дадим теперь точную оценку погрешности найденного приближенного решения, пользуясь способом, указанным в n° 3.

Найдем некоторые необходимые величины.

B — означает оценку

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} |\Delta_{i,k}|}{\Delta}.$$

В данном случае $\Delta_{i,k}$ суть элементы определителя Δ и наибольшее отношение будет

$$\frac{0{,}7386 + 0{,}2954}{0{,}3074} < 3{,}4$$

следовательно можно принять $B = 3{,}4$.

Разлагая в ряд свободный член и его производные, найдем

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{48} - \frac{x^4}{240} - \frac{x^5}{1440} - \frac{10080}{x^6} - \ldots,$$

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{60}x^3 + \frac{1}{288}x^4 + \frac{1}{1680}x^5 + \ldots\right),$$

$$f''(x) = -\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{72}x^3 + \frac{1}{336}x^4 + \ldots\right),$$

$$f'''(x) = -\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}x + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{84}x^3 + \ldots\right),$$

$$f^{(IV)}(x) = -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12}x + \frac{1}{28}x^2 + \ldots\right).$$

Отсюда видно, что за границы функции f и ее производных в (0,1) можно принять:

$$N^{(0)} = 0{,}5; \quad N^{(1)} = 0{,}5; \quad N^{(2)} = 0{,}36; \quad N^{(3)} = 0{,}29; \quad N^{(4)} = 0{,}25.$$

Далее ядро и его производные будут

$$K = e^{xy}; \quad K_x' = ye^{xy}; \quad K_x'' = y^2e^{xy}; \quad K_x''' = y^3e^{xy}; \quad K_x^{(4)} = y^4e^{xy};$$

аналогичное значение имеют производные по y. Поэтому за границы их в (0,1) можно принять

$$M^{(0)} = M_x^{(1)} = \ldots = M_x^{(4)} = M_y^{(1)} = \ldots = M_y^{(4)} = e.$$

Отсюда

$$P_4 = N^{(0)}M_y^{(4)} + C_4^1N^{(1)}M_y^{(3)} + C_4^2N^{(2)}M_y^{(2)} + C_4^3N^{(3)}M_y^{(0)} + N^{(4)}M^{(0)} < 8e < 22,$$

$$Q_4 = |\lambda|(b-a)(M^{(0)}M_y^{(4)} + C_4'M_x^{(2)}M_y^{(3)} + C_4^2M_x^{(2)}M_y^{(2)} + C_4^3M_x^{(3)}M_y^{(1)} + M_x^{(4)}M) = 8e^2 < 59.$$

Тогда для производной $\frac{d^4}{dy^4}K(x,y)\varphi(y)$ получаем оценку

$$T^4 = P_4 + Q_4H^{(0)},$$

где $H^{(0)}$ — верхняя граница $\varphi(y)$. Далее для оценки погрешности при замене интеграла на сумму находим, пользуясь выражением оценки для формулы Гаусса (стр. 118), при $n = 2$

$$\sigma = k_2T^{(4)} = \frac{1}{5}\left\{\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\right\}^2\frac{T^{(4)}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{4320}T^{(4)},$$

т. е. $k_2 = \frac{1}{4320} = 0{,}00024$.

Наконец S верхнюю границу $\tilde{\varphi}(x)$ можем принять равной 1,4. Действительно, максимальное значение первого члена $\tilde{\varphi}(x)$ есть $\frac{1}{4}(e^{0,212}+e^{0,789}) \cong 0,9$, а максимальное значение следующей разности есть $\frac{1}{2}$.

Подставляя найденные значения, найдем для $H^{(0)}$ следующую оценку:

$$H^{(0)} \leqslant \frac{S+[M^{(0)}B(b-a)|\lambda|+1]|\lambda|k_2P_4}{1-[M^{(0)}B(b-a)|\lambda|+1]|\lambda|k_2Q_4} =$$

$$= \frac{1,4+(2,72\cdot 3,4\cdot 0,5+1)\cdot 0,5\cdot 0,00024\cdot 22}{1-(2,72\cdot 3,4\cdot 0,5+1)\cdot 0,5\cdot 0,00024\cdot 59} = 1,48.$$

Наконец, для интересующей нас разности $|\varphi-\tilde{\varphi}|$ получаем оценку

$$|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)| < |\lambda|[1+BM^{(0)}(b-a)|\lambda|]k_2(P_4+Q_4H^{(0)}) =$$

$$= 0,5\cdot 5,62\cdot 0,00024\,(22+59\cdot 1,48) = 0,07.$$

Как мы видели, в действительности погрешность порядка 0,001 и значительно ниже того, что мы сейчас получили при оценке 0,070. Однако проведение оценки установило например с полной определенностью, что $\lambda = 0,5$ не есть собственное значение данного интегрального уравнения и что оно имеет следовательно единственное решение.

§ 2. Метод последовательных приближений и аналитическое продолжение

n° 1. Метод последовательных приближений. Рассмотрим интегральное уравнение второго рода:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x). \tag{1}$$

Метод последовательных приближений для его решения состоит в следующем. Ищем решение в виде ряда, расположенного по степеням λ:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\ldots \tag{2}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1), найдем:

$$\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\ldots =$$

$$= f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)[\varphi_0(y)+\lambda\varphi_1(y)+\lambda^2\varphi_2(y)+\ldots]\,dy.$$

Приравнивая коэфициенты при одинаковых степенях λ, получим:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x), \\ \varphi_1(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi_0(y)\,dy, \\ \varphi_2(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi_2(y)\,dy. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{3}$$

Из этих равенств можно определить последовательно все функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., именно, если ввести так называемые итерированные ядра

$$\begin{cases} K_1(x,y) = K(x,y), \\ K_2(x,y) = \int_a^b K(x,t)K(t,y)\,dt, \\ K_3(x,y) = \int_a^b K_2(x,t)K(t,y)\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{4}$$

то можем написать следующие выражения для функций $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_0(x) = f(x); \tag{5}$$

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K_n(x,y)f(y)\,dy. \qquad [n=1,2,\ldots]$$

Ряд (2) можем теперь записать в виде

$$\varphi(x) = f(x)+\lambda\int_a^b K_1(x,y)f(y)\,dy+\lambda^2\int_a^b K_2(x,y)\varphi_2(y)\,dy+\ldots = \tag{6}$$

$$= f(x)+\lambda\int_a^b [K_1(x,y)+\lambda K_2(x,y)+\ldots]f(y)\,dy =$$

$$= f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x,y,\lambda)f(y)\,dy,$$

если через Γ обозначить ряд, стоящий в скобках:

$$\Gamma(x,y,\lambda) = K_1(x,y)+\lambda K_2(x,y)+\ldots \tag{7}$$

Функцию Γ называют резольвентой уравнения (1). Можно доказать, предполагая ограниченным ядро $K(x,y)$: $|K(x,y)| \leqslant M$, что ряды (7),

(6) и (2) будут равномерно сходящимися и $\varphi(y)$ есть решение уравнения (1), если λ достаточно мало, точнее — если λ удовлетворяет условию:

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}. \quad (8)$$ [1]

Если λ удовлетворяет неравенству (8), то рядом (2) можно с успехом пользоваться для приближенного решения. Часто, требуемые квадратуры (3) можно выполнить точно, тогда получаемый ряд (2) будет сходиться, по крайней мере, как прогрессия со знаменателем $|\lambda| M(b-a)$. Погрешность, которую мы допустим, если ограничимся n членами в ряду (2), может быть оценена без особого труда. Именно предполагая $|f(x)| \leqslant N$, легко получить последовательно, что

$$|\varphi_n(x)| < NM^n(b-a)^n, \quad (9)$$

и потому остаток ряда (2) после n членов

$$|\lambda^n\varphi_n(x) + \lambda^{n+1}\varphi_{n+1}(x) + \ldots| < |\lambda|^n NM^n(b-a)^n + \quad (10)$$

$$+|\lambda|^{n+1}NM^{n+1}(b-a)^{n+1} + \ldots = \frac{NM^n(b-a)^n|\lambda|^n}{1-M(b-a)|\lambda|}.$$

Как правило, однако, квадратуры (3) не могут быть выполнены, и в таких случаях нужно применить формулы приближенного интегрирования. Укажем наиболее удобный порядок расположения вычислений при этом.

Выбираем определенную формулу квадратур:

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} A_k \psi(x_k).$$

Введем сокращенные обозначения:

$$K_{i,k} = K(x_i, x_k); \quad \varphi_n^{(i)} = \varphi_n(x_i); \quad \varphi^{(i)} = \varphi(x_i); \quad f^{(i)} = f(x_i), \quad (11)$$

причем приближенные значения для φ^i и $\varphi_n^{(i)}$ будем обозначать через $\tilde{\varphi}^i$ и $\tilde{\varphi}_n^{(i)}$.

[1] Можно указать более точные оценки для радиуса сходимости рядов (2), (6) и (7). Оценка (8) остается верной, например, если M не верхняя граница $K(x, y)$, а хотя бы такое число, что выполняется одно из неравенств:

(a) $$\int_a^b |K(x, y)|\,dy < M(b-a),$$

(b) $$\left\{\int_a^b\int_a^b K^2(x, y)\,dx\,dy\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant M(b-a),$$

(c) $$|K_p(x, y)| < M^p(b-a)^{p-1}.$$

Тогда равенства (3) дают:

$$\varphi_0^{(i)} = f^{(i)};$$

$$\varphi_1^{(i)} = \int_a^b K(x_i, y)\varphi_0(y)\,dy \cong \sum_{k=1}^{m} A_k K_{i,k}\varphi_0^{(k)}; \quad \tilde{\varphi}_1^{(i)} = \sum_{k=1}^{m} A_k K_{i,k}\varphi_0^{(k)}$$

и вообще

$$\tilde{\varphi}_{n+1}^{(i)} = \sum_{k=1}^{m} A_k K_{i,k}\varphi_n^{(k)}. \quad (12)$$

Благодаря этим формулам вычисления удобнее всего расположить в таблицу следующего вида:

	1	2		m	Контрольный	$\varphi_0 = f$	$\tilde{\varphi}_1$	$\tilde{\varphi}_2$		$\tilde{\varphi}$
x_1	$\lambda A_1 K_{1,1}$	$\lambda A_1 K_{2,1}$	. . .	$\lambda A_1 K_{m,1}$	K_1^*	$\varphi_0^{(1)}$	$\lambda\tilde{\varphi}_1^{(1)}$	$\lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(1)}$	. . .	$\tilde{\varphi}^{(1)}$
x_2	$\lambda A_2 K_{1,2}$	$\lambda A_2 K_{2,2}$	. . .	$\lambda A_2 K_{m,2}$	K_2^*	$\varphi_0^{(2)}$	$\lambda\tilde{\varphi}_1^{(2)}$	$\lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(2)}$	. . .	$\tilde{\varphi}^{(2)}$
. .	. . . .	. . . .	. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. .
. .	. . . .	. . . .	. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. .
x_m	$\lambda A_m K_{1,m}$	$\lambda A_m K_{2,m}$	. . .	$\lambda A_m K_{m,m}$	K_m^*	$\varphi_0^{(m)}$	$\lambda\tilde{\varphi}_1^{(m)}$	$\lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(m)}$	. . .	$\tilde{\varphi}^{(m)}$
							$\lambda\varphi_1^*$	$\lambda^2\varphi_2^*$	. . .	

Эта таблица составляется следующим образом: 1) Вычислив значения ядра в точках (x_i, x_k) и помножив на множитель λA_k, составляем квадратную таблицу. За ней следует контрольный столбец, о котором ниже. 2) Значения функции f в точках x_i дают нам первый столбец, следующий за квадратной таблицей. 3) Для вычисления элементов второго столбца поступаем так: помножаем элементы первого столбца, следующего за контрольным, на элементы первого столбца таблицы и, складывая эти произведения, находим:

$$\lambda\tilde{\varphi}_1^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} \lambda A_k K_{i,k}\varphi_0^{(k)}. \quad (13)$$

Помножая таким же образом элементы того же первого столбца, следующего за контрольным, на элементы второго столбца таблицы, находим:

$$\lambda\tilde{\varphi}_1^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} \lambda A_k K_{2,k}\varphi_0^{(k)}. \quad (13')$$

Продолжая таким образом, вычисляем весь второй столбец, следующий за контрольным. 4) Третий столбец, следующий за контрольным (столбец $\tilde{\varphi}_2$), вычисляется точно так же как второй, только вместо первого столбца, следующего за таблицей, нужно пользоваться вторым, например:

$$(14)\qquad \lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(1)}=\sum_{k=1}^{m}\lambda A_k K_{1,k}(\lambda\tilde{\varphi}_1^{(k)});\quad \lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(2)}=\sum_{k=1}^{m}\lambda A_k K_{2,k}(\lambda\tilde{\varphi}_1^{(k)}).$$

5) Вычисления нужно вести до того момента, пока элементы последнего столбца не сделаются столь малыми, что ими можно будет пренебречь. После этого, складывая элементы этих столбцов по строкам, получаем последний столбец—приближенные значения искомой функции φ в точках x_i:

$$(15)\qquad \tilde{\varphi}^{(i)}=\tilde{\varphi}_0^{(i)}+\lambda\tilde{\varphi}_1^{(i)}+\lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(i)}+\ldots.^{1}$$

Контроль произведенных вычислений удобнее всего производится на основании следующих соображений. В виду прежних формул, имеем:

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda\varphi_1^{(i)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\lambda A_k K_{i,k}\varphi_0^{(k)}=\sum_{k=1}^{m}\varphi_0^{(k)}\Big[\sum_{i=1}^{m}(A_k\lambda K_{i,k})\Big];$$

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda^2\varphi_2^{(i)}=\sum_{k=1}^{m}\lambda\varphi_1^{(k)}\Big[\sum_{i=1}^{m}(A_k\lambda K_{i,k})\Big].$$

. . . . . .

Поэтому, если составим дополнительный столбец величин

$$K_k^*=\sum_{i=1}^{m}(A_k\lambda K_{i,k}),$$

получающихся суммированием строк квадратной таблицы (контрольный столбец), и составим суммы вертикальных столбцов, следующих за квадратной таблицей

$$\lambda\varphi_1^*=\sum_{i=1}^{m}\lambda\varphi_1^{(i)};\quad \lambda^2\varphi_2^*=\sum_{i=1}^{m}\lambda^2\varphi_2^{(i)};\quad \ldots,$$

[1] В том, что этот ряд сходится при условии (8), можно убедиться без труда. Пусть $|\varphi_0^{(i)}|=|f_i|\leqslant N$. Тогда

$$\Big|\tilde{\varphi}_1^{(i)}\Big|=\Big|\sum_{k=1}^{n}\lambda A_k K_{i,k}\tilde{\varphi}_k^{(0)}\Big|\leqslant NM|\lambda|\sum_{k=1}^{n}A_k=NM|\lambda|(b-a).$$

Продолжая так, найдем $|\tilde{\varphi}_n^{(i)}|\leqslant N[M|\lambda|(b-a)]^n$, т. е. ряд (15) сходится действительно при условии (8).

Сходимость ряда (15) для весьма общего класса формул механических квадратур и при соблюдении вместо условия (8) более точных неравенств (см. прим. на стр. 126) была установлена в работе М. Крылова и Я. Тамаркина, Бюлл. Укр. А. Н., Киев, т. I, вып. 1, 1923, стр. 16—21.

Приближенному решению интегральных уравнений при малых значениях параметра посвящена также недавно вышедшая работа Д. Ю. Панова Изв. А. Н. 1934. № 7, стр. 843 — 883.

то, умножая контрольный столбец на столбцы за таблицей, мы должны получить величины $\lambda\varphi_1^*$; $\lambda^2\varphi_2^*$, ..., например

$$(16)\qquad \sum_{k=1}^{m}K_k^*\varphi_0^{(k)}=\lambda\varphi_1^*;\quad \sum_{k=1}^{m}K_k^*\lambda\varphi_1^{(k)}=\lambda^2\varphi_2^*;\quad \ldots$$

Этот способ дает, следовательно, возможность проверки, после вычисления каждого из столбцов.

Проверка точности полученного решения может быть произведена еще другим способом. Пользуясь выражением для $\tilde{\varphi}^{(i)}$ и $\tilde{\varphi}_1^{(i)}$, находим

$$\tilde{\varphi}^{(i)}-f^{(i)}=\lambda\tilde{\varphi}_1^{(i)}+\lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(i)}+\ldots=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\lambda A_k K_{i,k}\varphi_0^{(k)}+\lambda\sum_{k=1}^{m}\lambda A_k K_{i,k}\tilde{\varphi}_1^{(k)}+\ldots=$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{m}A_k K_{i,k}(\tilde{\varphi}_0^{(k)}+\lambda\tilde{\varphi}_1^{(k)}+\ldots)=\lambda\sum_{k=1}^{m}A_k K_{i,k}\tilde{\varphi}^{(k)}.$$

Следовательно, найденные значения $\tilde{\varphi}^{(i)}$ должны быть решениями системы обыкновенных уравнений первой степени:

$$(17)\qquad \tilde{\varphi}^{(i)}-\sum_{k=1}^{m}(\lambda A_k K_{i,k})\tilde{\varphi}^{(k)}=f_i.$$

Чтобы проверить, что $\tilde{\varphi}_i$ действительно удовлетворяют этой системе, нужно вычислить, посредством умножения столбца $\tilde{\varphi}^{(i)}$ на квадратную таблицу (подобно тому как мы поступали с каждым столбцом), столбец величин

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda A_k K_{i,k}\tilde{\varphi}^{(k)};$$

которые должны оказаться равными $\tilde{\varphi}^{(i)}-f_i$.

Система (17) есть та система (5), которую мы рассмотрели в n° 1. Таким образом способ вычислений, которым мы здесь пользовались, есть не что иное, как особый способ решения системы (17), практически обычно более удобный, чем непосредственное ее решение.

Так как способ последовательных приближений дает в результате решение системы (17), то строгая оценка погрешности, получающейся в результате решения по этому способу, может быть произведена с помощью формул n° 3.

Практически оценку погрешности полученного решения можно произвести и иначе. Прежде всего, с помощью той или иной интерполя-

ционной формулы, например формулы (6) n° 1, можно, пользуясь найденными числами $\widetilde{\varphi}^{(i)}$, получить приближенное выражение для $\varphi(x)$ на всем промежутке:

$$\widetilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{m} A_k K(x, x_i) \widetilde{\varphi}^{(k)}.$$

Для проверки того, насколько точно $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению, можно ее подставить в интегральное уравнение, но интеграл заменить на сумму по другой формуле квадратур:

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{k=1}^{m^*} A_k^* K(x, x_k^*)\, \varphi(x_k^*) \cong f(x)$$

и проверить, какова ошибка при нескольких значениях x.

Мы рассматривали сейчас вопрос о приближенном решении уравнения с определенной правой частью $f(x)$. В случае же, если одно и то же уравнение приходится решать для различных правых частей, то выгоднее построить резольвенту. Для этой цели нужно составить итерированные ядра $K_s(x, y)$. Если ввести обозначение:

$$K_{i,k}^{(s)} = K_s(x_i, x_k)$$

и через $\widetilde{K}_{i,n}^{(s)}$ обозначить приближенные их значения, то будем иметь следующие формулы для последовательного их приближенного вычисления:

$$\widetilde{K}_{i,k}^{(1)} = K_{i,k}; \quad \lambda^{s+1} \widetilde{K}_{i,k}^{(s+1)} = \sum_{j=1}^{m} \lambda A_j K_{i,j} (\lambda^s \widetilde{K}_{j,k}^{(s)}).$$

Эта формула показывает, что если значения $\lambda^s K_{i,k}^{(s)}$ выписывать в виде матрицы, то каждая матрица получается из предыдущей посредством умножения на матрицу $\|\lambda A_k K_{i,k}\|$.

Это дает возможность построить схему вычислений, аналогичную рассмотренной выше, и дать такие же правила контроля. Складывая все построенные матрицы, получим матрицу значений для резольвенты:

$$\widetilde{\Gamma}_{i,k} = K_{i,k} + \lambda \widetilde{K}_{i,k}^{(2)} + \lambda^2 \widetilde{K}_{i,k}^{(3)} + \dots$$

С помощью матрицы $\|\widetilde{\Gamma}_{i,k}\|$ решение для любого свободного члена $f(x)$ может быть построено по формуле:

$$\widetilde{\varphi}_i = f_i + \lambda \sum_{k=1}^{m} A_k \widetilde{\Gamma}_{i,k} f_k.$$

Мы не останавливаемся здесь на дальнейших подробностях.

n° 2. Применение аналитического продолжения для приближенного решения интегральных уравнений. Ряд (7) для резольвенты Γ представляет разложение ее по степеням параметра λ около точки $\lambda = 0$ и будет поэтому сходящимся до первой особой точки этой функции. Следовательно, ряд будет сходящимся, пока $|\lambda| < |\lambda_1|$, где λ_1 — первое собственное число ядра. Вследствие этого рядом (7) нельзя пользоваться, если $|\lambda| > |\lambda_1|$, так как он расходится, и не совсем удобно пользоваться, если $|\lambda|$ близок к $|\lambda_1|$, так как тогда ряд сходится медленно. В этих случаях оказывается часто удобным, именно, когда нам известно в некоторой мере расположение собственных чисел интегрального уравнения, применить аналитическое продолжение. Укажем несколько приемов аналитического продолжения, наиболее удобных для данного случая. При этом мы считаем для удобства в дальнейшем, что $\lambda_1 = -1$; очевидно, всегда можно посредством замены λ на $\overline{\lambda} = -\frac{\lambda}{\lambda_1}$ этого добиться.

1. Непосредственное продолжение. Решение при $|\lambda| < 1$ дается сходящимся рядом:

$$\varphi = \varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \dots$$

Мы можем с помощью этого ряда вычислить значения $\varphi(x, \lambda)$ и производных ее по λ: $\frac{d^k}{d\lambda^k}\varphi(x, \lambda)$, например при $\lambda = \frac{1}{2}$. Это позволит составить разложение решения $\varphi(x, \lambda)$ по степеням $\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$. Это разложение можно получить и прямо, заменяя в данном ряду λ на $\left(\lambda' + \frac{1}{2}\right)$ $\left(\text{имея в виду } \lambda' = \lambda - \frac{1}{2}\right)$ и переразлагая ряд по степеням λ'. Расстояние точки $\lambda = \frac{1}{2}$ до собственного значения $\lambda_1 = -1$ равно $1\frac{1}{2}$, и потому, если не помешают следующие собственные значения, полученный ряд по степеням λ' будет иметь радиус сходимости $1\frac{1}{2}$ и даст возможность, например, вычислять решение при $1 \leqslant \lambda < 2$, что было невозможно с помощью первоначального ряда. Независимо от расположения других собственных значений кроме λ_1, перестроенный ряд будет наверное сходиться при $\lambda = 1$, т. е. $\lambda' = \frac{1}{2}$, если только само это значение не является собственным.

Ряд перестроенный имеет следующий вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\lambda' + \frac{1}{2}\right)\varphi_1 + \left(\lambda' + \frac{1}{2}\right)^2 \varphi_2 + \dots =$$

$$= \left(\varphi_0 + \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{4}\varphi_2 + \frac{1}{8}\varphi_3 + \dots\right) + \left(\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{3}{4}\varphi_3 + \dots\right)\lambda' +$$

$$+ \left(\varphi_2 + \frac{3}{2}\varphi_3 + \dots\right)\lambda'^2 + \dots$$

Этим же рядом можно пользоваться и для приближенного вычисления значений φ в отдельных точках: $\widetilde{\varphi}^{(0)}$. При этом придется использовать последовательные приближения $\widetilde{\varphi}_n^{(0)}$ (см. пред. п°).

2. Уничтожение полюса посредством домножения. Предположим известным, что первое собственное число ядра есть $\lambda_1 = -1$ и это есть простой полюс для резольвенты. [Например собственное число всегда будет простым полюсом, если ядро симметрическое $K(x, y) = K(y, x)$]. В таком случае функции $(\lambda+1)\Gamma(x, y, \lambda)$ или $(\lambda+1)\varphi(x, \lambda)$ уже не имеют $\lambda = -1$ особой точкой, а потому ряд по степеням λ для этих функций будет сходящимся при $|\lambda| < |\lambda_2|$, в частности наверное сходится, если $|\lambda| = 1$. Ряды же для этих функций находятся непосредственно, именно:

$$(\lambda+1)\Gamma(x, y, \lambda) = [K(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \ldots](\lambda+1) =$$
$$= K(x, y) + \lambda[K(x, y) + K_2(x, y)] + \lambda^2[K_2(x, y) + K_3(x, y)] + \ldots$$
$$(\lambda+1)\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x) + \lambda[\varphi_0(x) + \varphi_1(x)] + \ldots$$

В частности при $\lambda = 1$

$$\Gamma(x, y, 1) = \frac{1}{2}[K + (K + K_2) + (K_2 + K_3) + \ldots],$$

причем перегруппировку здесь произвести нельзя, так как тогда ряд может превратиться в расходящийся.

Этими же рядами можно пользоваться и для вычисления значений резольвенты в отдельных точках, если итерированные ядра находились численным образом.

3. Преобразование ряда посредством замены переменной. Общая идея состоит в следующем. Предположим, что мы можем ввести вместо λ новую переменную η, полагая $\eta = \varphi(\lambda)$; $\lambda = \varphi^*(\eta)$, так, чтобы: 1) начало $\lambda = 0$ перешло в начало $\eta = 0$, 2) точки $\eta_1, \eta_2, \ldots$, в которые перейдут $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, были бы $\geqslant 1$ по модулю: $|\eta_1| \geqslant 1, |\eta_2| \geqslant 1, \ldots$, 3) для интересующего нас значения λ (при котором нужно решить уравнение) было бы соответствующее $|\eta| = |\varphi(\lambda)| < 1$.

Если нам известна такая функция $\eta = \varphi(\lambda)$, то заменяя в ряду для резольвенты или решения λ на φ^*, раскладывая полученный ряд по степеням η, мы получим ряд, имеющий в силу условия второго радиус сходимости $\geqslant 1$, а потому наверное сходящийся при интересующем нас значении η, для которого $|\eta| < 1$.

Дадим два примера подобного преобразования.

Пример I. Пусть известно, что все собственные значения находятся в полуплоскости $\mathrm{Re}[\lambda] \leqslant -1$. Преобразуем в таком случае переменную, полагая:

$$\eta = \frac{\lambda}{\lambda+2}; \quad \lambda = \frac{2\eta}{1-\eta} = 2[\eta + \eta^2 + \eta^3 + \ldots],$$

т. е. беря за $\varphi(\lambda)$ функцию, отображающую полуплоскость $\mathrm{Re}[\lambda] \geqslant -1$ на единичный круг $|\eta| \leqslant 1$.

Вводя эту подстановку, получим для Γ например следующий ряд:

$$\lambda\Gamma(x, y, \lambda) = \lambda K(x, y) + \lambda^2 K_2(x, y) + \ldots =$$
$$= \frac{2\eta}{1-\eta} K + \left(\frac{2\eta}{1-\eta}\right)^2 K_2 + \left(\frac{2\eta}{1-\eta}\right)^3 K_3 + \ldots =$$
$$= 2(\eta + \eta^2 + \eta^3 + \ldots) K + 4(\eta^2 + 2\eta^3 + 3\eta^4 + \ldots) K_2 +$$
$$+ 8(\eta^3 + 3\eta^4 + 6\eta^5 + \ldots) K_3 + \ldots =$$
$$= 2K\eta + (2K + 4K_2)\eta^2 + (2K + 8K_2 + 8K_3)\eta^3 + \ldots$$

Этот ряд сходится при $|\eta| < 1$, что отвечает всем λ из полуплоскости $\mathrm{Re}[\lambda] > -1$. В частности для нахождения $\Gamma(x, y, 1)$ нужно принять $\lambda = 1$, а потому $\eta = \frac{\lambda}{\lambda+2} = \frac{1}{3}$; следовательно получим быстро сходящийся ряд.

Пример II. Предположим, что все собственные числа вещественны и $\leqslant -1$. В этом случае за функцию $\varphi(\lambda)$ принимаем функцию, отображающую плоскость с вырезом от $\lambda = -1$ до $-\infty$ на единичный круг, именно

$$\eta = \varphi(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda+1} - 1}{\sqrt{\lambda+1} + 1}.$$

В таком случае полученный после подстановки ряд по степеням η будет сходиться еще быстрее, чем предыдущий, например $\lambda = 1$ будет отвечать $\eta = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2} \cong \frac{1}{6}$. Для построения этого ряда нужно решить предыдущее уравнение относительно λ, подставить в ряд по степеням λ вместо λ выражение:

$$\lambda = \left(\frac{\eta+1}{1-\eta}\right)^2 - 1 = (\eta+1)^2(1 + 2\eta + 3\eta^2 + \ldots) - 1 =$$
$$= 4(\eta + 2\eta^2 + 3\eta^3 + \ldots)$$

и полученный ряд расположить по степеням η.

§ 3. Применение интегральных уравнений к решению задачи Дирихле

п° 1. Интегральное уравнение теории потенциала. Мы прежде всего приведем вывод соответствующего интегрального уравнения.

Заметим перед этим, что если обозначить через r расстояние между точками $P(x, y)$ и $M(\xi, \eta)$, то $\lg r$, рассматриваемый как функция переменных x и y, есть функция гармоническая. В этом можно убедиться, проверив непосредственной подстановкой, что функция

$$(1) \quad u = \lg r = \lg \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = \frac{1}{2}\lg[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Производные функции u по параметрам ξ и η также будут гармоническими, например для $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Отсюда ясно, что и производная этой функции по любому постоянному направлению L по переменным ξ и η, представляющая линейную комбинацию $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, также представляет функцию гармоническую.

Если обозначить через φ угол, который образует вектор $\overrightarrow{PM}$ с этим направлением L, то эта производная, как это ясно геометрически, будет:

$$\frac{\partial u}{\partial L} = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial L} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Итак, $\frac{\cos\varphi}{r}$ функция гармоническая.

После этого предварительного замечания перейдем к рассмотрению задачи Дирихле. Пусть дана конечная область D, ограниченная простым замкнутым контуром L. Предположим, что уравнение контура дано в параметрическом виде; за параметр принята дуга s:

$$x = x(s); \quad y = y(s) \qquad 0 \leqslant s \leqslant s_0,$$

при этом предполагаем, что функции $x(s)$ и $y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$, не обращающиеся в нуль одновременно. Требуется найти функцию u, гармоническую в области D, которая на контуре обращается в заданную непрерывную функцию дуги $f(s)$:

$$u = f(s) \text{ на } L.$$

Возьмем любую точку $M(\xi, \eta)$ на контуре L и обозначим через φ угол, образованный вектором $\overrightarrow{PM}$, проведенным из точки $P(x, y)$, с нормалью, построенной в точке M. Тогда, по сказанному выше, функция $\frac{\cos\varphi}{r}$ будет гармонической функцией переменных x и y в области D. Пусть теперь $\mu(s)$ — произвольная непрерывная функция, в таком случае интеграл

$$V(x, y) = \int_0^{s_0} \frac{\cos\varphi}{r}\,\mu(s)\,ds \tag{3}$$

есть гармоническая функция переменных x и y в области D. В самом деле, вычисляя ΔV можем произвести дифференцирование под знаком интеграла, но тогда, так как $\mu(s)$ от x и y не зависит, а $\frac{\cos\varphi}{r}$ функция гармоническая, получим $\Delta V = 0$. Функция V носит название потенциала двойного слоя, и $\mu(s)$ называют его плотностью. Придадим выражению V другую форму, чтобы сделать более ясной геометрически его структуру. Обозначим через ω угол, который образует вектор $\overrightarrow{PM}$ с положительным направлением оси OX. Если изменять положение точки M, то угол ω представляет функцию s, а $d\omega$ — угол, под которым элемент дуги ds виден из точки P. Но проекция ds на перпендикуляр к вектору $\overrightarrow{PM}$ есть $ds\cos\varphi$, а потому угол, под которым ds видно из точки P, есть $\frac{\cos\varphi\, ds}{r}$; итак:

$$\frac{\cos\varphi}{r}\,ds = d\omega.$$

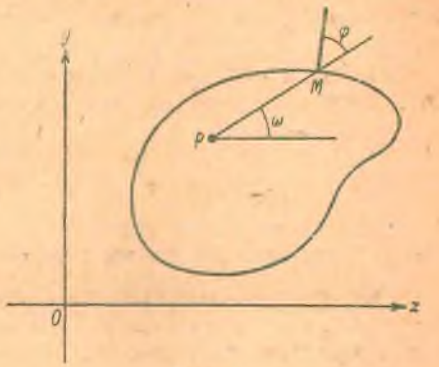


Рис. 4.

Поэтому выражению V можно придать вид

$$V = \int_0^{s_0} \frac{\cos\varphi}{r}\,\mu(s)\,ds = \tag{4}$$

$$= \int_L \mu(s)\,d\omega = \int_0^{s_0} \frac{d\omega}{ds}\,\mu(s)\,ds.$$

При этом ω представляет функцию s, а также x и y:

$$\omega = \omega(s, x, y).$$

Примем в частности плотность $\mu(s) = 1$, тогда $V = \int_L d\omega$ дает очевидно угол, под которым вся кривая L видна из точки P. Ясно, что этот угол равен 2π, если точка P внутри D, равен π, если точка M лежит на контуре L, и равен наконец нулю, если M вне контура L:

$$\int_0^{s_0} \frac{d\omega}{ds}\,ds = \begin{cases} 2\pi & \text{если } P \text{ внутри } D, \\ \pi & \text{если } P \text{ на } L, \\ 0 & \text{если } P \text{ вне } D. \end{cases} \tag{5}$$

Попытаемся теперь найти решение задачи Дирихле в форме потенциала двойного слоя, именно попробуем найти плотность $\mu(s)$ так, чтобы функция:

$$u(x, y) = \int_0^{s_0} \mu(s)\,\frac{d\omega}{ds}\,ds \tag{6}$$

имела бы при приближении к контуру значение $f(s)$.

Определим, чему равен предел $u(x, y)$, когда точка $P(x, y)$ стремится к точке P_0 на контуре, отвечающей дуге равной σ, т. е. к точке $P_0[x(\sigma), y(\sigma)]$. Имеем

$$(7)\quad \lim_{P\to P_0} u(x, y) = \lim_{P\to P_0} \int_0^{s_0} \mu(s)\, d\omega = \lim_{P\to P_0} \left[\int_0^{s_0} [\mu(s) - \mu(\sigma)] \frac{d\omega(s, x, y)}{ds} ds + \right.$$

$$\left. + \mu(\sigma) \int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, x, y)}{ds}\, ds \right] = \int_0^{s_0} [\mu(s) - \mu(\sigma)] \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} ds + 2\pi\mu(\sigma)^1 =$$

$$= \int_0^{s_0} \mu(s) \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} ds + \pi\mu(\sigma),$$

так как $\int_0^{s_0} \mu(\sigma)\, d\omega = \pi\mu(\sigma)$. Итак мы должны иметь:

$$(8)\quad \pi\mu(\sigma) + \int_0^{s_0} \mu(s) \frac{d\omega}{ds} ds = f(\sigma).$$

Полученное уравнение и есть интегральное уравнение для определения функции μ. Если мы разделим еще на π, то приведем его к виду:

$$(9)\quad \mu(\sigma) - \int_0^{s_0} K(s, \sigma)\mu(s)\, ds = \frac{1}{\pi} f(\sigma),$$

где ядро

$$(10)\quad K(s, \sigma) = -\frac{1}{\pi}\frac{d\omega}{ds} = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y(s) - y(\sigma)}{x(s) - x(\sigma)},$$

так как угол ω очевидно выражается именно так.

Заметим, что интегральное уравнение могло быть составлено таким же образом, если бы за параметр в уравнении кривой L была бы взята не дуга s, а некоторый другой параметр t. Уравнение имело бы тогда вид:

$$(11)\quad \mu(\tau) + \int_0^{t_0} \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{y(t) - y(\tau)}{x(t) - x(\tau)} \mu(t)\, dt = \frac{1}{\pi} f(t).$$

Если ввести в уравнении (9) перед знаком интеграла параметр

$$(12)\quad \mu(\sigma) - \lambda \int_0^{s_0} K(s, \sigma)\mu(s) \cdot ds = \frac{1}{\pi} f(\sigma),$$

то можно показать, что значение $\lambda = 1$, которое для нас интересно, не является собственным числом для данного интегрального уравнения.

[1] Здесь $\omega(s, \sigma)$ есть краткое обозначение для $\omega(s, x(\sigma), y(\sigma))$.

Поэтому, на основании общей теории интегральных уравнений, уравнение (9) имеет единственное решение при любом свободном члене $f(\sigma)$.

Для приближенного решения уравнения существенную роль играет распределение собственных значений этого уравнения. Прежде всего можно показать, что они все вещественны. Далее $\lambda = -1$ собственное значение для этого уравнения, так как очевидно постоянная $\mu(s) = C$ удовлетворяет однородному уравнению (9), ибо, как мы видели выше (5):

$$\pi C - \int_0^{s_0} C \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} ds = 0.$$

Наконец можно установить, что в промежутке $(-1, 1)$ собственных значений нет. [1]

Тот факт, что $\lambda = 1$ не является собственным значением ядра, и между точками -1 и 1 собственных значений нет, позволяет утверждать, что все указанные в предыдущем параграфе приемы аналитического продолжения применимы.

В частности прием продолжения с помощью домножения приводит к следующему ряду для искомого решения:

$$(13)\quad \mu(\sigma) = \frac{1}{2}\mu_0(\sigma) + \frac{1}{2}[\mu_0(\sigma) + \mu_1(\sigma)] + \frac{1}{2}[\mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma)] + \dots,$$

где

$$(14)\quad \mu_0(\sigma) = \frac{1}{\pi} f(\sigma);\ \mu_{n+1}(\sigma) =$$

$$= \int_0^{s_0} K(s, \sigma)\mu_n(s)\, ds = -\frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} \mu_n(s)\, ds.$$

Остановимся более подробно на третьем приеме. Согласно этому приему мы должны ввести в ряду, дающем разложение решения по степеням λ, новый параметр τ_1, полагая $\lambda = \varphi(\tau_1)$, и переразложить ряд по степеням τ_1.

В качестве двух возможных подстановок там были указаны $\lambda = \frac{2\tau_1}{1 - \tau_1}$ и $\lambda = \left(\frac{\tau_1 + 1}{1 - \tau_1}\right)^2 - 1$. Обе эти подстановки дают удовлетворительный результат для данной задачи. Применение их не представляет никаких особенностей по сравнению с общим случаем, кроме того мы встретимся с ними ниже в примере, поэтому мы не останавливаемся здесь на них подробнее. В следующем n° мы рассмотрим подробнее другую подстановку.

n° 2. Метод Неймана. Для нас представит здесь интерес другая подстановка, именно $\lambda = \frac{\tau_1}{1 - \tau_1}$. Эта подстановка переводит $\lambda = 1$

[1] См. Гурса, т. III, ч. 2, стр. 172.

в $\gamma_1 = \frac{1}{2}$; $\lambda = -1$ в $\gamma_1 = \infty$. Наконец промежутку $-\frac{1}{2} \leqslant \gamma_1 \leqslant \frac{1}{2}$ будет соответствовать $-\frac{1}{3} \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Как ясно из сказанного выше, в последнем промежутке нет собственных значений, а потому ряд по степеням γ_1 будет иметь радиус сходимости $> \frac{1}{2}$ и наверное будет сходиться при интересующем нас значении $\gamma_1 = \frac{1}{2}$. Для получения этого ряда по степеням γ_1 мы не будем пользоваться рядом по степенам λ, а непосредственно в данное интегральное уравнение введем параметр γ_1. Имеем тогда

$$\mu(\sigma) - \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1}\int_0^{s_0} K(s, \sigma)\,\mu(s)\,ds = \frac{1}{\pi} f(\sigma)$$

$$(1-\gamma_1)\,\mu(\sigma) - \gamma_1 \int_0^{s_0} K(s, \sigma)\,\mu(s)\,ds = \frac{1-\gamma_1}{\pi} f(\sigma)$$

или, пользуясь тем, что $\int_0^{s_0} K(s, \sigma)\,ds = -1$ [см. (5) и (10)], можем переписать еще иначе:

$$\mu(\sigma) - \gamma_1 \int_0^{s_0} K(s, \sigma)\,[\mu(s) - \mu(\sigma)]\,ds = \frac{1-\gamma_1}{\pi} f(\sigma), \quad (15)$$

где должно быть взято $\gamma_1 = \frac{1}{2}$. Если это уравнение решать по методу последовательных приближений, разыскивая решение в виде ряда по степеням γ_1, то получим его в следующем виде:

$$\mu(\sigma) = \mu_0(\sigma) + \mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma) + \ldots, \quad (16)$$

где

$$\left\{\begin{aligned} \mu_0(\sigma) &= \frac{1}{2\pi} f(\sigma) \\ \mu_{n+1}(\sigma) &= \frac{1}{2}\int_0^{s_0} K(s, \sigma)\,[\mu_n(s) - \mu_n(\sigma)]\,ds = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\,[\mu_n(\sigma) - \mu_n(s)]\,ds. \end{aligned}\right. \quad (17)$$

[1] К уравнению (15) можно было притти и проще. Именно приравняв $f(s)$ выражение (7), перед последним преобразованием, мы получили бы уравнение (15) при $\gamma = \frac{1}{2}$.

Ряд (16) для решения задачи Дирихле был предложен еще в 1877 году Нейманом.[1] Этот ряд будет сходящимся в случае любой области, удовлетворяющей поставленным выше условиям, однако для случая выпуклого контура эта сходимость была установлена еще самим Нейманом, с помощью совершенно элементарных средств.

Мы приведем вкратце это доказательство. Сделаем несколько предварительных замечаний.

Прежде всего, как мы говорили выше, контур будем предполагать выпуклым и притом в узком смысле, т. е. без прямолинейных участков.

1. Все функции $\mu_n(\sigma)$ непрерывны.

Для $\mu_0(\sigma) = \frac{1}{2\pi} f(\sigma)$ это справедливо по предположению. Пусть далее $\mu_n(\sigma)$ непрерывна; для того, чтобы убедиться в непрерывности функции $\mu_{n+1}(\sigma)$ при $\sigma = \sigma_0$, рассмотрим ее выражение:

$$\mu_{n+1}(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\,[\mu_n(\sigma) - \mu_n(s)]\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0} [\mu_n(\sigma) - \mu_n(\sigma_0)]\,\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0} [\mu_n(\sigma_0) - \mu_n(s)]\,\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}[\mu_n(\sigma) - \mu_n(\sigma_0)] + \frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0} [\mu_n(\sigma_0) - \mu_n(s)]\,\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\,ds.$$

Здесь первый член непрерывен по предположению, а второй также непрерывен при $\sigma = \sigma_0$ благодаря тому, что первый множитель $[\mu_n(\sigma_0) - \mu_n(s)]$ подинтегральной функции обращается в нуль при $s = \sigma_0$.

2. Пусть функция $f(s)$ положительна и ограничена $0 \leqslant f(s) \leqslant K$, тогда

$$|J| = \left|\int_L f(s)\left[\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} - \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds}\right] ds\right| < h\pi K, \quad (18)$$

где $h < 1$ постоянная, не зависящая от выбора точек σ_1, σ_2 и функции $f(s)$.

В самом деле, разобьем контур C на две части: L', где выполнено неравенство

$$\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} \geqslant \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds},$$

и L'', где

$$\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} < \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds}.$$

Очевидно тогда, что $|J|$ окажется максимальным, если мы возьмем функцию $f(s)$, равной K на L' и нулю на L'', или наоборот. Остана-

[1] См. Гурса, т. III, ч. 1 стр. 170. C. Neumann, Untersuchungen über das logarithmische Potential. Leipzig 1877.

вливаясь для определенности на первом случае, имеем

$$|J| = K \int_{L'} \left[\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} - \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds} \right] ds.$$

Стоящий справа интеграл означает геометрически разность тех углов, под которыми видна часть L' контура L из точек, отвечающих $s = \sigma_1$ и $s = \sigma_2$. Очевидно, каждый член этой разности $\leqslant \pi$ и $\geqslant 0$, причем одновременный знак равенства исключен. Итак при каждых данных σ_1 и σ_2:

$$\int_{L'} \left[\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} - \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds} \right] ds < \pi.$$

Далее, величина, стоящая слева, представляет непрерывную функцию σ_1 и σ_2, а потому и верхняя ее граница $< \pi$. Обозначим эту верхнюю границу через $h\pi\,(h < 1)$, тогда по предыдущему

$$|J| < Kh\pi$$

и неравенство (18) установлено.

Приведем теперь доказательство сходимости ряда (18), для чего оценим $\mu_i(\sigma)$. Пусть $m \leqslant \mu_0(\sigma) \leqslant M \quad \left[\mu_0(\sigma) = \frac{1}{2\pi} f(\sigma) \right]$, тогда

$$\mu_1(\sigma_2) - \mu_1(\sigma_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_0} \left\{ [\mu_0(\sigma_2) - \mu_0(s)] \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds} - \right.$$

$$\left. - [\mu_0(\sigma_1) - \mu_0(s)] \cdot \frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} \right\} ds = \frac{1}{2\pi} \left[\mu_0(\sigma_2) \int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} ds - \right.$$

$$\left. - \mu_0(\sigma_1) \int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} ds \right] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{s} [\mu_0(s) - m] \left[\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} - \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds} \right] ds +$$

$$+ \frac{m}{2\pi} \int_0^{s_0} \left[\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} - \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds} \right] ds.$$

Здесь первый член равен $\frac{1}{2}[\mu_0(\sigma_2) - \mu_0(\sigma_1)]$ и не превосходит по модулю $\frac{1}{2}(M - m)$. Во втором члене функция $[\mu_0(s) - m]$ может играть роль $f(s)$ в предложении 2, а потому второй интеграл не превзойдет $\frac{1}{2} h (M - m)$, наконец третий интеграл равен нулю. Итак

$$|\mu_1(\sigma_2) - \mu_1(\sigma_1)| \leqslant \frac{1}{2}(M - m) + \frac{1}{2} h (M - m) = \rho (M - m),$$

где

$$\rho = \frac{1 + h}{2} < 1.$$

Таким же точно образом можно получить последовательно, что:

$$|\mu_i(\sigma_2) - \mu_i(\sigma_1)| < (M - m)\rho^i. \tag{19}$$

Отсюда заключаем:

$$|\mu_i(\sigma)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} [\mu_{i-1}(\sigma) - \mu_{i-1}(s)]\, ds \right| <$$

$$< (M - m)\rho^{i-1} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} \right| = \frac{M - m}{2} \rho^{i-1}. \tag{20}$$

На основании полученного неравенства ясна уже и равномерная сходимость ряда (16) и то, что полученное решение $\mu(\sigma)$ непрерывно. В том, что $\mu(\sigma)$ удовлетворяет предложенному уравнению, можно убедиться хотя бы непосредственной подстановкой.

Отметим еще следующее неравенство:

$$|\mu(\sigma) - \mu_0(\sigma)| = |\mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma) + \ldots| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M - m}{2} (1 + \rho + \rho^2 + \ldots) = \frac{M - m}{2(1 - \rho)}. \tag{21}$$

Мы покажем теперь, что если предположить кривую L имеющей всюду конечный радиус кривизны, то для величины h и ρ можно дать вполне точную оценку через известные геометрические элементы. [1]

Для этой цели оценим прежде всего снизу $\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}$, которая для выпуклой области представляет величину положительную. Обозначим через $\theta = \theta(s)$ угол касательной к кривой L с положительным направлением оси OX. Ясно, во-первых, что

$$\left[\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} \right]_{s=\sigma} = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2R_\sigma},$$

где R_σ — радиус кривизны кривой L в точке, соответствующей $s = \sigma$. В самом деле, геометрически $\left[\frac{d\omega}{ds} \right]_{s=\sigma}$ есть скорость поворота секущей, отнесенная к дуге, и потому очевидно она равна половине кривизны.

Далее, если минимум $\frac{d\omega}{ds}$ достигается не при $s = \sigma$, то в такой

[1] См. Н. Крылов и Н. Боголюбов, Д. А. Н. 1929, № 12. Там содержатся частично приведенные ниже рассуждения.

точке должна быть $\frac{d^2\omega}{ds^2}=0$. Вычислим эту вторую производную. Обозначим через $r_{s,\sigma}$ длину вектора, идущего от точки s к σ, а через $\omega_{s,\sigma}=\omega(s,\sigma)$, как и раньше, угол, образованный им с осью OX: имеем:

$$\omega_{s,\sigma}=\operatorname{arctg}\frac{y(s)-y(\sigma)}{x(s)-x(\sigma)}$$

$$\frac{d\omega_{s,\sigma}}{ds}=\frac{1}{1+\left[\frac{y(s)-y(\sigma)}{x(s)-x(\sigma)}\right]^2}\cdot\frac{[x(s)-x(\sigma)]\frac{dy}{ds}-[y(s)-y(s)]\frac{dx}{ds}}{[x(s)-x(\sigma)]^2}=$$

$$=\frac{[x(s)-x(\sigma)]\sin\theta-[y(s)-y(\sigma)]\cos\theta}{r^2_{s,\sigma}}=\frac{1}{r_{s,\sigma}}(\cos\omega_{s,\sigma}\sin\theta-$$

$$-\sin\omega_{s,\sigma}\cos\theta)=\frac{\sin(\theta-\omega_{s,\sigma})}{r_{s,\sigma}}$$

$$\frac{d^2\omega}{ds^2}=$$

$$=\frac{r\cos(\theta-\omega)\left[\frac{d\theta}{ds}-\frac{d\omega}{ds}\right]-\sin(\theta-\omega)\frac{1}{r}\{[x(s)-x(\sigma)]\cos\theta+[y(s)-y(\sigma)]\sin\theta\}}{r^2}=$$

$$=\frac{r\cos(\theta-\omega)\frac{d\theta}{ds}-\cos(\theta-\omega)\sin(\theta-\omega)-\sin(\theta-\omega)\cos(\theta-\omega)}{r^2}=$$

$$=\frac{\cos(\theta-\omega)}{r^2}\left[r\frac{1}{R_s}+2\sin(\omega-\theta)\right].$$

Отсюда видно, что $\frac{d^2\omega_{s,\sigma}}{ds^2}$ обращается в нуль только, если $\cos(\omega_{s,\sigma}-\theta)=0$ или $\sin(\omega_{s,\sigma}-\theta)=\frac{r_{s,\sigma}}{2R_s}$, но тогда $\frac{d\omega_{s,\sigma}}{ds}$ обращается в $\frac{1}{r_{s,\sigma}}$ или соответственно в $\frac{1}{2R_s}$. Последнее значение, как мы видели, $\frac{d\omega_{s,\sigma}}{ds}$ принимает в частности при $s=\sigma$. Итак ясно, что если мы обозначим через d_0 максимальное расстояние между двумя точками кривой, а R_0 — максимальный радиус кривизны, то минимум $\frac{d\omega}{ds}$ будет $\geqslant$ меньшего из двух чисел $\frac{1}{d_0}$ и $\frac{1}{2R_0}$. Геометрически очевидно, однако, что $\frac{1}{2R_0}\leqslant\frac{1}{d_0}$, а потому, полагая $\frac{1}{2R_0}=\alpha$, можем утверждать, что

при всех рассматриваемых значениях s и σ

$$\frac{d\omega_{s,\sigma}}{ds}\geqslant\alpha. \tag{22}$$

После того как получена оценка для $\frac{d\omega}{ds}$, легко указать и число $h<1$, о котором идет речь в предложении 2.

Пусть действительно L' — некоторая часть контура L. Обозначим L'' ту часть L, которая остается после удаления L'. Пусть далее s' полная длина L' и $s''=s_0-s'$ длина L''. Имеем тогда:

$$J=\int_{L'}\left[\frac{d\omega(s,\sigma_1)}{ds}-\frac{d\omega(s,\sigma_2)}{ds}\right]ds=$$

$$=\int_{L}\frac{d\omega(s,\sigma_1)}{ds}\,ds-\int_{L''}\frac{d\omega(s,\sigma_1)}{ds}-\int_{L'}\frac{d\omega(s,\sigma_2)}{ds}\,ds\leqslant\pi-s''\alpha-s'\alpha=$$

$$=\pi\left(1-\frac{\alpha s_0}{\pi}\right)=\pi\left(1-\frac{s_0}{2\pi R_0}\right).$$

Таким же образом может быть установлено и обратное неравенство, а потому

$$|J|\leqslant\pi\left(1-\frac{s_0}{2\pi R_0}\right)=\pi h. \tag{23}$$

Следовательно, за h может быть взято число $1-\frac{s_0}{2\pi R_0}$; вычитаемое имеет здесь простое геометрическое значение: это есть отношение длины кривой L к максимальной длине круга кривизны.

Для задачи Дирихле может применяться рассмотренный в § 1 гл. I метод замены интегрального уравнения системой обыкновенных линейных уравнений. При этом имеющаяся здесь оценка для верхней границы искомой функции (21) позволяет с успехом дать оценку для погрешности, которая получается при применении метода.

Мы рассмотрим здесь более подробно один из возможных способов замены интегрального уравнения на систему алгебраических, именно способ, предложенный Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым.[1] Этот способ состоит в том, что в интегральном уравнении:

$$\mu(\sigma)+\frac{1}{\pi}\int_0^{s_0}\mu(s)\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}\,ds=f(\sigma) \tag{24}$$

[1] Цит. выше, стр. 144. Оценка погрешности проведена там несколько иначе.

входящий в него интеграл заменяют приближенно на следующую сумму:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\mu(s_j)\int_{s_j-\frac{\Delta s}{2}}^{s_j+\frac{\Delta s}{2}}\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}\,ds=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\mu(s_j)\left[\omega\left(s_j+\frac{\Delta s}{2},\sigma\right)-\omega\left(s_j-\frac{\Delta s}{2},\sigma\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\mu(s_j)\,\Delta\omega(s_j,\sigma).$$

Здесь Δs есть n-ая часть промежутка $(0, s_0)$: $\Delta s=\frac{s_0}{n}$; s_i — любые точки, отстоящие одна от другой на расстоянии Δs, например:

$$s_1=\frac{\Delta s}{2};\quad s_2=\frac{3}{2}\Delta s;\ \ldots;\ s_n=\frac{(2n-1)}{2}\Delta s=s_0-\frac{\Delta s}{2}.$$

Эта замена сводится к тому, что весь интеграл разбивается на интегралы по промежуткам $\left(s_j-\frac{\Delta s}{2},\ s_j+\frac{\Delta s}{2}\right)$, причем в каждом из этих интегралов выносится среднее значение функции $\mu(s)$, при этом берется значение μ именно в средней точке интервала. Итак заменим в интегральном уравнении (24) интеграл на сумму и положим в полученном равенстве последовательно $\sigma=s_1, s_2, \ldots, s_n$, придем тогда к системе уравнений для определения приближенных значений μ в точках s_j

$$\widetilde{\mu}(s_i)+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\mu}(s_j)\,\Delta_j\omega(s_j,s_i)=f(s_i),\qquad [i=1,\ 2,\ \ldots] \tag{25}$$

где для краткости положено

$$\Delta_j\omega(s_j,s_i)=\int_{s_j-\frac{\Delta s}{2}}^{s_j+\frac{\Delta s}{2}}\frac{d\omega(s,s_i)}{ds}\,ds. \tag{26}$$

Система уравнений (25) удобна тем, что коэфициенты ее $\Delta_j\omega(s_j, s_i)$ могут быть с удобством определены даже по чертежу.

Решая эту систему, найдем приближенные значения искомой функции в точках s_i: $\widetilde{\mu}(s_i)$. Соответствующие точные значения обозначим через $\mu(s_i)$. Если мы обозначим через z_i разность между ними

$$z_i=\mu(s_i)-\widetilde{\mu}(s_i),$$

то, как легко видеть, числа z_i удовлетворяют системе уравнений

$$z_i+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\Delta_j\omega(s_j,s_i)\,z_j=R(s_i), \tag{26}$$

где

$$R(\sigma)=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{s_0}\mu(s)\,\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}\,ds-\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\mu}(s_j)\,\Delta_j\omega(s_j,\sigma)\right]. \tag{27}$$

Обозначим R^* максимум величины $R(\sigma)$, оценкой этой величины мы займемся ниже, и оценим числа z_i.

Преобразуем прежде всего систему (26), а именно, пользуясь равенством

$$1=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\Delta_j\omega(s_j,s_i)\left(=\frac{1}{\pi}\int_0^{s_0}\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}\,ds\right),$$

перепишем ее в виде:

$$z_i=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\Delta_j\omega(s_j,s_i)\,(z_i-z_j)+\frac{1}{2}R(s_i). \tag{28}$$

Эта система уравнений аналогична уравнению Неймана и может быть решена тем же способом последовательных приближений. Именно решение z_i найдем в форме ряда:

$$z_i=z_i^{(0)}+z^{(1)}+\ldots, \tag{29}$$

где

$$z_i^{(0)}=\frac{R(s_i)}{2};\quad z_i^{(l+1)}=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\Delta_j\omega(s_j,s_i)\,(z_i^{(l)}-z_j^{(l)}). \tag{30}$$

Сходимость ряда (29) может быть установлена тем же способом, что и для ряда Неймана. Действительно, прежде всего справедливо неравенство, аналогичное (23)

$$\left|\sum_{j=1}^{n}{}'\Delta_j\omega(s_j,s_i)-\sum_{j=1}^{n}{}'\Delta_j\omega(s_j,s_k)\right|\leqslant\pi h=\pi\left(1-\frac{s_0}{2\pi R_0}\right), \tag{31}$$

если $\sum'$ означает сумму, взятую по некоторым, любым образом выбранным, j от 1 до n. Это неравенство справедливо, так как если взять за L' часть L, состоящую из промежутков $\left(s_j-\frac{\Delta s}{2},\ s_j+\frac{\Delta s}{2}\right)$, отвечающих тем j, по которым производится суммирование, то неравенство (31) есть не что иное, как (23). Далее аналогично предложению 2 можно показать, что если f_j любые числа и $0\leqslant f_i\leqslant K$, то

$$\left|\sum_{j=1}^{n}[\Delta_j\omega(s_j,s_i)-\Delta_j\omega(s_j,s_k)]\,f_j\right|\leqslant\pi hK. \tag{32}$$

Для установления этого достаточно разбить сумму на две $\sum'$ и $\sum''$, относя в одну те слагаемые, для которых разность в скобках положительна, и во вторую — те, для которых она отрицательна. Далее при оценке каждой суммы можно заменить f_i на K и воспользоваться неравенством (31).

Оценки для сходимости ряда дальше могут быть произведены так же, как и в способе Неймана (19) и (20), если только оперировать теперь с суммами, как там с интегралами. Эти оценки дадут:

$$|z_i^{(0)}| \leqslant \frac{R^*}{2}; \quad |z_i^{(l)}| \leqslant \frac{R^*}{2}\rho^{l-1}; \quad \rho = \frac{1+h}{2},$$

$$|z_i - z_i^{(0)}| \leqslant \frac{R^*}{2}(1+\rho+\rho^2+\ldots) = \frac{R^*}{2(1-\rho)},$$

$$|z_i| \leqslant \frac{R^*}{2} + \frac{R^*}{2(1-\rho)} = \frac{3-h}{2(1-h)}R^* = \frac{2+\frac{s_0}{2\pi R_0}}{2\cdot\frac{s_0}{2\pi R_0}}R^* = \tau R^*,$$

где τ — вполне определенная постоянная.

Итак в точках s_i мы имеем

$$|\mu(s_i) - \widetilde{\mu}(s_i)| \leqslant \tau R^*. \tag{33}$$

Отметим кроме того, что так как $\mu(s_i)$ удовлетворяют такой же системе, как и z_i, лишь с другими свободными членами: $f(s_i)$ вместо $R(s_i)$, то ясно, что если N есть верхняя граница $|f(s)|$, то

$$|\widetilde{\mu}(s_i)| < \tau N. \tag{34}$$

Далее для точного решения $\mu(s)$, как это следует из рассмотрений приведенных при изложении метода Неймана, будет выполнена аналогичная оценка

$$|\mu(s)| < \tau N. \tag{35}$$

В результате решения системы (25) мы получим приближенные значения функции μ в точках s_i: в остальных точках ее естественно определить приближенно на основании (24), как

$$\widetilde{\mu}(s) = f(s) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\mu}(s_j)\,\Delta_j\omega(s_j, s). \tag{36}$$

Оценим разницу между этим приближенным решением и точным $\mu(s)$. Для этой цели напишем точное равенство

$$\mu(s) = f(s) - \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\mu(s_j)\,\Delta_j\omega(s_j, s) + R(s), \tag{37}$$

где $R(s)$ — остаточный член, который по модулю $\leqslant R^*$. Сравнивая это

равенство с предыдущим (36) и пользуясь (33), находим:

$$|\mu(s) - \widetilde{\mu}(s)| \leqslant R^* + \tau R^*. \tag{38}$$

Займемся теперь оценкой R^*.

Для любой функции $F(s)$ имеем:

$$\int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} F(s)\,ds - F(a)\cdot h = \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} \left(F(a) + (s-a)F'(a) + \right.$$

$$\left. + \frac{F''(\zeta)}{2}(s-a)^2 \right) ds - F(a)\,h = \frac{1}{24}F''(s^*)\,h^3,$$

где s^* некоторое среднее значение $a - \frac{h}{2} \leqslant s^* < a + \frac{h}{2}$. Применяя эту формулу для функции

$$F'(s) = [\mu(s) - \mu(s_j)]\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds},$$

получим:

$$\left| \int_{s_j-\frac{\Delta s}{2}}^{s_j+\frac{\Delta s}{2}} [\mu(s) - \mu(s_j)]\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}\,ds \right|$$

$$\leqslant \frac{(\Delta s)^3}{24}\left\{ \max\left|\mu''(s)\cdot\frac{d\omega}{ds}\right| + 2\max\left|\mu'(s)\frac{d^2\omega}{ds^2}\right| + \right.$$

$$\left. + \max\left|\frac{d^3\omega}{ds^3}\mu(s)\right| \right\} \leqslant \frac{(\Delta s)^3}{24}Q.$$

При этом постоянную Q легко определить на основании данных задачи. В самом деле, пользуясь (35) и затем дифференцируя первоначальное уравнение (24), находим, что:

$$|\mu(s)| \leqslant \tau N$$

$$|\mu'(s)| < \max|f'| + [\max|\mu(s)|]\int_0^{s_0}\left|\frac{d^2\omega}{ds\,d\sigma}\right| ds = M_1,$$

$$|\mu''(s)| \leqslant \max|f''| + [\max|\mu(s)|]\int_0^{s_0}\left|\frac{d^3\omega}{ds^2 d\sigma}\right| ds = M_2,$$

где M_1, M_2, очевидно легко определяемые постоянные. Далее, значения

$$\frac{d^2\omega}{ds^2}, \quad \frac{d^3\omega}{ds^3}$$

могут быть также оценены, а потому и все выражение для Q может быть найдено. На основании этого

$$|R(s)| = \left| \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} \mu(s) \frac{d\omega}{ds}\, ds - \mu(s_j) \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} \frac{d\omega}{ds}\, ds \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \frac{(\Delta s)^2}{24} Q \cdot n \Delta s = \frac{1}{\pi} \frac{(\Delta s)^2}{24} Q s_0.$$

Последняя величина и может быть принята за оценку R^*, а потому имеем:

$$|\mu(s) - \tilde{\mu}(s)| \leqslant R^* (1 + \tau) \leqslant \frac{1+\tau}{\pi} \frac{(\Delta s)^2}{24} Q s_0.$$

После того как плотность $\mu(s)$ найдена с помощью потенциала двойного слоя, можем написать требуемое решение задачи Дирихле:

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} \tilde{\mu}(s) \frac{d}{ds} \omega(s, x, y)\, ds,$$

где

$$\omega(s, x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y(s) - y}{x(s) - x}.$$

Так как точное и приближенное значения u — функции гармонические, то максимум их разности достигается, когда точка (x, y) на контуре. Но значение приближенного решения на контуре есть

$$\tilde{\mu}(\sigma) + \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} \tilde{\mu}(s) \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} ds,$$

а значение точного решения

$$\mu(\sigma) + \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} \mu(s) \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} ds = f(\sigma),$$

отсюда разница на контуре будет равна:

$$|u(x, y) - \tilde{u}(x, y)| \leqslant |\mu(\sigma) - \tilde{\mu}(\sigma)| + \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} |\tilde{\mu}(s) - \mu(s)| \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+\tau}{\pi} \frac{(\Delta s)^2}{12} Q s_0.$$

Укажем впрочем, что приближенное решение, полученное в виде интеграла, можно заменить приближенно на сумму, а именно:

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} \tilde{\mu}(s) \frac{d}{ds} \omega(s, x, y) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} \mu(s) \frac{d}{ds} \omega(s, x, y)\, ds \cong \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mu}(s_j) \Delta_j \omega(s_j, x, y),$$

где $\tilde{\mu}(s_j)$ — найденные приближенные значения.

№ 3. *Пример.*[1] Рассмотрим в качестве примера задачу Дирихле для эллипса

$$x = a \cos t; \quad y = b \sin t \quad (a \geqslant b), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

т. е. задачу определения гармонической внутри эллипса функции $u(x, y)$, которая на контуре обращается в заданную функцию $g(t)$:

$$u(a \cos t, \ b \sin t) = g(t).$$

Эта задача, если искать решение в виде потенциала двойного слоя

$$u(x, y) = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega(t, x, y)}{dt} \mu(t)\, dt,$$

приводит к уравнению (11)

$$\mu(\tau) + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{y(t) - y(\tau)}{x(t) - x(\tau)} \mu(t)\, dt = \frac{1}{\pi} g(\tau).$$

Положим для краткости

$$K(t, \tau) = \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{y(t) - y(\tau)}{x(t) - x(\tau)}.$$

Раскрывая это выражение, имеем

$$K(t, \tau) = \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{b \sin t - b \sin \tau}{a \cos t - a \cos \tau} = \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \frac{2 \cos \frac{t+\tau}{2} \cdot \sin \frac{\tau - t}{2}}{-2 \sin \frac{t+\tau}{2} \sin \frac{\tau - t}{2}} =$$

$$= -\frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \operatorname{ctg} \frac{t+\tau}{2} = \frac{\frac{1}{2} ab}{a^2 \sin^2 \frac{t+\tau}{2} + b^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2}}.$$

---

[1] Этот пример рассмотрен в цитир. на стр. 114 работе Nyström'a в Comm. Ph.-Math. IV. S. S. Fennica, стр. 32. См. также Bairstow-Berry Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 95, стр. 457 — 475.

Или, предполагая $b \neq a$, т. е. исключая случай круга, можем $K(s, t)$ придать следующий вид, удобный для численных подсчетов:

$$K(t, \tau) = \frac{\dfrac{ab}{a^2 - b^2}}{\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \cos(t + \tau)}.$$

Будем для простоты предполагать, что условия симметричны относительно координатных осей, т. е. $g(-t) = g(t)$; $g\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = g\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, тогда искомая функция $\mu(t)$ будет удовлетворять тому же условию. В интегральном уравнении заменим интеграл на сумму следующим образом. Для определенности выбираем в промежутке $(0, 2\pi)$ 16 точек: 4 точки возьмем в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, пусть это будут t_1, t_2, t_3, t_4, остальные точки t_5, t_6, ... t_{16} берем симметрично относительно осей:

$$t_8 = \pi - t_1;\ t_9 = \pi + t_1;\ t_{16} = 2\pi - t_1;\ t_7 = \pi - t_2;\ t_{10} = \pi + t_2;$$
$$t_{15} = 2\pi - t_2;\ t_6 = \pi - t_3;\ t_{11} = \pi + t_3;\ t_{14} = 2\pi - t_3;\ t_5 = \pi - t_4;$$
$$t_{12} = \pi + t_4;\ t_{13} = 2\pi - t_4.$$

В силу симметрии задачи:

$$g(t_1) = g(t_8) = g(t_9) = g(t_{16});\ g(t_2) = g(t_7) = g(t_{10}) = g(t_{15});$$
$$g(t_3) = g(t_6) = g(t_{11}) = g(t_{14});\ g(t_4) = g(t_5) = g(t_{12}) = g(t_{13});$$
$$\mu(t_1) = \mu(t_8) = \mu(t_9) = \mu(t_{16});\ \mu(t_2) = \mu(t_7) = \mu(t_{10}) = \mu(t_{15})$$
$$\mu(t_3) = \mu(t_6) = \mu(t_{11}) = \mu(t_{14});\ \mu(t_4) = \mu(t_5) = \mu(t_{12}) = \mu(t_{13}).$$

Мы рассмотрим для определенности две формулы квадратур: формулу Гаусса и формулу прямоугольников. Формулу Гаусса применяем для промежутка $(0, \pi)$ с восемью ординатами. Тогда абсциссы t_5, t_6, t_7 и t_8 сами получатся симметричными точкам t_1, t_2, t_3, t_4. За точки t_1, t_2, t_3, t_4, преобразовав соответствующие абсциссы Гаусса к промежутку $(0, \pi)$, должны принять:
$t_1 = 3°34'26'',09$; $t_2 = 18°18'0'',06$; $t_3 = 42°42'7'',50$; $t_4 = 73°29'27'',18$.

Для промежутка $(\pi, 2\pi)$ мы возьмем ту же формулу Гаусса, только вместо точек $t_1, \ldots, t_8$ воспользуемся точками $t_9, \ldots, t_{16}$. Формула Гаусса в применении к интегралу $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} K(t, \tau)\, \mu(t)\, dt$ дает

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t, \tau)\, \mu(t)\, dt \cong \sum_{k=1}^{16} a_k K(t_k, \tau)\, \mu(t_k),$$

при этом коэфициенты a_k, благодаря присутствию множителя $\frac{1}{\pi}$, должны быть взяты те же, что и для промежутка $(0, 1)$ при 8 ординатах, а именно:

$$a_1 = a_8 = a_9 = a_{16} = 0{,}0506143;\quad a_2 = a_7 = a_{10} = a_{15} = 0{,}1111905$$
$$a_3 = a_6 = a_{11} = a_{14} = 0{,}1568533;\quad a_4 = a_5 = a_{12} = a_{13} = 0{,}1813419$$

Подставляя вместо интеграла сумму и полагая $\tau = t_1, t_2, \ldots$ получим систему уравнений

$$\tilde{\mu}(t_i) + \sum_{k=1}^{16} a_k K(t_k, t_i)\, \tilde{\mu}(t_k) = \frac{1}{\pi}\, g(t_i). \qquad [i = 1, 2, \ldots 16]$$

Мы получили систему 16 уравнений для определения 16 неизвестных $\tilde{\mu}(t_i)$ — приближенных значений функции μ в точках t_i. Однако в силу упомянутой выше симметрии можно оставить 4 неизвестных $\tilde{\mu}(t_1)$, $\tilde{\mu}(t_2)$, $\tilde{\mu}(t_3)$, $\tilde{\mu}(t_4)$ и сохранить лишь 4 первых уравнения, так как остальные уравнения их повторяют.

Группируя члены с каждым неизвестным, можем записать систему в виде

$$\tilde{\mu}(t_i) + \sum_{k=1}^{4} B_{i,k}\, \tilde{\mu}(t_k) = \frac{1}{\pi}\, g(t_i). \qquad [i = 1, 2, 3, 4]$$

где коэфициентам $B_{i,k}$, пользуясь выражениями $t_5, t_6, \ldots, t_{16}$ через t_1, t_2, t_3, t_4, можно придать форму

$$B_{i,k} = \frac{ab}{a^2 - b^2} a_k \left\{ \frac{1}{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \cos(t_k + t_i)} + \frac{1}{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \cos(\pi - t_k + t_i)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \cos(\pi + t_k + t_i)} + \frac{1}{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \cos(2\pi - t_k + t_i)} \right\} =$$
$$= \frac{ab}{a^2 - b^2} a_k \frac{1}{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \mp \cos(t_k \pm t_i)},$$

при этом последнее написанное выражение представляет сокращенное обозначение для суммы четырех слагаемых, стоящих в фигурной скобке.

После того как в результате решения систем $\tilde{\mu}(t_1)$, $\tilde{\mu}(t_2)$, $\tilde{\mu}(t_3)$, $\tilde{\mu}(t_4)$ будут определены, можем получить приближенное значение $\tilde{\mu}(t)$ в остальной

ных точках, заменяя в данном интегральном уравнении интеграл на сумму. Получим

$$\tilde{\mu}(\tau) = \frac{1}{\pi} g(\tau) = \frac{ab}{a^2 - b^2} \sum_{i=1}^{4} \frac{a_i \tilde{\mu}(t_i)}{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} + \cos(\tau \pm t_i)}.$$

Для численных подсчетов остановимся на случае $a = 1$; $b = \frac{1}{2}$. Вычислив для данного случая коэфициенты $B_{i,k}$ и пользуясь указанными выше значениями t_i и a_i, можем систему уравнений, служащую для определения $\tilde{\mu}(t_i)$, написать в виде:

$$\tilde{\mu}(t_1) \cdot 1{,}125990 + \tilde{\mu}(t_2) \cdot 0{,}263037 + \tilde{\mu}(t_3) \cdot 0{,}311729 + \tilde{\mu}(t_4) \cdot 0{,}299244 = \frac{1}{\pi} g(t_1),$$

$$\tilde{\mu}(t_1) \cdot 0{,}119735 + \tilde{\mu}(t_2) \cdot 1{,}254816 + \tilde{\mu}(t_3) \cdot 0{,}315974 + \tilde{\mu}(t_4) \cdot 0{,}309480 = \frac{1}{\pi} g(t_2),$$

$$\tilde{\mu}(t_1) \cdot 0{,}100591 + \tilde{\mu}(t_2) \cdot 0{,}223987 + \tilde{\mu}(t_3) \cdot 1{,}321839 + \tilde{\mu}(t_4) \cdot 0{,}353576 = \frac{1}{\pi} g(t_3),$$

$$\tilde{\mu}(t_1) \cdot 0{,}083522 + \tilde{\mu}(t_2) \cdot 0{,}189758 + \tilde{\mu}(t_3) \cdot 0{,}305828 + \tilde{\mu}(t_4) \cdot 1{,}420914 = \frac{1}{\pi} g(t_4).$$

Чтобы довести вычисления до конца, остановимся и на определенных граничных условиях. Будем искать функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условию [1]

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ на эллипсе,}$$

[1] К этому условию приводит задача о кручении эллипса, т. е. об определении решения уравнения $\Delta u = -2$ при нулевых условиях на контуре. Действительно, вводя $u_1 = u + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, мы видим, что функция u_1 удовлетворяет уравнению $\Delta u_1 = 0$. Упомянем, что для поставленной задачи о кручении легко указать точное решение, именно

$$u = -\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} - 1\right).$$

иначе говоря, в данном случае

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(\cos^2 t + \frac{1}{4}\sin^2 t\right) = \frac{1}{16}(5 + 3\cos 2t).$$

В таком случае, в правой части нужно подставить:

$$\frac{1}{\pi} g(t_1) = 0{,}158691; \quad \frac{1}{\pi} g(t_2) = 0{,}147386; \quad \frac{1}{\pi} g(t_3) = 0{,}104254;$$
$$\frac{1}{\pi} g(t_4) = 0{,}049428.$$

Решая непосредственно написанную выше систему четырех уравнений, найдем:

$$\tilde{\mu}(t_1) = 0{,}103038; \quad \tilde{\mu}(t_2) = 0{,}092859; \quad \tilde{\mu}(t_3) = 0{,}054038;$$
$$\tilde{\mu}(t_4) = 0{,}004698.$$

Подставляя эти значения в приведенное выше выражение для $\tilde{\mu}(t)$, можно определить $\tilde{\mu}$ и в остальных точках.

В этой задаче можно получить точное решение интегрального уравнения, это есть

$$\mu(t) = \frac{1}{160\pi}(25 + 27\cos 2t).$$

Вычислив для сравнения значения μ в точках t_1, t_2, t_3, t_4, найдем:

$$\mu(t_1) = 0{,}103034; \quad \mu(t_2) = 0{,}092859; \quad \mu(t_3) = 0{,}054040;$$
$$\mu(t_4) = 0{,}004696.$$

Сравнивая значения μ и $\tilde{\mu}$ в других точках, получим расхождение того же порядка, например

$$\tilde{\mu}(0) = 0{,}103451; \quad \mu(0) = 0{,}103451; \quad \tilde{\mu}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}003985,$$

$$\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}003979.$$

Применим для решения того же примера ряд, который дает метод последовательных приближений и его аналитическое продолжение. При этом требующиеся квадратуры будем проводить приближенно. Тогда, как мы указывали выше (стр. 129), этот способ представляет не что иное, как некоторый способ решения той системы линейных уравнений, к которой приближенно сводится решение интегрального уравнения. Мы здесь воспользуемся только вместо формулы Гаусса формулой прямоугольников, что допустимо, так как функции $K(t, \tau)$ и $g(\tau)$ периодичны. Тогда коэфициенты $B_{i,k}$ можно находить по тем же

формулам, что и выше, только t_i и a_i будут иметь другое значение, а именно

$$t_1 = \frac{\pi}{16} = 11°15'; \quad t_2 = \frac{3}{16}\pi = 33°45'; \quad t_3 = \frac{5}{16}\pi = 56°15';$$

$$t_4 = \frac{7}{16}\pi = 78°45'; \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Вычисления последовательных приближений $\overset{\sim}{\mu}_1, \overset{\sim}{\mu}_2, \ldots$ производим по той схеме, которая указана на стр. 127. Прежде всего вычисляем значения $\lambda K_{i,k} A_i = B_{i,k}$ и затем последовательно определяем $\mu_1^k, \mu_2^k, \ldots$ Результаты вычислений приведены в таблице 1.

Таблица 1

	$t_1=11°15'$	$t_2=33°45'$	$t_3=56°15'$	$t_4=78°45'$	$\mu_0 = g$	μ_1	μ_2
$t_1 = 11°15'$	0,300608	0,266309	0,227517	0,205566	0,6184474	0,4223938	0,4004
$t_2 = 33°45'$	0,266309	0,261815	0,244358	0,227517	0,4892463	0,4080378	0,3990
$t_3 = 56°15'$	0,227517	0,244358	0,261815	0,266309	0,3065284	0,3877361	0,3967
$t_4 = 78°45'$	0,205566	0,227517	0,266309	0,300608	0,1773273	0,3733809	0,3951

Как мы видим, μ_n^k не убывают с увеличением n, поэтому ряди, составленным прямо по последовательным приближениям, воспользоваться для вычислений не можем. Применим различные приемы аналитического продолжения. Во всех случаях мы, после соответствующей подстановки, ряд $\mu = \mu_0 + \lambda\mu_1 + \lambda^2\mu_2 + \ldots$ перестраиваем по степеням η и затем, сохранив некоторое число членов ряда, подставляем вместо η_i численное значение, соответствующее $\lambda = 1$.

Таблица 2

	$\lambda = \frac{2\eta}{1-\eta}$, $\eta = \frac{1}{3}$		$\lambda = \left(\frac{\eta+1}{1-\eta}\right)^2 - 1$, $\mu = 3 - 2\sqrt{2}$		$\lambda = \frac{\eta}{1-\eta}$, $\eta = \frac{1}{2}$	
	до η^{10}	до η^5	до η^{10}	до η^5	до η^{10}	до η^5
μ_0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
μ_1	0,999983	0,995885	0,999998	0,999233	0,999023	0,968750
μ_2	0,999644	0,954732	0,999979	0,980458	0,989258	0,812500
μ_3	0,996596	0,790123	0,999570	0,855813	0,945312	0,500000
μ_4	0,980338	0,460905	0,995129	0,526324	0,828125	0,187500
μ_5	0,923436	0,131687	0,968748	0,152244	0,623047	0,031250
μ_6	0,786872		0,875178		0,376953	
μ_7	0,559264		0,668391		0,171875	
μ_8	0,299141		0,381319		0,054687	
μ_9	0,104049		0,138075		0,010742	
μ_{10}	0,017341		0,023178		0,000976	

Мы будем сохранять члены до η_i^5 или до η_i^{10}. Получающееся в результате подстановки значения η_i выражение представляет сумму μ_i, снабженных различными численными коэфициентами. В таблице 2 приведены значения этих коэфициентов, которые получаются при различных подстановках.

При способе домножения нужно взять все μ_i с коэфициентом 1 за исключением последнего слагаемого, которое нужно взять с множителем $\frac{1}{2}$. Применяя эти приемы к данной задаче и пользуясь вычисленными значениями μ_n^j, получаем результаты, которые даны в таблице 3 (стр. 156).

μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8	μ_9	μ_{10}
0,3891895	0,3979204	0,3978903	0,3978868	0,3978860	0,3978860	0,3978858	0,3978856
0,3980119	0,3979003	0,3978877	0,3978861	0,3978858	0,3978856	0,3678854	0,3978852
0,3977612	0,3978724	0,3978846	0,3978858	0,3978857	0,3978855	0,3978853	0,3978851
0,3975844	0,3978531	0,3978828	0,3978859	0,3978861	0,3978859	0,3978857	0,3978855

Как видим, все приемы продолжения дают вполне удовлетворительные результаты, наилучший результат дает самый простой прием продолжения, именно продолжение с помощью домножения. Удовлетворительные результаты дает в частности подстановка $\lambda = \frac{\eta}{1-\eta}$, применение которой равносильно применению метода Неймана.

§ 4. Решение интегральных уравнений с помощью замены ядра на алгебраическое. Метод Бэтмена (Bateman)

п° 1. Интегральное уравнение с алгебраическим ядром. Алгебраическим ядром [1] называют ядро, которое может быть представлено в виде конечной суммы произведений:

$$K(x, y) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s(x)\,\beta_s(y). \tag{1}$$

Для такого ядра не трудно дать полное решение уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x). \tag{2}$$

Прежде всего можем предположить функции $\alpha_s(x)$ линейно незави-

[1] Алгебраическое ядро называют часто также „вырожденным" ядром.

$\mu(t) = \frac{1}{160\pi}(25 + 27\cos 2t)$ истинное	$\mu^1=\mu^8=\mu^9=\mu^{16}$	$\mu^2=\mu^7=\mu^{10}=\mu^{15}$	$\mu^3=\mu^6=\mu^{11}=\mu^{14}$	$\mu^4=\mu^5=\mu^{12}=\mu^{13}$
Подстановка $\eta = \frac{\sqrt{\lambda+1}-1}{\sqrt{\lambda+1}+1}$; $\eta = 3-2\sqrt{2}$ до η^{10}	0,0993620	0,0702917	0,0291802	0,0001099
» до η^5	0,0993621	0,0702919	0,0291803	0,0001099
	0,09931	0,07024	0,02913	0,00006
Способ домножения				
$\frac{1}{2}[\mu_0 + (\mu_0+\mu_1) + (\mu_1+\mu_2) + \ldots + (\mu_4+\mu_5)]$	0,0993623	0,0702919	0,0291800	0,0001095
$\frac{1}{2}[\mu_0 + (\mu_0+\mu_1) + \ldots + (\mu_9+\mu_{10})]$	0,0993620	0,0702917	0,0291802	0,0001098
Подстановка $\lambda = \frac{2\eta}{1-\eta}$; $\eta = \frac{1}{3}$, до η^{10}	0,0993628	0,0702926	0,0291810	0,0001107
» до η^5	0,09916	0,07009	0,02897	0,00010
» $\lambda = \frac{\eta}{1-\eta}$; $\eta = \frac{1}{2}$, до η^{10}	0,0993637	0,0702925	0,0291796	0,0001073
до η^5	0,09946	0,07033	0,02914	0,00014

симыми, ибо в противном случае число слагаемых в выражении ядра можно было бы уменьшить.

Решение естественно искать в виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i \alpha_i(x), \tag{3}$$

где A_i — неизвестные пока постоянные.

Введем обозначения:

$$\int_a^b f(x)\beta_i(x)\,dx = f_i; \quad \int_a^b \alpha_i(x)\beta_j(x)\,dx = \beta_{j,i}. \tag{4}$$

Подставляя выражение $\varphi(x)$ (3) в уравнение, мы должны иметь:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\alpha_i(x) - \lambda\int_a^b \left[\sum_{s=1}^{n}\alpha_s(x)\beta_s(y)\right] f(y)\,dy - \tag{5}$$

$$-\lambda\int_a^b \sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_j\alpha_s(x)\beta_s(y)\alpha_j(y)\,dy = 0.$$

Отсюда, приравнивая коэфициенты при $\alpha_i(x)$, найдем:

$$A_i - \lambda\sum_{j=1}^{n} A_j\beta_{i,j} = \lambda f_i. \tag{6}$$

Если обозначить $\Delta(\lambda)$ детерминант системы (6)

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\beta_{1,1}, & -\lambda\beta_{1,2}, \ldots, & -\lambda\beta_{1,n} \\ -\lambda\beta_{2,1}, & 1-\lambda\beta_{2,2}, \ldots, & -\lambda\beta_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ -\lambda\beta_{n,1}, & -\lambda\beta_{n,2}, \ldots, & 1-\lambda\beta_{n,n} \end{vmatrix} \tag{7}$$

и через $\Delta_{i,k}$ алгебраическое дополнение элемента k-ой строки и i-го

столбца, то решение системы напишется в виде:

$$A_i = \lambda \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta_{i,k} f_k}{\Delta(\lambda)}. \tag{8}$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta_{i,k} f_k}{\Delta(\lambda)} \alpha_i(x) = \tag{9}$$

$$= f(x) + \lambda \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,k} \alpha_i(x) \right) \int_a^b \beta_k(y) f(y)\, dy}{\Delta(\lambda)} =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{i,k} \alpha_i(x) \beta_k(y)}{\Delta(\lambda)} f(y)\, dy =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\Delta(x, y, \lambda)}{\Delta(\lambda)} f(y)\, dy,$$

где

$$\Delta(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{i,k} \alpha_i(x) \beta_i(y).$$

Следовательно резольвента для уравнения этого рода получается в явном виде

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{\Delta(x, y, \lambda)}{\Delta(\lambda)}. \tag{10}$$

Собственные числа ядра получаются посредством решения уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0.$$

n° 2. Замена произвольного ядра алгебраическим. Возможность удобного решения уравнений с алгебраическим ядром приводит естественно к мысли о том, чтобы при решении уравнения с неалгебраическим ядром заменить это ядро приближенно на алгебраическое и решить вместо данного уравнения уравнение, отвечающее этому алгебраическому ядру. Подыскание алгебраического ядра, близкого к данному, может проводиться многими способами. Ниже (n°5) мы рассмотрим подробно один из таких способов, принадлежащий Бэтмену. Естественным и удобным способом является также разложение ядра в тот или иной бесконечный ряд и сохранение определенного отрезка этого ряда. Мы займемся сейчас оценкой погрешности, которую делаем в решении, заменяя данное ядро на близкое к нему другое ядро, в частности алгебраическое.

Теорема. *Пусть даны два ядра $k(x, y)$ и $K(x, y)$ и известно, что*

$$\int_a^b |K(x, y) - k(x, y)|\, dy < h \tag{11}$$

и что резольвента $\gamma(x, y, \lambda)$ уравнения с ядром $k(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b |\gamma(x, y, \lambda)|\, dy < B. \tag{12}$$

Тогда, если выполнено условие:

$$1 - |\lambda| h (1 + |\lambda| B) > 0, \tag{13}$$

то уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y)\, dy = f(x) \tag{14}$$

имеет единственное решение $\varphi(y)$ и разность между этим решением и решением $\tilde{\varphi}(y)$ уравнения

$$\tilde{\varphi}(x) - \lambda \int_a^b k(x, y) \tilde{\varphi}(y)\, dy = f(x) \tag{15}$$

не превосходит:

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| < \frac{N |\lambda| h (1 + |\lambda| B)^2}{1 - |\lambda| h (1 + |\lambda| B)}, \tag{16}$$

где N — верхняя граница $|f(x)|$.

Доказательство. Пусть M есть верхняя граница $\varphi(x)$ и $\tilde{M}$ верхняя граница $\tilde{\varphi}(x)$. Имеем из (14):

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, y) \varphi(y)\, dy = \tag{17}$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b [K(x, y) - k(x, y)] \varphi(y)\, dy = f^*(x).$$

Правая часть этого уравнения не превосходит

$$|f^*(x)| = \left| f(x) + \lambda \int_a^b [K(x, y) - k(x, y)] \varphi(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant N + |\lambda| M \int_a^b |K(x, y) - k(x, y)|\, dy < N + |\lambda| M h;$$

тогда решение его $\varphi(x)$ не превзойдет следующей величины

$$|\varphi(x)| = \left| f^*(x) + \lambda \int_a^b \gamma(x, y, \lambda) f^*(y)\, dy \right| < N + |\lambda| Mh + $$

$$+ |\lambda| B(N + |\lambda| Mh).$$

Следовательно

$$M < N + |\lambda| hM + |\lambda| B(N + |\lambda| Mh),$$

откуда

$$M < \frac{N(1 + |\lambda| B)}{1 - |\lambda| h(1 + |\lambda| B)}, \tag{18}$$

причем последний переход законен, если выполнено условие

$$1 - |\lambda| h(1 + |\lambda| B) > 0. \tag{13}$$

Итак при соблюдении этого условия все решения уравнения (14) ограничены, а потому уравнение (14) имеет единственное решение; последнее показывает между прочим, что λ не есть собственное значение этого уравнения.

Вычитая теперь уравнение (15) из (17), получаем следующее уравнение для разности $\psi(x) = \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)$:

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b k(x, y) \psi(y)\, dy = f^*(x) - f(x).$$

Отсюда, так как $|f^*(x) - f(x)| < |\lambda| Mh$, найдем

$$|\psi(x)| = \left| f^*(x) - f(x) + \lambda \int_a^b \gamma(x, y, \lambda) [f^*(y) - f(y)]\, dy \right| \leqslant \tag{19}$$

$$\leqslant |\lambda| Mh + |\lambda|^2 MhB = |\lambda| Mh(1 + |\lambda| B).$$

Подставляя еще вместо M его оценку (18), имеем

$$|\psi(x)| = |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| < \frac{N |\lambda| h(1 + |\lambda| B)^2}{1 - |\lambda| h(1 + |\lambda| B)}$$

и требуемая оценка (16) получена. Заметим, что, пользуясь последним неравенством, можно уточнить оценку для M, так как очевидно

$$|\varphi(x)| \leqslant |\tilde{\varphi}(x)| + |\psi(x)| \leqslant \tilde{M} + \frac{N \cdot |\lambda| \cdot h(1 + |\lambda| B)^2}{1 - |\lambda| h(1 + |\lambda| B)}, \tag{20}$$

а тогда, подставляя это выражение вместо M в (19), можно дать и более точную оценку для интересующей нас разности:

$$|\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| < |\lambda| \cdot h \cdot (1 + |\lambda| B) \tilde{M} + \frac{N |\lambda|^2 h^2 (1 + |\lambda| B)^3}{1 - |\lambda| h(1 + |\lambda| B)}. \tag{21}$$

Или, если положить $\delta = |\lambda| \cdot h(1 + |\lambda| B)$, то

$$|\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| < \delta \tilde{M} + \frac{N\delta^3}{(1 - \delta)|\lambda| \cdot h}. \tag{21'}$$

Другой способ оценки, предложенный Трикоми, приведен ниже, в п° 4.[1]

Доказанная теорема дает в частности и способ оценки погрешности при замене ядра алгебраическим. Проиллюстрируем это на следующем простом примере.

п° 3. *Пример.* Решить уравнение:

$$\varphi(x) - \int_0^{\frac{1}{2}} \sin xy\, \varphi(y)\, dy = f(x).$$

Относительно $f(x)$ частных предположений делать пока не будем.

Разлагая $\sin xy$ в ряд, имеем:

$$\sin xy = xy - \frac{x^3y^3}{6} + \frac{x^5y^5}{120} - \cdots$$

Заменим $\sin xy$ двумя первыми членами ряда и рассмотрим соответствующее уравнение с алгебраическим ядром:

$$\tilde{\varphi}(y) - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(xy - \frac{x^3y^3}{6} \right) \tilde{\varphi}(y)\, dy = f(x).$$

Ищем решение в виде:

$$\tilde{\varphi}(x) = Ax + Bx^3 + f(x).$$

Подставляя это выражение в уравнение и обозначая через f_1 и f_2 интегралы

$$f_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} y f(y)\, dy; \quad f_2 = \frac{-1}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} y^3 f(y)\, dy,$$

находим:

$$Ax + Bx^3 - f_1 x - f_2 x^3 - \frac{1}{24} Ax - \frac{1}{160} Bx + \frac{1}{960} Ax^3 + \frac{1}{5376} Bx^3 = 0.$$

---

[1] Оценка погрешности произведенная в других предположениях, чем приведенная выше, имеется в диссертации И. Агбергенова, выполненной в 1935 году в Ленинградском НИИММ.

Там же дана оценка погрешности при определении собственных значений. Основные результаты диссертации можно найти в работе Агбергенова. „О приближенном решении уравнений Фредгольма", которая печатается в Матем. Сборнике. т. 42 в. 6

Отсюда, приравнивая нулю коэфициенты при x и x^3, получим:

$$\frac{23}{24}A-\frac{1}{160}B=f_1,$$

$$\frac{1}{960}A+\left(1+\frac{1}{5376}\right)B=f_2.$$

Решая эту систему, найдем

$$A=1{,}043284\left[\frac{5377}{5376}f_1+\frac{1}{160}f_2\right];$$

$$B=1{,}043284\left[-\frac{1}{960}f_1+\frac{23}{24}f_2\right].$$

Поэтому решение будет иметь вид:

$$\tilde{\varphi}(x)=f(x)+Ax+Bx^3=f(x)+$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2}}1{,}043284\,[1{,}0001860xy-0{,}0010416x^3y-0{,}0010416xy^3-$$

$$-0{,}1597222x^3y^3]\,f(y)\,dy,$$

а резольвента:

$$\gamma(x,\ y,\ 1)=1{,}043284\ \ [1{,}0001860xy-0{,}0010416x^3y-0{,}1597222x^3y^3].$$

Отсюда ясно, что

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|\gamma(x,y,1)|\,dy<\frac{1}{12}.$$

Следовательно в приведенной выше оценке можно принять $B=\frac{1}{12}$.

Далее

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|K(x,y)-k(x,y)|\,dy\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^5y^5}{120}\,dy=\frac{1}{64\cdot720}x^5$$

и, так как $x\leqslant\frac{1}{2}$, то можно принять $h=\dfrac{1}{64\cdot32\cdot720}=\dfrac{1}{1474560}$ или, грубее, $h=\dfrac{3}{4\cdot10^6}$.

Тогда

$$|\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)|<N\frac{|\lambda|h(1+|\lambda|B)^2}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|B)}=$$

$$=N\frac{\frac{3}{4\cdot10^6}\left(1+\frac{1}{12}\right)^2}{1-\frac{3}{4\cdot10^6}\left(1+\frac{1}{12}\right)}<\frac{N}{10^6},$$

где — N верхняя граница $|f(x)|$.

В частности примем

$$f(x)=1+\frac{1}{x}\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)=1-\frac{x}{8}+\frac{x^3}{384}-\frac{x^5}{46080}+\cdots$$

Соответствующее точное решение есть $\varphi(x)=1$. За верхнюю границу $f(x)$ в $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ можем принять $N=1$.

Поэтому приближенное решение должно разниться от точного не более чем на $\frac{1}{10^6}$. В действительности приближенное решение будет:

$$\varphi(x)=1+0{,}0000009x-0{,}0000002x^3.$$

n° 4. Оценка погрешности Трикоми (Tricomi). Мы рассмотрели в n° 2 способ оценки погрешности в решении интегрального уравнения, при замене данного ядра на другое, близкое к нему. Другой способ оценки погрешности был предложен ранее Ф. Трикоми.[1] Этот способ дает, правда, значительно менее точную оценку погрешности, чем способ n° 2, но зато он позволяет установить сходимость приближенного решения к точному, если разница между ядрами стремится к нулю.

Итак рассмотрим два уравнения

$$(22)\qquad\begin{cases}\varphi(x)-\lambda\int_0^1K(x,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x),\\ \tilde{\varphi}(x)-\lambda\int_0^1\tilde{K}(x,y)\,\tilde{\varphi}(y)\,dy=f(x).\end{cases}$$

Мы должны оценить разность $|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|$. Предположим, что в квадрате (0,1; 0,1):

$$(23)\qquad|K(x,y)-\tilde{K}(x,y)|<\varepsilon.$$

Докажем предварительно лемму об определителях.

Лемма. *Пусть даны два определителя*

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{1,1},&a_{1,2},&\ldots,&a_{1,n}\\ a_{2,1},&a_{2,2},&\ldots,&a_{2,n}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ a_{n,1},&a_{n,2},&\ldots,&a_{n,n}\end{vmatrix};\quad\Delta'=\begin{vmatrix}a'_{1,1},&a'_{1,2},&\ldots,&a'_{1,n}\\ a'_{2,1},&a'_{2,2},&\ldots,&a'_{2,n}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ a'_{n,1},&a'_{n,2},&\ldots,&a'_{n,n}\end{vmatrix},$$

[1] F. Tricomi, Sulla risoluzione numerica delle equazioni integrali di Fredholm. Rend. Ac. del. Lincei XXXIII, 1 sem., 1924, f. 12; XXXIII, 2 sem., f. 1.

причем элементы второго определителя близки к элементам первого $a'_{i,k} = a_{i,k} + \delta_{i,k}$. *Тогда, если*

$$|a_{i,k}| < N \quad \text{и} \quad |\delta_{i,k}| < \varepsilon,$$

то

$$|\Delta - \Delta'| < n^{\frac{n}{2}} [(N+\varepsilon)^n - N^n]. \tag{24}$$

Доказательство. Разложим определитель Δ' на сумму определителей:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11}+\delta_{11}, & a_{12}+\delta_{12}, \ldots, & a_{1n}+\delta_{1n} \\ a_{21}+\delta_{21}, & a_{22}+\delta_{22}, \ldots, & a_{2n}+\delta_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}+\delta_{n1}, & a_{n2}+\delta_{n2}, \ldots, & a_{nn}+\delta_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, \ldots, & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} + \sum \begin{vmatrix} \delta_{11}, & a_{12}, \ldots, & a_{1n} \\ \delta_{21}, & a_{22}, \ldots, & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, & a_{n1}, \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \sum\sum \begin{vmatrix} \delta_{11}, & \delta_{12}, & a_{13}, \ldots, & a_{1n} \\ \delta_{21}, & \delta_{22}, & a_{23}, \ldots, & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n1}, & \delta_{n2}, & a_{n3}, \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \delta_{11}, & \delta_{12}, \ldots, & \delta_{1n} \\ \delta_{21}, & \delta_{22}, \ldots, & \delta_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n1}, & \delta_{n2}, \ldots, & \delta_{nn} \end{vmatrix},$$

где в каждой сумме выписано типичное слагаемое, в остальных слагаемых колонны с δ находятся на других местах. В первой сумме число слагаемых, C_n^1, каждое не превосходит, по оценке Адамара,[1] $n^{\frac{n}{2}} \varepsilon N^{n-1}$, во второй число слагаемых C_n^2 каждое не превосходит $n^{\frac{n}{2}} \varepsilon^2 N^{n-2}$, и т. д. Поэтому

$$|\Delta' - \Delta| < C_n^1 n^{\frac{n}{2}} \varepsilon N^{n-1} + C_n^2 n^{\frac{n}{2}} \varepsilon^2 N^{n-2} + \ldots +$$

$$+ C_n^n n^{\frac{n}{2}} \varepsilon^n = n^{\frac{n}{2}} [(N+\varepsilon)^n - N^n]$$

и лемма доказана.

[1] Ловитт, Интегральные уравнения, стр. 32.

Дадим теперь оценку разности $|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)|$. По формулам Фредгольма решение уравнений (22) можно получить в виде:

$$\begin{cases} \varphi(x) = f(x) - \lambda \int_0^1 \dfrac{\Delta(x, y, \lambda)}{\Delta(\lambda)} f(y)\, dy, \\ \tilde{\varphi}(x) = f(x) - \lambda \int_0^1 \dfrac{\tilde{\Delta}(x, y, \lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} f(y)\, dy, \end{cases} \tag{25}$$

где $\Delta(\lambda)$ и $\tilde{\Delta}(\lambda)$ — так называемые определители Фредгольма для уравнений (22), а $\Delta(x, y, \lambda)$ и $\tilde{\Delta}(x, y, \lambda)$ — их миноры. Дадим прежде всего оценку разности $|\Delta(\lambda) - \tilde{\Delta}(\lambda)|$. Эту разность можно записать в виде

$$\Delta(\lambda) - \tilde{\Delta}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left[K\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_n \\ z_1, z_2, \ldots, z_n \end{pmatrix} - \right. \tag{26}$$

$$\left. - \tilde{K}\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_n \\ z_1, z_2, \ldots, z_n \end{pmatrix} \right] dz_1 dz_2 \ldots dz_n,$$

при этом в скобках под знаком интеграла находятся определители n-ого порядка из значений ядер $K(x, y)$ и $\tilde{K}(x, y)$:

$$K\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_n \\ z_1, z_2, \ldots, z_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(z_1, z_1), & K(z_1, z_2), \ldots, & K(z_1, z_n) \\ K(z_2, z_1), & K(z_2, z_2), \ldots, & K(z_2, z_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(z_n, z_1), & K(z_n, z_2), \ldots, & K(z_n, z_n) \end{vmatrix};$$

$$\tilde{K}\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_n \\ z_1, z_2, \ldots, z_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{K}(z_1, z_1), & \tilde{K}(z_1, z_2), \ldots, & \tilde{K}(z_1, z_n) \\ \tilde{K}(z_2, z_1), & \tilde{K}(z_2, z_2), \ldots, & \tilde{K}(z_2, z_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(z_n, z_1), & K(z_n, z_2), \ldots, & K(z_n, z_n) \end{vmatrix}.$$

Если N — верхняя граница $K(x, y)$, то, пользуясь леммой о разности двух определителей (24) и (23), сразу найдем, что

$$\left| K\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_n \\ z_1, z_2, \ldots, z_n \end{pmatrix} - \tilde{K}\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_n \\ z_1, z_2, \ldots, z_n \end{pmatrix} \right| < n^{\frac{n}{2}} [(N+\varepsilon)^n - N^n].$$

Отсюда

$$(27)\qquad |\Delta(\lambda)-\widetilde{\Delta}(\lambda)|<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^n}{n!}n^{\frac{n}{2}}[N+\varepsilon)^n-N^n]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}[|\lambda|(N+\varepsilon)]^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}(|\lambda|N)^n=\Omega[|\lambda|(N+\varepsilon)]-\Omega(|\lambda|N)$$

если положить

$$(28)\qquad \Omega(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}u^n.$$

Таким же точно образом можно оценить разность $|\Delta(x,y,\lambda)-\widetilde{\Delta}(x,y,\lambda)|$, исходя из разложения

$$(29)\quad \Delta(x,y,\lambda)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int_0^1\int_0^1\dots\int_0^1 K\begin{pmatrix}x\,z_1\dots z_n\\ y\,z_1\dots z_n\end{pmatrix}dz_1\dots dz_n.$$

Получим тогда:

$$(30)\quad |\Delta(x,y,\lambda)-\widetilde{\Delta}(x,y,\lambda)|<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^n}{n!}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}[(N+\varepsilon)^{n+1}-N^{n+1}]=$$

$$=(N+\varepsilon)\Omega'[|\lambda|(N+\varepsilon)]-N\Omega'(|\lambda|N).$$

Теперь можно оценить разность $|\varphi(x)-\widetilde{\varphi}(x)|$; имеем

$$(31)\qquad |\varphi(x)-\widetilde{\varphi}(x)|\leqslant\lambda\int_0^1\left|\frac{\Delta(x,y,\lambda)}{\Delta(\lambda)}-\frac{\widetilde{\Delta}(x,y,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}\right||f(y)|\,dy.$$

Обозначим через F границу $|f(x)|$ и через $\delta\Delta$ и $\delta\Delta_{x,y}$ полученные выше оценки, для $|\Delta(\lambda)-\widetilde{\Delta}(\lambda)|$ и $|\Delta(x,y,\lambda)-\widetilde{\Delta}(x,y,\lambda)|$, тогда после упрощений, приняв во внимание, что $|\Delta(\lambda)|<\Omega(|\lambda|N)$ и $|\Delta(x,y,\lambda)|<N\Omega'(N|\lambda|)$, найдем:

$$(32)\qquad |\varphi(x)-\widetilde{\varphi}(x)|<|\lambda|F\frac{N\Omega'[|\lambda|N]\delta\Delta+\Omega(|\lambda|N)\delta\Delta_{x,y}}{|\Delta(\lambda)|\,|\widetilde{\Delta}(\lambda)|}.$$

Преобразуем еще $\delta\Delta$ и $\delta\Delta_{x,y}$ пользуясь теоремой о среднем, приняв при этом во внимание, что Ω, Ω' и Ω'' — возрастающие функции, тогда получим окончательно:

$$(33)\quad |\varphi(x)-\widetilde{\varphi}(x)|<\varepsilon|\lambda|F\frac{L\Omega'(L)\Omega'(\widetilde{L})+\Omega(L)\Omega'(\widetilde{L})+\widetilde{L}\Omega(L)\Omega''(\widetilde{L})}{|\Delta(\lambda)|\,|\widetilde{\Delta}(\lambda)|},$$

где для краткости положено $N|\lambda|=L$; $(N+\varepsilon)|\lambda|=\widetilde{L}$.

Полученные оценки показывают, что если ядра $K(x,y)$ будут равномерно сходиться к ядру $K(x,y)$, т. е. $\varepsilon\to 0$, то при этом по (27) $\widetilde{\Delta}(\lambda)\to\Delta(\lambda)$. Далее если $\Delta(\lambda)\neq 0$, то при ε достаточно малом $\widetilde{\Delta}(\lambda)\neq 0$, а тогда, как это ясно из оценки (33), $\widetilde{\varphi}(x)\to\varphi(x)$. Следует заметить, однако, что присутствие в оценке Трикоми величины $\Delta(\lambda)$, которую обычно трудно оценить, не зная решения уравнения, делает ее не вполне удобной для действительной оценки погрешности. Однако, если уравнение с ядром $\widetilde{K}$ решено, и определено $\widetilde{\Delta}(\lambda)$, то можно указать, пользуясь приведенной выше оценкой (27), нижнюю границу для $\Delta(\lambda)$, после чего полученная оценка оказывается уже применимой. Упомянем еще, что, как легко установить, для ряда (28) будет мажорантным ряд функции

$$\Omega_0(x)=(1+x)\,e^{\frac{ex^2}{2}},$$

а потому во всех приведенных оценках можно брать Ω_0, Ω_0', Ω_0'' вместо Ω, Ω', Ω''.

n° 5. Метод Бэтмена (Bateman). Может оказаться полезной часто не только замена данного ядра вырожденным (алгебраическим), но и приближенное его представление в виде суммы: ядра, для которого резольвента известна, и вырожденного ядра. Для ядер последнего вида резольвента также может быть дана в конечном виде. Способ получения этой резольвенты был указан Бэтменом.[1] Мы его изложим в виде следующей леммы:

Лемма. *Пусть для уравнения*

$$(34)\qquad \varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\,dy=f(x)$$

с ядром $k(x,y)$ известна резольвента $\gamma(x,y,\lambda)$, т. е. функция, с помощью которой решение уравнения (34) дается в виде

$$(35)\qquad \varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\gamma(x,y,\lambda)f(y)\,dy.$$

Тогда для интегрального уравнения с ядром

$$(36)\qquad K(x,y)=\frac{\begin{vmatrix}k(x,y) & f_1(x) & \dots & f_n(x)\\ g_1(y) & a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ g_n(y) & a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}},$$

[1] H. Bateman, On the numerical solution of linear integral equations. Proc. Roy. Soc. A., 100 (1922), p. 441, Его же, Messenger. Math. Apr. 1908. Ср. G. Goursat, Bull. Soc. Math., 1907.

где $f_r(x)$ и $g_m(y)$ — произвольные функции, а a_{ik} — произвольные числа резольвента дается в виде:

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \gamma(x, y, \lambda) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \chi_1(y) & a_{11}+\lambda\tau_{11} & \dots & a_{1n}+\lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_n(y) & a_{n1}+\lambda\tau_{n1} & \dots & a_{nn}+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda\tau_{11} & \dots & a_{1n}+\lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+\lambda\tau_{n1} & \dots & a_{nn}+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}}, \tag{37}$$

где

$$\varphi_r(x) = f_r(x) + \lambda \int_a^b \gamma(x, y, \lambda) f_r(y)\, dy, \tag{38}$$

$$\chi_m(x) = g_m(x) + \lambda \int_a^b \gamma(y, x, \lambda) g_m(y)\, dy, \tag{39}$$

$$\tau_{m,r} = \int_a^b \varphi_r(x) g_m(x)\, dx = \int_a^b f_r(x) \chi_m(x)\, dx, \tag{40}$$

т. е. $\varphi_r(x)$ и $\chi_m(x)$ суть решения интегральных уравнений:

$$\varphi_r(x) - \lambda \int_a^b k(x, y) \varphi_r(y)\, dy = f_r(x), \tag{41}$$

$$\chi_m(x) - \lambda \int_a^b k(y, x) \chi_m(y)\, dy = g_m(x). \tag{42}$$

Доказательство. Для того чтобы $\Gamma(x, y, \lambda)$ была резольвентой уравнения

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, y) \varphi(y)\, dy = f(x), \tag{43}$$

достаточно установить, что $\Gamma(x, y, \lambda)$ удовлетворяет характеристическому для резольвенты уравнению:

$$K(x, y) = \Gamma(x, y, \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, t) \Gamma(t, y, \lambda)\, dt. \tag{44}$$

Прежде всего, если обозначить через Δ определитель, стоящий в знаменателе (36), а через $\Delta_{m,r}$ алгебраическое дополнение элемента $a_{m,r}$, то, раскрывая определитель (36) по элементам 1-ой строки,

а затем по элементам первого столбца, получим:

$$K(x, y) = k(x, y) - \sum_{m=0}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\Delta_{m,r}}{\Delta} f_r(x) g_m(y). \tag{45}$$

Для того чтобы проверить, что функция $\Gamma(x, y, \lambda)$, определенная равенством (37), удовлетворяет уравнению (44), вычислим интеграл, стоящий направо.

В виду (45) найдем прежде всего

$$\lambda \int_a^b k(x, t) \Gamma(t, y, \lambda)\, dt.$$

Обозначая через ϑ определитель, стоящий в знаменателе (37), имеем

$$\lambda \int_a^b k(x, t) \Gamma(t, y, \lambda)\, dt =$$

$$= \frac{\lambda}{\vartheta} \begin{vmatrix} \int_a^b \gamma(t, y, \lambda) k(x, t)\, dt, & \int_a^b k(x, t) \varphi_1(t)\, dt, & \dots, & \int_a^b k(x, t) \varphi_n(t)\, dt \\ \chi_1(y), & a_{11}+\lambda\tau_{1}, & \dots, & a_{1n}+\lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_m(y), & a_{n1}+\lambda\tau_{n1}, & \dots, & a_{nn}+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}.$$

Далее, пользуясь равенствами (38), а также тем, что резольвента $\gamma(x, y, \lambda)$ удовлетворяет характеристическому уравнению:

$$\gamma(x, y, \lambda) - \lambda \int_a^b k(x, t) \gamma(t, y, \lambda)\, dt = k(x, y),$$

получаем:

$$\int_a^b k(x, t) \Gamma(t, y, \lambda)\, dt =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma(x, y, \lambda) - k(x, y), & \varphi_1(x) - f_1(x), & \dots, & \varphi_n(x) - f_n(x) \\ g_1(y), & a_{11}+\lambda\tau_{11}, & \dots, & a_{1n}+\lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n(y), & a_{n1}+\lambda\tau_{n1}, & \dots, & a_{nn}+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}.$$

Таким же образом, пользуясь (40) и (42), найдем:

$$\lambda\int_a^b g_m(t)\,\Gamma(t,y,\lambda)\,dt=\frac{1}{\theta}\begin{vmatrix}\chi_m(y)-g_m(y), & \lambda\tau_{m1}, & \ldots, & \lambda\tau_{mn}\\ \chi_1(y) & a_{11}+\lambda\tau_{11}, & \ldots, & a_{1n}+\lambda\tau_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \chi_n(y), & a_{n1}+\lambda\tau_{n1}, & \ldots, & a_{nn}+\lambda\tau_{nn}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{\theta}\begin{vmatrix}g_m(y), & a_{m1}, & \ldots, & a_{mn}\\ \chi_1(y), & a_{11}+\lambda\tau_{11}, & \ldots, & a_{1n}+\lambda\tau_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \chi_n(y), & a_{n1}+\lambda\tau_{n1}, & \ldots, & a_{nn}+\lambda\tau_{nn}\end{vmatrix},$$

если вычесть m-ую строку из первой. Далее, домножая последние равенства на $-\frac{\Delta_{mr}}{\Delta}$ и складывая их, пользуясь при этом для алгебраических дополнений обычными соотношениями:

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{n}a_{mp}\Delta_{mr}=\left.\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\}\ \text{при}\ \begin{matrix}p\neq r\\ p=r,\end{matrix}$$

найдем

$$-\lambda\int_a^b\sum_{m=1}^{n}\frac{\Delta_{mr}}{\Delta}g_m(t)\,\Gamma(t,y,\lambda)=$$

$$=\frac{1}{\theta}\begin{vmatrix}\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{\Delta_{mr}}{\Delta}g_m(y), & 0, & \ldots, & 1, & \ldots, & 0\\ \chi_1(y), & a_{11}+\lambda\tau_{11}, & \ldots, & a_{1n}+\lambda\tau_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \chi_n(y), & a_{n1}+\lambda\tau_{n1}, & \ldots, & a_{nn}+\lambda\tau_{nn}\end{vmatrix},$$

где 1 стоит в 1-ой строке на r-ом месте. Умножая теперь это равенство на $f_r(x)$, суммируя по r и добавляя еще ранее полученное выражение для $\lambda\int_a^b k(x,t)\,\Gamma(t,y,\lambda)\,dt$, пользуясь (45), получим окончательно:

$$\lambda\int_a^b K(x,t)\,\Gamma(t,y,\lambda)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\theta}\begin{vmatrix}\gamma(x,y,\lambda)-K(x,y), & \varphi_1(x), & \ldots, & \varphi_n(x)\\ \chi_1(y), & a_{11}+\lambda\tau_{11}, & \ldots, & a_{1n}+\lambda\tau_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \chi_n(y), & a_{n1}+\lambda\tau_{n1}, & \ldots, & a_{nn}+\lambda\tau_{nn}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\theta}\begin{vmatrix}\gamma(x,y,\lambda), & \varphi_1(x), & \ldots, & \varphi_n(x)\\ \chi_1(y), & a_{11}+\lambda\tau_{11}, & \ldots, & a_{1n}+\lambda\tau_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \chi_n(y), & a_{n1}+\lambda\tau_{n1}, & \ldots, & a_{nn}+\lambda\tau_{nn}\end{vmatrix}-$$

$$-\frac{1}{\theta}\begin{vmatrix}K(x,y) & \varphi_1(x), & \ldots, & \varphi_n(x)\\ 0, & a_{11}+\lambda\tau_{11}, & \ldots, & a_{1n}+\lambda\tau_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0, & a_{n1}+\lambda\tau_{n1}, & \ldots, & a_{nn}+\lambda\tau_{nn}\end{vmatrix}=\Gamma(x,y,\lambda)-K(x,y)$$

если полученный определитель разбить на два по первому столбцу.

Итак мы проверили, что $\Gamma(x,y,\lambda)$, заданная равенством (37), действительно удовлетворяет уравнению (44), а потому есть резольвента для уравнения (43).

Рассмотрим некоторые частные случаи установленного общего результата.

1. Положим

$$a_{mr}=\begin{cases}0 & m\neq r\\ 1 & m=r\end{cases}$$

т. е., иначе говоря, в виду (36) предположим, что ядро $K(x,y)$ имеет вид:

$$K(x,y)=k(x,y)-\sum_{m=1}^{n}f_m(x)\,g_m(y).$$

Резольвента для этого случая примет вид:

$$\Gamma(x,y,\lambda)=\frac{\begin{vmatrix}\gamma(x,y,\lambda), & \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \ldots, & \varphi_n(x)\\ \chi_1(y), & 1+\lambda\tau_{11}, & \lambda\tau_{1,2}, & \ldots, & \lambda\tau_{1,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \chi(y)_n, & \lambda\tau_{n1}, & \lambda\tau_{n2}, & \ldots, & 1+\lambda\tau_{nn}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+\lambda\tau_{11}, & \lambda\tau_{12}, & \ldots, & \lambda\tau_{1n}\\ \lambda\tau_{21}, & 1+\lambda\tau_{22}, & \ldots, & \lambda\tau_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda\tau_{n1}, & \lambda\tau_{n2}, & \ldots, & 1+\lambda\tau_{nn}\end{vmatrix}},$$

где $\varphi_i(x)$, $\chi_i(y)$ и $\tau_{m,r}$ имеют то же значение, что и раньше.

Сделаем теперь еще предположение, что $k(x, y) = 0$, т. е. ядро $K(x, y)$ чисто алгебраическое:

$$K(x, y) = -\sum_{i=1}^{n} f_m(x)\, g_m(y).$$

В данном случае очевидно $\gamma(x, y, \lambda) = 0$, далее, в виду (38) и (39), $\varphi_r(x) = f_r(x)$ и $\chi_m(x) = g_m(x)$, наконец

$$\tau_{mr} = \int_a^b f_r(x)\, g_m(x)\, dx.$$

Поэтому резольвента принимает вид:

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} 0, & f_1(x), & \dots, & f_m(x) \\ g_1(y), & 1+\lambda\tau_{11}, & \dots, & \lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_m(y), & \lambda\tau_{n1}, & \dots, & 1+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+\lambda\tau_{11}, & \dots, & \lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda\tau_{n1}, & \dots, & 1+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Этот частный случай мы рассматривали в предыдущем n° и получили там выражение для Γ в несколько иной форме, которая легко может быть приведена к данной.

2. Рассмотрим интегральное уравнение с некоторым ядром $\bar{k}(x, y)$. Выберем произвольно в промежутке (a, b) точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$. Положим теперь в равенстве (36):

$$k(x, y) = 0; \quad f_r(x) = \bar{k}(x, y_r); \quad g_m(y) = \bar{k}(x_m, y); \quad a_{mr} = \bar{k}(x_m, y_r).$$

Тогда, очевидно, $\gamma(x, y, \lambda) = 0$ и ядро $K(x, y)$ принимает вид:

$$K(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \bar{k}(x, y_1), & \dots, & \bar{k}(x, y_n) \\ \bar{k}(x_1, y), & \bar{k}(x_1, y_1), & \dots, & \bar{k}(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{k}(x_n, y), & \bar{k}(x_n, y_1), & \dots, & \bar{k}(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{k}(x_1, y_1), & \dots, & \bar{k}(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{k}(x_n, y_1), & \dots, & \bar{k}(x_n, y_n) \end{vmatrix}} =$$

$$= -\bar{k}(x, y) + \frac{\begin{vmatrix} \bar{k}(x, y), & \bar{k}(x, y_1), & \dots, & \bar{k}(x, y_n) \\ \bar{k}(x_1, y), & \bar{k}(x_1, y_1), & \dots, & \bar{k}(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{k}(x_n, y), & \bar{k}(x_n, y_1), & \dots, & \bar{k}(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{k}(x_1, y_1), & \dots, & \bar{k}(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{k}(x_n, y_1), & \dots, & \bar{k}(x_n, y_n) \end{vmatrix}}.$$

Это ядро алгебраическое и обладает тем свойством, что совпадает с ядром $\bar{k}(x, y)$ на прямых $x = x_m$; $y = y_r$; действительно, если положить $x = x_m$ или $y = y_r$, то определитель стоящий в числителе второго члена, будет иметь две одинаковых строки или столбца, и следовательно обратится в нуль, а потому:

$$K(x_m, y) = \bar{k}(x_m, y); \qquad K(x, y_r) = \bar{k}(x, y_r).$$

Такое совпадение на $2n$ прямых позволяет вообще рассчитывать на то, что $K(x, y)$ близко к $\bar{k}(x, y)$, а решение уравнения с ядром $K(x, y)$ к решению уравнения с ядром $\bar{k}(x, y)$. Следует заметить, что если $\bar{k}(x, y)$ вырожденное, т. е. имеет вид:

$$\bar{k}(x, y) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m(x)\, \beta_m(y),$$

то определитель в числителе тождественно равен нулю, в виду известных теорем о разложении определителя на сумму определителей, а потому в этом случае

$$K(x, y) \equiv \bar{k}(x, y).$$

Если $\overline{k}(x, y)$ состоит менее чем из n слагаемых, то нулю равен и определитель в знаменателе, но в случае, если это не так, то он вообще говоря отличен от нуля и равен нулю лишь при случайном выборе точек $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$.

Для ядра $K(x, y)$ резольвента может быть составлена на основании леммы. Именно в данном случае

$$\gamma(x, y, \lambda) = 0; \qquad \varphi_r(x) = f_r(x) = \overline{k}(x, y_r); \qquad \chi_m(y) = g_m(y) = \overline{k}(x_m, y),$$

$$\tau_{mr} = \int_a^b \overline{k}(x, y_r)\, \overline{k}(x_m, x)\, dx = k^*(x_m, y_r),$$

где $k^*(x, y)$ второе итегрированное ядро для $k(x, y)$:

$$k^*(x, y) = \int_a^b \overline{k}(x, t)\, \overline{k}(t, y)\, dt,$$

и следовательно

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \overline{k}(x, y_1), & \ldots, & \overline{k}(x, y_n) \\ \overline{k}(x_1, y), & \overline{k}(x_1, y_1) + \lambda k^*(x_1, y_1), & \ldots, & \overline{k}(x_1, y_n) + \lambda k^*(x_1, y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{k}(x_n, y), & \overline{k}(x_n, y_1) + \lambda k^*(x_n, y_1), & \ldots, & \overline{k}(x_n, y_n) + \lambda k^*(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overline{k}(x_1, y_1) + \lambda k^*(x_1, y_1), & \ldots, & \overline{k}(x_1, y_n) + \lambda k^*(x_1, y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{k}(x_n, y_1) + \lambda k^*(x_n, y_1), & \ldots, & \overline{k}(x_n, y_n) + \lambda k^*(x_n, y_n) \end{vmatrix}}.$$

С помощью резольвенты $\Gamma(x, y, \lambda)$ мы и можем получить приближенное решение уравнения с ядром $\overline{k}(x, y)$. В частности, приближенные значения для собственных значений λ этого ядра найдем, приравнивая нулю определитель, стоящий в знаменателе Г. Оценка погрешности этого метода может быть приведена на основании теорем п° 2 и п° 4. Приведем иллюстрирующий пример, который заимствуем из той же статьи Бэтмана.

Пример. Рассмотрим в качестве примера ядро интегрального уравнения, к которому приводится уравнение струны и которое в квадрате (0,1; 0,1) задается равенствами:

$$\overline{k}(x, y) = \begin{cases} x(y-1) & x \leqslant y \\ y(x-1) & x \geqslant y. \end{cases}$$

Для составления Г нужно еще $k^*(x, y)$, но

$$k^*(x, y) = \int_0^1 \overline{k}(x, t)\, \overline{k}(t, y)\, dt = \begin{cases} \frac{1}{6} x(1-y)(2y - x^2 - y^2), & x \leqslant y \\ \frac{1}{6} y(1-x)(2x - x^2 - y^2) & x \geqslant y \end{cases}$$

Точки x_m и y_r выберем равноотстоящие и возьмем $n = 5$, тогда

$$x_1 = y_1 = \frac{1}{6}; \quad x_2 = y_2 = \frac{2}{6}; \quad x_3 = y_3 = \frac{3}{6}; \quad x_4 = y_4 = \frac{4}{6};$$

$$x_5 = y_5 = \frac{5}{6}.$$

Мы займемся только определением собственных чисел и составим определитель, стоящий в знаменателе Г. Тогда, полагая $\lambda = 216x$ и проводя сокращение, найдем:

$$\begin{vmatrix} 5(1-10x) & 4(1-19x) & 3(1-26x) & 2(1-31x) & 1-34x \\ 4(1-19x) & 8(1-16x) & 6(1-23x) & 4(1-28x) & 2(1-31x) \\ 3(1-26x) & 6(1-23x) & 9(1-18x) & 6(1-23x) & 3(1-26x) \\ 2(1-31x) & 4(1-28x) & 6(1-23x) & 8(1-16x) & 4(1-19x) \\ 1-34x & 2(1-31x) & 3(1-26x) & 4(1-19x) & 5(1-10x) \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия приходим к уравнению:

$$130x^5 - 441x^4 + 488x^3 - 206x^2 + 30x - 1 = 0$$

или

$$(x-1)(2x-1)(5x-1)(13x^2 - 21x + 1) = 0.$$

Отсюда после решения для λ находим следующие значения:

$$\lambda_1 = 10{,}02; \quad \lambda_2 = 43{,}2; \quad \lambda_3 = 108; \quad \lambda_4 = 216; \quad \lambda_5 = 355{,}2.$$

Точные величины собственных значений здесь, как известно: π^2, $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2$, ..., т. е.

$$\lambda_1 = 9{,}8696; \quad \lambda_2 = 39{,}4784; \quad \lambda_3 = 88{,}8264; \quad \ldots,$$

следовательно, ошибка при определении первого собственного значения 2%, второго — 9%, третьего — 20%.

Несколько более точные результаты получились бы, если мы выбрали бы другие точки $x_1, x_2, \ldots$, например:

$$x_1 = y_1 = \frac{1}{10}; \quad x_2 = y_2 = \frac{3}{10}; \quad x_3 = y_3 = \frac{5}{16}; \quad x_4 = y_4 = \frac{7}{16},$$

$$x_5 = y_5 = \frac{9}{16},$$

или если бы взяли за x_i и y_i пять точек Гаусса для промежутка (0,1). Однако очень большая точность не может быть достигнута при таком числе ординат, так как само ядро $\overline{k}(x, y)$ имеет особенность: производная его разрывна при $y = x$, вследствие чего невозможна хорошая аппроксимация его алгебраическими ядрами.

ГЛАВА III

МЕТОД СЕТОК

§ 1. Выражение производных через разности функции. Приближенное выражение оператора Лапласа.

Для изложения метода сеток нам потребуется выражение производных от заданной функции через разности этой функции. По причинам, которые будут выяснены ниже, нам будут недостаточны формулы, относящиеся к равноотстоящим значениям аргумента. Мы приведем поэтому все формулы для общего случаи, когда значения аргумента не будут равноотстоящими.

Пусть даны произвольные значения

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

независимой переменной x и соответствующие им значения функции

$$y_0 = f(a_0),\quad y_1 = f(a_1),\quad \ldots,\quad y_n = f(a_n).$$

Вместо обычных разностей функция тогда рассматривают так называемые разделенные разности, образованные по следующему закону:

$$(1)\qquad f(a_1, a_0) = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0},\quad f(a_2, a_1) = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1},$$

$$f(a_3, a_2) = \frac{f(a_3) - f(a_2)}{a_3 - a_2},\quad \ldots$$

Это—разделенные разности первого порядка. По ним образуют разделенные разности второго порядка:

$$(2)\qquad f(a_2, a_1, a_0) = \frac{f(a_2, a_1) - f(a_1, a_0)}{a_2 - a_0},$$

$$f(a_3, a_2, a_1) = \frac{f(a_3, a_2) - f(a_2, a_1)}{a_3 - a_1},\quad \ldots$$

затем разделенные разности третьего порядка:

$$(3)\qquad f(a_3, a_2, a_1, a_0) = \frac{f(a_3, a_2, a_1) - f(a_2, a_1, a_0)}{a_3 - a_0},\quad \ldots$$

и т. д.

Нетрудно видеть, что для равноотстоящих значений аргумента a_0, $a_1 = a_0 + h$, $a_2 = a_0 + 2h$, ...

$$(4)\quad \begin{cases} f(a_1, a_0) = \dfrac{\Delta y_0}{h},\quad f(a_2, a_1) = \dfrac{\Delta y_1}{h},\quad f(a_3, a_2) = \dfrac{\Delta y_2}{h},\quad \ldots \\ f(a_2, a_1, a_0) = \dfrac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2},\quad f(a_3, a_2, a_1) = \dfrac{\Delta^2 y_1}{2!\,h^3},\quad \ldots \\ f(a_3, a_2, a_1, a_0) = \dfrac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3},\quad \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Разделенные разности могут быть представлены в более симметричном виде, именно:

$$(5)\quad \begin{cases} f(a_1, a_0) = \dfrac{f(a_0)}{a_0 - a_1} + \dfrac{f(a_1)}{a_1 - a_0} \\ f(a_2, a_1, a_0) = \dfrac{1}{a_2 - a_0}\left\{\dfrac{f(a_2)}{a_2 - a_1} + \dfrac{f(a_1)}{a_1 - a_2}\right\} + \\ + \dfrac{1}{a_0 - a_2}\left\{\dfrac{f(a_1)}{a_1 - a_0} + \dfrac{f(a_0)}{a_0 - a_1}\right\} = \dfrac{f(a_0)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + \\ + \dfrac{f(a_1)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)} + \dfrac{f(a_2)}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f(a_k)}{(a_k - a_0)\ldots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_n)}. \end{cases}$$

Из написанных равенств совершенно очевидно, что правые части симметричны относительно $a_0, a_1, \ldots, a_n$, и поэтому $f(a_n, a_{n-1}, \ldots a_0)$ не изменится при любой перестановке значений a_k аргумента.

Будем искать полином степени n, который при значениях аргумента

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$$

принимал бы значения соответственно

$$y_0 = f(a_0),\quad y_1 = f(a_1),\quad \ldots,\quad y_n = f(a_n).$$

Приведем решение задачи в удобной для нас форме, данной Ньютоном в 1687 году.[1] Мы будем опираться на очевидное утверждение, что

[1] Ньютон, Математические принципы натуральной философии, книга III, лемма V.

разделенные разности порядка n от полинома степени n — постоянны.[1] Допустим, простоты ради, что нам даны лишь четыре значения аргумента

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$$

и мы имеем полином третьей степени, принимающий при этих значениях заданные значения $f(a_k)$.

В силу постоянства разностей третьего порядка, имеем:

$$f(x, a_0, a_1, a_2) = f(a_0, a_1, a_2, a_3).$$

Но по определению разности третьего порядка:

$$f(x, a_0, a_1, a_2) = \frac{f(x, a_0, a_1) - f(a_0, a_1, a_2)}{x - a_2},$$

поэтому

$$f(x, a_0, a_1) = f(a_0, a_1, a_2) + (x - a_2) f(x, a_0, a_1, a_2) =$$
$$= f(a_0, a_1, a_2) + (x - a_2) f(a_0, a_1, a_2, a_3).$$

Дальше, согласно определению второй разности:

$$f(x, a_0, a_1) = \frac{f(x, a_0) - f(a_0, a_1)}{x - a_1},$$

$$f(x, a_0) = f(a_0, a_1) + (x - a_1) f(x, a_0, a_1) = f(a_0, a_1) +$$
$$+ (x - a_1) f(a_0, a_1, a_2) + (x - a_1)(x - a_2) f(a_0, a_1, a_2, a_3).$$

Наконец, так как

$$f(x) = f(a_0) + (x - a_0) f(x, a_0),$$

окончательно получим:

$$f(x) = f(a_0) + (x - a_0) f(a_0, a_1) + (x - a_0)(x - a_1) f(a_0, a_1, a_2) +$$
$$+ (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2) f(a_0, a_1, a_2, a_3).$$

Подобные же рассуждения применимы к случаю полинома степени n, и мы имеем формулу Ньютона:

$$f(x) = f(a_0) + (x - a_0) f(a_0, a_1) + (x - a_0)(x - a_1) f(a_0, a_1, a_2) + \ldots +$$
$$+ (x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{n-1}) f(a_0, a_1, \ldots, a_n). \tag{6}$$

[1] Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что разделенные разности первого порядка от любой степени $f(x) = x^k$ будут полиномами степени на единицу ниже.

Но проверить это можно весьма быстро, ибо

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^k - a^k}{x - a} = x^{k-1} + x^{k-2} a + \ldots + a^{k-1}.$$

В частном случае, когда значения аргумента равноотстоящие, предыдущее равенство вырождается в формулу Грегори-Ньютона:

$$y(x) = y_0 + \frac{x - a}{1} \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{(x - a)(x - a - h)}{1 \cdot 2} \frac{\Delta^2 y_0}{h^2} + \ldots +$$
$$+ \frac{(x - a)(x - a - h) \ldots [x - a - (n - 1) h]}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{\Delta^n y_0}{h^n}. \tag{7}$$

Из (6) получаются выражения для производных через разделенные разности. Обозначая там разности $x - a_k$ через α_k и производя дифференцирование, получим:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x) = f(a_0, a_1) + (\alpha_0 + \alpha_1) f(a_0, a_1, a_2) + \\ + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\alpha_2) f(a_0, a_1, a_2, a_3) + \ldots \\ \frac{1}{2!} f''(x) = f(a_0, a_1, a_2) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(a_0, a_1, a_2, a_3) + \\ + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) + \ldots \\ \frac{1}{3!} f'''(x) = f(a_0, a_1, a_2, a_3) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) + \ldots \\ \frac{1}{4!} f^{IV}(x) = f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) + \\ + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{8}$$

Коэфициентами при разделенных разностях в этих формулах стоят симметрические функции от $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ В первой формуле коэфициентом при $f(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ стоит симметрическая функция от $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ измерения $r - 1$. Во всех следующих формулах после каждого дифференцирования ее измерение убывает на единицу.

В частном случае, когда x совпадает с одним из значений a_k, например a_0, из (8) в виду $\alpha_0 = 0$, если считать $\alpha_k = a_0 - a_k$, вытекает:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(a_0) = f(a_0, a_1) + \alpha_1 f(a_0, a_1, a_2) + \alpha_1\alpha_2 f(a_0, a_1, a_2, a_3) + \ldots \\ \frac{1}{2!} f''(a_0) = f(a_0, a_1, a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2) f(a_0, a_1, a_2, a_3) + \\ + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) + \ldots \\ \frac{1}{3!} f'''(a_0) = f(a_0, a_1, a_2, a_3) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) + \ldots \\ \frac{1}{4!} f^{IV}(a_0) = f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) + \\ + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) + \ldots \end{array}\right. \tag{9}$$

Частные производные любого порядка от функции многих переменных по каждому из аргументов могут быть вычислены по формулам (9).

Нам кроме того будут для дальнейшего полезны выражения операции Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ через частные значения функции. Наибольшую точность все способы ее выражения имеют для правильных разбиений плоскости, и мы поэтому ограничиваемся только этим случаем. Начнем с случая квадратной сетки. Проведем на плоскости две системы параллельных прямых:

$$x = x_0 + ih = x_i, \quad y = y_0 + kh = y_k.$$

Значение функции двух переменных $u(x, y)$ в точках пересечения этих прямых мы будем ради краткости обозначать $u_{ik} = u(x_0 + ih, y_0 + kh)$.

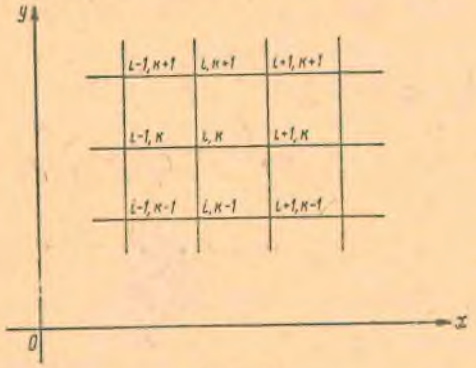


Рис. 5.

Возьмем узел (i, k) сетки и попытаемся построить значение операции Лапласа для нее. Наиболее просто было бы положить ее приближенно равной сумме разделенных вторых центральных частных разностей в точке (i, k):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\Delta_x^2 u_{ik}}{h^2} + \frac{\Delta_y^2 u_{ik}}{h^2}, \quad \Delta_x^2 u_{ik} = u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}.$$

Эта формула войдет в последующее изложение как частный случай другой, более общей.

Можно, однако, построить более точное выражение для Δu, если принять во внимание кроме четырех ближайших точек, участвующих в приведенном выше выражении, еще четыре следующих ближайших точки.

Рассмотрим четыре прилегающих к точке (i, k) квадрата. Образуем разности между значениями функции в их вершинах и во взятой точке. Пользуясь формулой Тейлора, получим для них следующие выражения:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
u_{i+1,k} - u_{ik} &= u(x_i + h, y_k) - u(x_i, y_k) = hu_x + \\
&+ \frac{h^2}{2!} u_{x^2} + \frac{h^3}{3!} u_{x^3} + \frac{h^4}{4!} u_{x^4} + \dots \\
u_{i-1,k} - u_{ik} &= -hu_x + \frac{h^2}{2!} u_{x^2} - \frac{h^3}{3!} u_{x^3} + \frac{h^4}{4!} u_{x^4} - \dots \\
u_{i,k+1} - u_{ik} &= hu_y + \frac{h^2}{2!} u_{y^2} + \frac{h^3}{3!} u_{y^3} + \frac{h^4}{4!} u_{y^4} + \dots \\
u_{i,k-1} - u_{ik} &= -hu_y + \frac{h^2}{2!} u_{y^2} - \frac{h^3}{3!} u_{y^3} + \frac{h^4}{4!} u_{y^4} - \dots \\
u_{i+1,k+1} - u_{ik} &= u(x_i + h, y_k + h) - u(x_i, y_k) = \\
&= h\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) u + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \dots \\
u_{i-1,k+1} - u_{i,k} &= h\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) u + \\
&+ \frac{h^2}{2!}\left(-\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \frac{h^3}{3!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \dots \\
u_{i-1,k-1} - u_{i,k} &= h\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right) u + \\
&+ \frac{h^2}{2!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \frac{h^3}{3!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \dots \\
u_{i+1,k-1} - u_{ik} &= h\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right) u + \\
&+ \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \dots
\end{aligned}\right.$$

Будем строить Δu в виде линейной однородной комбинации всех построенных нами разностей. В виду очевидной симметрии первых четырех из них, все они должны войти с одинаковыми коэфициентами, и нам поэтому необходимо будет построить следующую комбинацию разностей:

$$\Diamond u_{ik} = u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1} - 4u_{ik}.$$

Складывая первые четыре из равенства (10), имеем:

$$(11)\quad \Diamond u_{ik} = 2\left\{\frac{h^2}{2!}(u_{x^2} + u_{y^2}) + \frac{h^4}{4!}(u_{x^4} + u_{y^4}) + \frac{h^6}{6!}(u_{x^6} + u \ + \dots\right\}$$

Совершенно то же можно сказать относительно последних четырех разностей (10). Обозначим сумму их через $\square u_{ik}$. При сложении их выражений (10) все нечетные степени скобок, очевидно, сократятся, в виду того, что они имеют попарно противоположные знаки. Далее, при суммировании четных степеней скобок в результате сложения сохранятся лишь те члены, которые содержат каждую из операций $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ в четной степени. Поэтому:

$$(12)\qquad \square u_{i,k} = 4\left\{\frac{h^2}{2!}(u_{x^2}+u_{y^2}) + \frac{h^4}{4!}(u_{x^4}+6u_{x^2y^2}+u_{y^4}) + \right.$$
$$\left. + \frac{h^6}{6!}(u_{x^6}+15u_{x^4y^2}+15_{x^2y^4}+u_{y^6}) + \ldots\right\}.$$

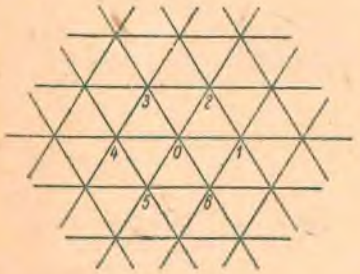


Рис. 6.

Составим теперь линейную комбинацию $a \diamond u_{ik} + b \square u_{ik}$ и выберем числа a, b так, чтобы коэфициентом при операции Лапласа $u_{x^2}+u_{y^2}$ стояла единица и чтобы производные четвертого порядка образовали бы бигармонический оператор $\triangle\triangle u = u_{x^4}+2u_{x^2y^2}+u_{y^4}$. Для этого должны быть, очевидно, соблюдены уравнения:

$$2\frac{h^2}{2!}a + 4\frac{h^2}{2!}b = 1,$$
$$2\left(2\frac{h^4}{4!}a + 4\frac{h^4}{4!}b\right) = 4\frac{h^4}{4!}6b.$$

Из них находим:

$$(13)\quad \begin{cases} a = \dfrac{2}{3h^2}, \qquad b = \dfrac{1}{6h^2} \\ \dfrac{1}{6h^2}(4\diamond u_{ik} + \square u_{ik}) = (u_{x^2}+u_{y^2}) + \dfrac{2h^2}{4!}(u_{x^4}+2u_{x^2y^2}+u_{y^4}) + \\ \quad + \dfrac{2h^4}{6!}(u_{x^6}+5u_{x^4y^2}+5u_{x^2y^4}+u_{y^6}) + \ldots \end{cases}$$

Применение этого равенства к решению уравнений в частных производных мы дадим в § 2. Рассмотрим теперь случай сетки, образованной из правильных треугольников. Возьмем внутреннюю точку, помеченную нумером 0, и шесть окружающих ее узловых точек 1, 2, 3, 4, 5, 6; значения функций u в них обозначим через $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_6$. Если координаты нулевой точки будут x, y и длина стороны треугольника

есть h, то координаты соседних точек будут соответственно

$$(x+h, y),\quad \left(x+\frac{1}{2}h, y+\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),\quad \left(x-\frac{1}{2}h, y+\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),$$
$$(x-h, y),\quad \left(x-\frac{1}{2}h, y-\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),\quad \left(x+\frac{1}{2}h, y-\frac{\sqrt{3}}{2}h\right).$$

По формуле Тейлора имеем:

$$(14)\quad \begin{cases} u_1-u_0 = hu_x + \dfrac{h^2}{2!}u_{x^2} + \dfrac{h^3}{3!}u_{x^3} + \dfrac{h^4}{4!}u_{x^4} + \cdots \\ u_2-u_0 = h\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)u + \dfrac{h^2}{2!}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \\ \quad + \dfrac{h^3}{3!}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \dfrac{h^4}{4!}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^4 u + \cdots \\ u_3-u_0 = h\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)u + \dfrac{h^2}{2!}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \\ \quad + \dfrac{h^3}{3!}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \dfrac{h^4}{4!}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^4 u + \cdots \\ u_4-u_0 = -hu_x + \dfrac{h^2}{2!}u_{x^2} - \dfrac{h^3}{3!}u_{x^3} + \dfrac{h^4}{4!}u_{x^4} - \cdots \\ u_5-u_0 = h\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)u + \dfrac{h^2}{2!}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \\ \quad + \dfrac{h^3}{3!}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \dfrac{h^4}{4!}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^4 u + \cdots \\ u_6-u_0 = h\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right) + \dfrac{h^2}{2!}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \\ \quad + \dfrac{h^3}{3!}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \dfrac{h^4}{4!}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^4 u + \cdots \end{cases}$$

Сложим все эти равенства. При суммировании все производные, получающиеся в результате диференцирования нечетное число раз по одной из переменных x и y, должны, очевидно, сократиться. В результате сложения получим:

$$(15)\qquad \sum_{i=1}^{6} u_i - 6u_0 = \frac{3h^2}{2!}\triangle u + \frac{9}{4}\frac{h^4}{4!}\triangle\triangle u +$$
$$+ \frac{h^6}{6!}\left(\frac{33}{16}u_{x^6} + 15\cdot\frac{3}{16}u_{x^4y^2} + 15\cdot\frac{9}{16}u_{x^2y^4} + \frac{27}{16}u_{y^6}\right) + \cdots$$

Остановимся еще на случае, когда сетка образована правильными шестиугольниками. Возьмем узловую точку с координатами x, y, отмеченную нумером нуль, и три соседние точки 1, 2, 3. Если h есть длина стороны шестиугольника, то координаты последних суть



Рис. 7.

$$\left(x+\frac{1}{2}h,\ y+\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),\quad (x-h,\ y),\quad \left(x+\frac{1}{2}h,\ y-\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),$$

и мы будем иметь:

$$(16)\quad \begin{cases} u_1-u_0=h\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)u+\frac{h^2}{2!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u+ \\ \qquad +\frac{h^3}{3!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u+\dots \\ u_2-u_0=-hu_x+\frac{h^2}{2!}u_{x^2}-\frac{h^3}{3!}u_{x^3}+\dots \\ u_3-u_0=h\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)u+\frac{h^2}{2!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u+ \\ \qquad +\frac{h^3}{3!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u+\dots \end{cases}$$

После сложения этих равенств получим:

$$(17)\quad \sum_{i=1}^{3}u_i-3u_0=\frac{3}{2}\frac{h^2}{2!}\Delta u-\frac{h^3}{3!}\left(\frac{3}{4}u_{x^3}-\frac{9}{4}u_{xy^2}\right)+\dots$$

§ 2. Уравнения эллиптического типа и соответствующие им уравнения в конечных разностях.

n° 1. Уравнения в конечных разностях. Пусть нужно найти решение уравнения:

$$(1)\quad L(u)=A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+qu=f(x,y)\quad A>0,\ C>0,$$

для всех точек некоторой области G с границей Г по тем или иным требованиям, относящимся к границе Г области.

Ниже мы более подробно остановимся на различных видах граничных условий, настоящие же наши рассуждения будут в одинаковой мере относиться ко всем видам таких условий.

Приведем на плоскости систему прямых, параллельных координатным осям:

$$x=x_0,\quad x=x_1,\quad \dots,\quad x=x_n,\quad x_0<x_1<\dots<x_n,$$
$$y=y_0,\quad y=y_1,\quad \dots,\quad y=y_m,\quad y_0<y_1<\dots<y_m.$$

Они образуют некоторую прямоугольную сетку на плоскости. Построим замкнутую ломаную линию C, составленную из сторон и диагоналей прямоугольников, по возможности хорошо подходящую к Г. На черте дан пример построения C для случая, когда кривая Г — окружность.

Вместо нахождения решения всюду в G, мы будем находить его значения только для узловых точек сетки, лежащих внутри C. Предельные условия, которые должны быть соблюдены на Г, перенесем тем или иным способом на C. Диференциальное уравнение (1), отвечающее изучаемой проблеме, заменим приближенным уравнением в конечных разностях следующим способом. Возьмем узел (x_i, y_k) сетки, лежащий внутри C_u четыре ближайших узла, лежащих на прямых $x=x_i$, $y=y_k$. Координаты их будут (x_{i+1}, y_k), (x_i, y_{k+1}), (x_{i-1}, y_k), (x_i, y_{k-1}).

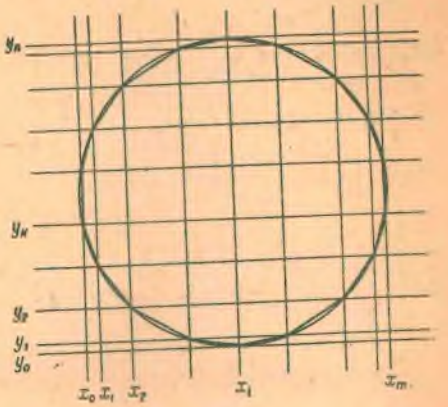


Рис. 8.

Найдем выражение второй производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ через значения u в указанных нам точках, окружающих (x_i, y_k).

Рассмотрим 3 точки (x_{i-1}, y_k), (x_i, y_k), (x_{i+1}, y_k) и применим к разысканию $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ вторую формулу (9) § 1, приняв $a_0=x_i$, $a_1=x_{i-1}$, $a_2=x_{i+1}$. В виду наличия только трех точек, в ней сохранится лишь первый член: $\frac{1}{2!}f''(a_0)=f(a_0,a_1,a_2)$. Если воспользоваться второй формулой (5) § 1, дающей выражение второй разделенной разности, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\left\{\frac{u_{i+1,k}}{\Delta x_i(\Delta x_i+\Delta x_{i-1})}-\frac{u_{ik}}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i}+\frac{u_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i+\Delta x_{i-1})}\right\}=$$
$$=2\,\frac{\dfrac{\Delta_x u_{ik}}{\Delta x_i}-\dfrac{\Delta_x u_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_i+\Delta x_{i-1}}.$$

Аналогично для второй производной по y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\left\{ \frac{u_{i,\,k+1}}{\Delta y_k (\Delta y_k + \Delta y_{k-1})} - \frac{u_{ik}}{\Delta y_{k-1}\Delta y_k} + \frac{u_{i,\,k-1}}{\Delta y_{k-1}(\Delta y_k + \Delta y_{k-1})} \right\} =$$

$$= 2\,\frac{\dfrac{\Delta_y u_{ik}}{\Delta y_k} - \dfrac{\Delta_y u_{i,\,k-1}}{\Delta y_{k-1}}}{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}.$$

Найдем сейчас выражения для первых производных. Взяв опять те же три точки и положив, как прежде, $a_0 = x_i$, $a_1 = x_{i-1}$, $a_2 = x_{i+1}$, применим первую из формул (9) § 1. В ней сохранятся два первых члена: $f'(a_0) = f(a_0, a_1) + \alpha_1 f(a_0, a_1, a_2)$. Если вновь воспользоваться формулами (5) § 1, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}\, u_{i+1,\,k} +$$

$$+ \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}}\, u_{ik} - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}\, u_{i-1,\,k} =$$

$$= \frac{\Delta x_{i-1}\,\dfrac{\Delta_x u_{ik}}{\Delta x_i} + \Delta x_i\,\dfrac{\Delta_x u_{i-1,\,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}.$$

Совершенно так же для частной производной по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta y_k (\Delta y_k + \Delta y_{k-1})}\, u_{i,\,k+1} +$$

$$+ \frac{\Delta y_k - \Delta y_{k-1}}{\Delta y_k \quad \Delta y_{k-1}}\, u_{i,k} - \frac{\Delta y_k}{\Delta y_{k-1}(\Delta y_k + \Delta y_{k-1})}\, u_{i,\,k-1} =$$

$$= \frac{\Delta y_{k-1}\,\dfrac{\Delta_y u_{ik}}{\Delta y_k} + \Delta y_k\,\dfrac{\Delta_y u_{i,\,k-1}}{\Delta y_{k-1}}}{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}.$$

Подставим вместо производных их выражения в уравнение (1). Если ввести обозначения:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
a_{ik} &= 2\left(\frac{A_{ik}}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i} + \frac{C_{ik}}{\Delta y_{k-1}\Delta y_k}\right) - \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i}\, D_{ik} - \\
&\quad - \frac{\Delta y_k - \Delta y_{k-1}}{\Delta y_k \Delta y_{k-1}}\, E_{ik} - q_{ik}, \\
b_{ik}^{(1)} &= 2\,\frac{A_{ik}}{\Delta x_i (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} + \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}\, D_{ik}, \\
b_{ik}^{(2)} &= 2\,\frac{C_{ik}}{\Delta y_k (\Delta y_k + \Delta y_{k-1})} + \frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta y_k (\Delta y_k + \Delta y_{k-1})}\, E_{ik}, \\
b_{ik}^{(3)} &= 2\,\frac{A_{ik}}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}\, D_{ik}, \\
b_{ik}^{(4)} &= 2\,\frac{C_{ik}}{\Delta y_{k-1}(\Delta y_k + \Delta y_{k-1})} - \frac{\Delta y_k}{\Delta y_{k-1}(\Delta y_k + \Delta y_{k-1})}\, E_{ik},
\end{aligned}\right.$$

то в результате подстановки получим следующее уравнение в конечных разностях:

$$(3)\quad l_{ik}(u) = b_{ik}^{(1)} u_{i+1,\,k} + b_{ik}^{(2)} u_{i,\,k+1} + b_{ik}^{(3)} u_{i-1,\,k} + b_{ik}^{(4)} u_{i,\,k-1} - a_{ik} u_{ik} = f_{ik};$$

оно должно быть выполнено во всех углах сетки, лежащих внутри контура C.

В частном случае, когда сетка квадратная:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = h$$
$$y_1 - y_0 = y_2 - y_1 = \ldots = h,$$

формулы (2) для определения коэфициентов $a_{i,k}^{(j)}$, $b_{ik}^{(j)}$ уравнения в конечных разностях примут вид:

$$a_{ik} = \frac{2}{h^2}(A_{ik} + C_{ik}) - q_{ik},$$

$$b_{ik}^{(1)} = \frac{A_{ik}}{h^2} + \frac{D_{ik}}{2h}, \quad b_{ik}^{(2)} = \frac{C_{ik}}{h^2} + \frac{E_{ik}}{2h},$$

$$b_{ik}^{(3)} = \frac{A_{ik}}{h^2} - \frac{D_{ik}}{2h}, \quad b_{ik}^{(4)} = \frac{C_{ik}}{h^2} - \frac{E_{ik}}{2h}.$$

Уравнение (3) поэтому будет:

$$(4)\quad \left(A_{ik}+\frac{h}{2}D_{ik}\right)u_{i+1,\,k}+\left(C_{ik}+\frac{h}{2}E_{ik}\right)u_{i,\,k+1}+$$
$$+\left(A_{ik}-\frac{h}{2}D_{ik}\right)u_{i-1,\,k}+\left(C_{ik}-\frac{h}{2}E_{ik}\right)u_{i,\,k-1}-$$
$$-2\left(A_{ik}+C_{ik}-\frac{h^2}{2}q_{ik}\right)u_{ik}=h^2f_{ik}.$$

Пример. Рассмотрим в качестве примера уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

Здесь $A=C=1$, $D=E=q=0$, $a_{ik}=\dfrac{2}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i}+\dfrac{2}{\Delta y_{k-1}\Delta y_k}$;

$$b_{ik}^{(1)}=\frac{2}{\Delta x_i(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)};\quad b_{ik}^{(2)}=\frac{2}{\Delta y_k(\Delta y_{k-1}+\Delta y_k)};$$

$$b_{ik}^{(3)}=\frac{2}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)};\quad b_{ik}^{(4)}=\frac{2}{\Delta y_{k-1}(\Delta y_{k-1}+\Delta y_k)};$$

Уравнение (3) будет иметь вид:

$$(5)\quad \frac{2}{\Delta x_i+\Delta x_{i-1}}\left(\frac{u_{i+1,\,k}}{\Delta x_i}+\frac{u_{i-1,\,k}}{\Delta x_{i-1}}\right)+\frac{2}{\Delta y_k+\Delta y_{k-1}}\left(\frac{u_{i,\,k+1}}{\Delta y_k}+\frac{u_{i,\,k-1}}{\Delta y_{k-1}}\right)-$$
$$-2\left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i}+\frac{1}{\Delta y_{k-1}\Delta y_k}\right)u_{ik}=f_{ik}.$$

В случае квадратной сетки получим:

$$(6)\quad u_{i+1,\,k}+u_{i,\,k+1}+u_{i-1,\,k}+u_{i,\,k-1}-4u_{ik}=h^2f_{ik}.$$

В частных случаях уравнение (3) в конечных разностях может быть заменено без существенного усложнения другими, более точными. Рассмотрим уравнение

$$(7)\quad \Delta u-\mu u=f(x,y),$$

где μ есть некоторая постоянная. Пусть на плоскости нанесена квадратная сетка:

$$x=x_0+ih,\quad y=y_0+kh.$$

Построим контур C, состоящий из сторон квадратов, по возможности мало отличающийся от Г. Рассмотрим равенство (13) § 1. Отбрасывая в нем все члены, содержащие h в четвертой и высших степенях, приближенно положим:

$$\frac{1}{6h^2}(4\diamond u_{ik}+\square u_{ik})=\Delta u+\frac{h^2}{12}\Delta\Delta u.$$

Из уравнения (7) следует, что

$$\Delta\Delta u=\Delta f+\mu\Delta u=\Delta f+\mu(f+\mu u),$$

и поэтому заданное нам дифференциальное уравнение мы можем приближенно заменить следующим уравнением в конечных разностях:

$$(8)\quad \frac{1}{6h^2}(4\diamond u_{ik}+\square u_{ik})=f_{ik}+\mu u_{ik}+\frac{h^2}{12}[(\Delta f)_{ik}+\mu(f_{ik}+\mu u_{ik})].$$

В случае уравнения Лапласа (8) примет вид:

$$4\diamond u_{ik}+\square u_{ik}=0.$$

Перейдем теперь к элементарным случаям непрямоугольных сеток, рассмотренным выше. Для случая сетки, образованной правильными треугольниками, имеет место формула (15) § 1. Отбросив в ней члены, содержащие h в шестой и высших степенях, получим приближенное равенство

$$\frac{2}{3h^2}\left(\sum_{i=1}^{6}u_i-6u_0\right)=\Delta u+\frac{h^2}{16}\Delta\Delta u.$$

Имея в виду приведенное несколькими строками выше выражение для бигармонической операции от функции u, мы можем заменить уравнение (7) приближенно следующим уравнением в конечных разностях:

$$(9)\quad \frac{2}{3h^2}\left(\sum_{i=1}^{6}u_i-6u_0\right)=f_{ik}+\mu u_{ik}+\frac{h^2}{16}[(\Delta f)_{ik}+\mu(f_{ik}+\mu u_{ik})],$$

которое должно быть выполнено во всех внутренних точках сетки.

Для гармонического уравнения $\Delta u=0$ (9) имеет форму:

$$\sum_{i=1}^{6}u_i-6u_0=0.$$

В случае сеток, образованных правильными шестиугольниками, если отбросить в равенстве (17) § 1 члены, содержание h выше чем во второй степени, получим приближенное равенство

$$\frac{4}{3h^2}\left(\sum_{i=1}^{3}u_i-3u_0\right)=\Delta u.$$

Уравнение в конечных разностях, которым заменяется (7), будет

$$(10)\quad \frac{4}{3h^2}\left(\sum_{i=1}^{3}u_i-3u_0\right)=f_{ik}+\mu u_{ik}.$$

В виду малой точности предыдущего равенства, сетки шестиугольного типа вряд ли будут иметь практическое значение.

n° 2. Предельные условия для уравнений в конечных разностях. Приведенные нами в n° 1 уравнения (3), (8), (9), (10) для u_{ik} должны быть выполнены во всякой внутренней точке сетки.

Кроме этих уравнений u_{ik} должны будут удовлетворять еще некоторым предельным условиям, которые обязаны выполняться в точках сетки, лежащих на границе C и которые являются результатом переноса с Г на C предельного условия для искомого решения $u(x, y)$ дифференциального уравнения (1).

Наиболее простым случаем будет тот, когда заданы на Г граничные значения функции $u(x, y)$

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y).$$

Эти значения должны быть тем или иным способом снесены на контур C и приняты за предельные значения для u_{ik}. Наиболее естественным будет пытаться сносить предельные значения с Г на граничные узлы сетки по кратчайшему расстоянию. Часто снос производят вдоль прямых, параллельных координатным осям. Полученные в результате такого сноса граничные значения для u_{ik} вообще не будут совпадать с действительными значениями, которые принимает функция $u(x, y)$ в граничных узлах.

Вычислитель, имеющий навык в решении такого рода задач, часто может приближенно указать, судя по граничным значениям, те поправки, которые нужно придать к сносимым величинам, чтобы в результате получить величины, более близкие к действительным значениям искомой функции в граничных узлах.

Грубый способ определения той части погрешности, которая происходит от ошибки в предельных условиях, нами дан ниже в § 4.

Исправления ошибок r_{ik} можно производить, например, следующим способом. После нахождения u_{ik} во всех узлах сетки экстраполируют u_{ik} в те точки контура Г, из которых были снесены значения на C, и по величине отклонения полученных значений от φ судят о величине погрешности.

Если полученные результаты неудовлетворительны по своей точности, то составляют обычным путем уравнение для погрешности r_{ik}. Граничные значения ее мы приближенно знаем. Из уравнения находят поправки, которые необходимо внести в прежний результат.

За уравнения, из которых должны быть найдены эти поправки r_{ik}, можно, очевидно, принять однородные уравнения, отвечающие изучаемым уравнениям в конечных разностях, (3), (8), (9), (10), получающиеся из них путем отбрасывания свободных членов.

Более сложным является тот случай, когда мы имеем дело с задачей Неймана для уравнения (1), т. е. когда заданы на границе предельные значения не самой функции, а нормальной производной от нее:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \varphi,$$

или с более общей предельной задачей с предельными условиями вида:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \psi u|_{\Gamma} = \varphi.$$

В этом случае снесены должны быть с Г на C не только значения u, но и значения нормальной производной.

Рассмотрим одну из граничных точек, отмеченную на чертеже нумером нуль, и две соседние с ней точки сетки 1 и 2. Будут ли последние граничными или нет,— для нас безразлично; мы будем требовать лишь, чтобы направления (l_1) и (l_2) не были параллельными. Назовем углы, которые образуют (l_1), (l_2) и (n) с осью x, φ_1, φ_2, φ, и направляющие косинусы их будем обозначать соответственно через α_1, β_1; α_2, β_2; α, β — так что



Рис. 9.

$$\alpha_1 = \cos\varphi_1, \quad \beta_1 = \sin\varphi_1, \quad \ldots$$

Пользуясь формулой Тейлора, можем написать

$$\frac{\Delta_1 u}{l_1} = \frac{u_1 - u_0}{l_1} = \frac{u(x + l_1\alpha_1,\ y + l_1\beta_1) - u(x, y)}{l_1} = \alpha_1 u_x + \beta_1 u_y + R_1,$$

$$\frac{\Delta_2 u}{l_2} = \frac{u_2 - u_0}{l_2} = \frac{u(x + l_2\alpha_2,\ y + l_2\beta_2) - u(x, y)}{l_2} = \alpha_2 u_x + \beta_2 u_y + R_2,$$

где R_1 и R_2 будут бесконечно малые вместе с l_1 и l_2 по крайней мере первого порядка. Отсюда находим u_x и u_y

$$u_x = \frac{\frac{\Delta_1 u - R_1 l_1}{l_1}\beta_2 - \frac{\Delta_2 u - R_2 l_2}{l_2}\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1},$$

$$u_y = \frac{\frac{\Delta_2 u - R_2 l_2}{l_2}\alpha_1 - \frac{\Delta_1 u - R_1 l_1}{l_1}\alpha_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}.$$

Поэтому для $\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha u_x + \beta u_y$, если заметить, что

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin(l_1, l_2),$$

$$\alpha\beta_2 - \alpha_2\beta = \sin\varphi_2\cos\varphi - \cos\varphi_2\sin\varphi = \sin(\varphi_2 - \varphi) = \sin(n, l_2),$$

$$\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = \sin\varphi_1\cos\varphi - \cos\varphi_1\sin\varphi = -\sin(\varphi - \varphi_1) = -\sin(l_1, n),$$

находим:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\sin(l_1 l_2)}\left\{\frac{\Delta_1 u - R_1 l_1}{l_1}\sin(n l_2) + \frac{\Delta_2 u - R_2 l_2}{l_2}\sin(l_1 n)\right\}.$$

Если отбросить в этом равенстве R_1 и R_2, получим следующее приближенное выражение для $\frac{\partial u}{\partial n}$:

$$(11)\qquad \frac{\partial u}{\partial n}=\frac{1}{\sin(l_1l_2)}\left\{\frac{u_1-u_0}{l_1}\sin(nl_2)+\frac{u_2-u_0}{l_2}\sin(l_1,\ n)\right\}.$$

Отметим некоторые частные случаи.

1. Нормаль n совпадает с одним из избранных нами направлений, например (l_1). Здесь $(l_1n)=0$, $(l_1l_2)=(nl_2)$, и поэтому

$$(12')\qquad \frac{\partial u}{\partial n}=\frac{u_1-u_0}{l_1}.$$

2. Нормаль n является биссектрисой угла между (l_1) и (l_2). Тогда $(l_1u)=(n_1l_2)=\frac{(l_1l_2)}{2}$, и поэтому

$$(12'')\qquad \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{1}{2\cos\frac{(l_1l_2)}{2}}\left\{\frac{u_1-u_0}{l_1}+\frac{u_2-u_0}{l_2}\right\}.$$

3. Если угол (l_1l_2) прямой, то $(nl_2)=\frac{\pi}{2}-(l_1n)$, и поэтому

$$(12''')\qquad \frac{\partial u}{\partial n}=\frac{u_1-u_0}{l_1}\sin(l_1n)+\frac{u_2-u_0}{2}\cos(l_1n).$$

n° 3. Уравнение $\triangle\triangle u=f(x, y)$. Уравнение вида $\triangle\triangle u=f(x, y)$, где $\triangle\triangle$ есть известный бигармонический оператор

$$\triangle\triangle=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

обычно решают, сводя его к следующей системе двух уравнений Пуассона:

$$\triangle u=v$$
$$\triangle v=f(x, y).$$

Такое сведение имеет то неудобство, что предельные условия, которым подчиняется u, не позволяют обычно выписать предельных условий для v, и второе уравнение системы поэтому приходится решать либо при свободных граничных значениях, либо стремятся удовлетворить граничным требованиям, с известной точностью, путем некоторого итерационного процесса.

Можно легко указать уравнение в конечных разностях, заменяющее приближенно заданное диференциальное уравнение, относящееся непосредственно к u.

Возьмем вновь, как в n° 1, сетку прямоугольников, образованную прямыми

$$x=x_i \qquad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad x_{i+1}>x_i$$
$$y=y_k \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad y_{k+1}>y_k$$

и отметим узел (i, k) с координатами x_i, y_k. Для построения приближенного значения производной $\frac{\partial^4u}{\partial x^4}$ по точкам сетки наряду с этой точкой рассмотрим еще четыре точки, лежащие на прямой $y=y_k$ по две с каждой стороны от x_i.

Принимая x_i за a_0 и остальные значения за a_1, ... a_4, можем по последней формуле (9) n° 1 выразить $\frac{\partial^4u}{\partial x^4}$ через $u_{i-2,k}, u_{i-1,k}, \ldots u_{i+2,k}$. Так как мы имеем лишь пять значений аргумента x, то в формуле сохранится только первый член и она будет иметь вид:

$$\frac{\partial^4u(x_i, y_k)}{\partial x^4}=4!f_{y_k}(x_i, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i-2}, x_{i+2}).$$

Индекс y_k у f поставлен в знак того, что при вычислении написанной четвертой разделенной разности мы должны будем переменной y дать значение y_k.

В развернутом виде это равенство может быть легко записано, если воспользоваться формулами (5) n° 1.

Аналогично получается выражение для частной производной четвертого порядка по y от u

$$\frac{\partial^4u(x_i, y_k)}{\partial y^4}=$$
$$=4!f_{x_i}(y_k, y_{k-1}, y_{k+1}, y_{k-2}, y_{k+2}).$$

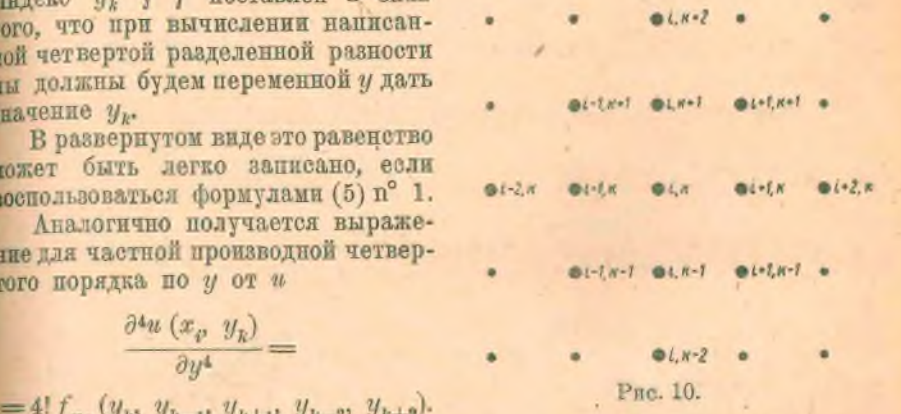


Рис. 10.

Обе предыдущие операции обозначим ради краткости соответственно через $\frac{\delta^4u_{ik}}{\delta x_i^4}$, $\frac{\delta^4u_{ik}}{\delta y_k^4}$. Нам осталось найти еще смешанную производную

$$\frac{\partial^4u(x_i, y_k)}{\partial x^2\partial y^2}.$$

Операции, позволяющие по трем значениям аргументов x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, y_{k-1}, y_k, y_{k+1} вычислять приближенно вторые частные производные по x и y, были нами даны выше в n° 1. Они имеют вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\doteq 2\frac{\frac{\Delta_{x_i}}{\Delta x_i}-\frac{\Delta_{x_{i-1}}}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_i+\Delta x_{i-1}}=\frac{\delta^2}{\delta x_i^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\doteq 2\frac{\frac{\Delta_{y_k}}{\Delta y_k}-\frac{\Delta_{y_{k-1}}}{\Delta y_{k-1}}}{\Delta y_k+\Delta y_{k-1}}=\frac{\delta^2}{\delta y_k^2}.$$

Таким образом для искомой частной производной мы получаем следующее выражение:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \doteq \frac{\delta^2}{\delta x_i^2}\left(\frac{\delta^2 u_{ik}}{\delta y_k^2}\right).$$

Заданное нами дифференциальное уравнение мы можем поэтому заменить следующим уравнением в конечных разностях

$$\frac{\delta^4 u_{ik}}{\delta x_i^4} + 2\,\frac{\delta^2}{\delta x_i^2}\left(\frac{\delta^2 u_{ik}}{\delta y_k^2}\right) + \frac{\delta^4 u_{ik}}{\delta y_k^4} = f(x_i, y_k). \tag{13}$$

Уравнение весьма сильно упрощается, когда мы имеем дело с равными делениями по каждой оси:

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_k = y_0 + kl.$$

Тогда, в виду симметрии $f_k(x_i, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i-2}, x_{i+2})$ относительно своих аргументов и равенства (4) § 1, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ будет равна четвертой разности от u_{ik} по x в точке x_{i-2}, деленной на h^4, ибо

$$4!\, f_{y_k}(x_i, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i-2}, x_{i+2}) = 4!\, f_{y_k}(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) =$$

$$= \frac{u_{i+2,\,k} - 4u_{i-1,\,k} + 6u_{i,\,k} - 4u_{i-1,\,k} + u_{i-2,\,k}}{h^4} = \frac{\Delta_x^4 u_{i-2,\,k}}{h^4}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^4 u(x_i, y_k)}{\partial y^4} = \frac{u_{i,\,k+2} - 4u_{i,\,k+1} + 6u_{i,\,k} - 4u_{i,\,k-1} + u_{i,\,k-2}}{l^4} = \frac{\Delta_y^4 u_{i,\,k-2}}{l^4}$$

$$\frac{\partial^4 u(x_i, y_k)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{u_{i+1,\,k+1} + u_{i-1,\,k+1} + u_{i-1,\,k-1} + u_{i+1,\,k-1}}{h^2 l^2} +$$

$$+ \frac{-2(u_{i+1,\,k} + u_{i,\,k+1} + u_{i-1,\,k} + u_{i,\,k-1}) + 4u_{ik}}{h^2 l^2} = \frac{\square u_{ik} - 2 \diamond u_{ik}}{h^2 l^2}.$$ [1]

После внесения этих выражений в уравнение (1), оно примет вид:

$$\frac{\Delta_x^4 u_{i-2,\,k}}{h^4} + 2\,\frac{\square u_{i,\,k} - 2\,\diamond u_{i,\,k}}{h^2 l^2} + \frac{\Delta_y^4 u_{i,\,k}}{l^2} = f_{i,\,k}. \tag{14}$$

Из приведенных выше формул видно, что в уравнении (13) для узла (i, k) входят значения u_{ik}, во-первых, для всех вершин прямоугольников, сходящихся в этом узле, и кроме того значения в четырех узлах, лежащих на прямых $x = x_i$, $y = y_k$, через один узел от (i, k).

[1] Напоминаем, что под символами $\square u_{ik}$ и $\diamond u_{ik}$ мы подразумеваем следующие выражения:

$$\square u_{ik} = u_{i+1,\,k+1} + u_{i-1,\,k+1} + u_{i-1,\,k-1} + u_{i+1,\,k-1} - u4_{ik}$$

$$\diamond u_{ik} = u_{i+1,\,k} + u_{i,\,k+1} + u_{i-1,\,k} + u_{i,\,k-1} - 4u_{ik}.$$

Возьмем граничные точки сетки и присоединим к ним все внутренние точки сетки, лежащие на прямых, параллельных осям координат и ближайшие к граничным. Совокупность всех взятых точек образует некоторую граничную полоску. Уравнение (13) или (14) должно быть выполнено, очевидно, во всех внутренних точках сетки, не принадлежащих к граничной полосе.

Что касается значений u_{ik}, отвечающих точкам граничной полосы, то они либо задаются по самому условию задачи, либо для них пишутся уравнения, отличные от (13) или (14), из граничных требований.

§ 3. Решение уравнений в конечных разностях

n° 1. Существование и единственность решения. Рассмотрим сначала задачу Дирихле для изучаемого нами уравнения (1) § 2.

Нужно найти функцию, удовлетворяющую этому уравнению и принимающую на контуре заданные значения

$$u|_\Gamma = \varphi(x, y). \tag{1}$$

Известно, что задача имеет единственное решение, если коэфициент q не положителен.

Система уравнений (3) § 2, которой мы заменяем дифференциальное уравнение, должна быть, как мы уже отмечали выше, выполнена во всякой внутренней по отношению к контуру C узловой точке сетки. Существование и единственность ее решения по известной теореме теории определителей будут установлены, если мы покажем, что однородная система, получающаяся из (3) путем отбрасывания членов, свободных от неизвестных u_{ik}, будет иметь лишь нулевое решение. Такими членами будут, во-первых, все f_{ik}, стоящие в правых частях и, во-вторых, те члены левой части, которые отвечают точкам сетки, лежащим на границе C, где значения искомой функции задано. Таким образом, решение однородной системы будет эквивалентно решению однородного уравнения в конечных разностях:

$$l_{ik}(u) = b_{ik}^{(1)} u_{i+1,\,k} + b_{ik}^{(2)} u_{i,\,k+1} + b_{ik}^{(3)} u_{i-1,\,k} + b_{ik}^{(4)} u_{i,\,k-1} - a_{ik} u_{ik} = 0, \tag{2}$$

при условии, что значения искомых величин u_{ik} на границе L равны нулю.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Если функция q, входящая в дифференциальное уравнение, не положительна и на границе C $u_{ik} \geqslant 0$, и если числа Δx_i, Δy_k, равные расстояниям между параллельными прямыми сетки, настолько малы, что для всяких i и k выполнены неравенства:*

$$\begin{cases} |\Delta x_i D_{ik}| < 2A_{ik}, \; |\Delta x_{i-1} D_{ik}| < 2A_{ik}, \; |\Delta y_k E_{ik}| < 2C_{ik}, \\ |\Delta y_{k-1} E_{ik}| < 2C_{ik}, \end{cases} \tag{3}$$

то решение однородного уравнения (2) в конечных разностях не

может достигнуть своего наибольшего значения внутри C. Исключением является тривиальный случай, когда u_{ik} равны постоянной.

В самом деле, пусть имеет место обратное. Так как u_{ik} не одинаковы между собой, можно указать такую внутреннюю точку сетки, для которой u_{ik} равно наибольшему значению $M > 0$, тогда как по крайней мере в одной из соседних точек значение u_{ik} будет меньше, чем M.

При сделанных нами предположениях (3) все коэфициенты $b_{ik}^{(j)}$ положительны, что видно из их выражения (2) § 2. Далее, путем сложения этих равенств можно проверить, что в виду $q_{ik} \leqslant 0$,

$$b_{ik}^{(1)} + b_{ik}^{(2)} + b_{ik}^{(3)} + b_{ik}^{(4)} = a_{ik} + q_{ik} \leqslant a_{ik}. \tag{4}$$

Поэтому во взятой нами точке сумма произведений $b_{ik}^{(j)}$ на значения u в окружающих точках будет меньше, чем $a_{ik}M$, и следовательно $l_{ik}(u) < 0$, что противоречит (2).

Всюду ниже условия этой теоремы мы будем считать выполненными.

Теорема II. *Однородное уравнение (2) при условии, что значения величин u_{ik} на границе C равны нулю, имеет единственное решение $u_{ik} = 0$, если соблюдены неравенства (3).*

По доказанному, в виду того, что знак у u_{ik} мы можем менять здесь по произволу, наибольшее и наименьшее значения u_{ik} отвечают граничным точкам. Но на L всюду $u_{ik} = 0$, следовательно везде должно быть $u_{ik} = 0$.

Этим доказаны существование и единственность решения поставленной проблемы.

Мы изложим сейчас два метода решения системы (3) n° 2, первый из которых был указан К. Рунге [1] и представляет собой метод последовательного исключения неизвестных, широко применяемый в решении систем линейных уравнений. Второй же есть метод последовательных приближений, впервые развитый применительно к задаче приближенного интегрирования уравнений в частных производных, повидимому, Либманом. [2]

n° 2. Метод последовательного исключения. Идея этого метода вполне выясняется на следующем частном случае области, который мы рассмотрим ради простоты. В общем случае рассуждения остаются такими же и усложняется лишь запись. Пусть контур C есть прямоугольник с сторонами, параллельными осям координат; внутри его при помощи прямых $x = x_i$, $i = 0, 1, 2 \ldots 6$, $y = y_k$, $k = 0, 1, \ldots 4$ построена сетка. Возьмем крайние слева внутренние точки сетки, лежащие в нашем случае на прямой $x = x_1$; это будут точки (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3). Соответствующие этим точкам значения u_{ik} оставим неопределенными и попытаемся через них выразить все остальные значения u_{ik}

[1] C. Runge, Ueber eine Methode die partielle Differentialgleichung $\Delta u =$ = Const numerisch zu integrieren, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 56, S. 225, 1908.

[2] H. Liebmann, Die angenäherte Ermittelung harmonischer Funktionen und konformer Abbildung, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, S. 385, 1918.

Ближайшие к ним справа значения могут быть выражены через них весьма просто. Рассмотрим уравнения, которые должны быть соблюдены в этих точках:

$$b_{1,k}^{(1)} u_{2,k} + b_{1,k}^{(2)} u_{1,k+1} + b_{1,k}^{(3)} u_{0,k} + b_{1,k}^{(4)} u_{1,k-1} - a_{1,k} u_{1,k} = f_{1,k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Из них могут быть найдены все $u_{2,k}$ через $u_{1,k}$ и известные значения $u_{0,k}$:

$$u_{2,k} = \frac{1}{b_{1,k}^{(1)}} [f_{1,k} + a_{1,k} u_{1,k} - b_{1,k}^{(2)} u_{1,k+1} - b_{1,k}^{(3)} u_{0,k} - b_{1,k}^{(4)} u_{1,k-1}].$$

Пишем затем уравнения, которые должны быть выполнены для узлов, лежащих на прямой $x = x_2$, из них находим выражения $u_{3,k}$ через $u_{1,k}$ и заданные величины и т. д. Идя таким путем, мы последовательно можем выразить через $u_{1,k}$ все u_{ik} для $i \geqslant 2$. Значения $u_{5,k}$, отвечающие последней прямой $x = x_5$ области, будут нами найдены из уравнений, относящихся к ближайшим узлам слева для прямой $x = x_4$. Нам осталось еще удовлетворить уравнениям для узлов, лежащих на последней прямой $x = x_5$ области. Число их будет, очевидно, равно числу оставшихся неизвестными $u_{1,k}$. Решив их относительно $u_{1,k}$, мы сможем по ним разыскать все остальные значения u_{ik}.

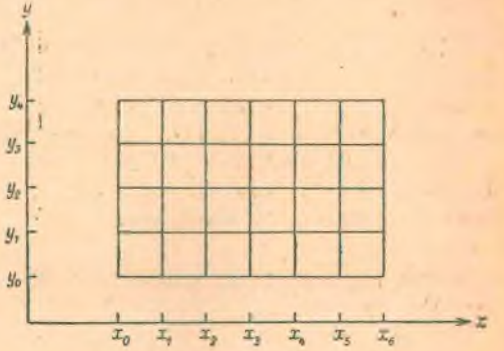


Рис. 11.

Чтобы упростить все необходимые выкладки, можно прибегнуть к следующему приему, позволяющему свести описанный здесь процесс к ряду более простых процессов, каждый из которых проводится численным образом. Искомые величины $u_{5,k}$ линейно выражаются через $u_{1,k}$, будем попрежнему искать свободные члены и коэфициенты при $u_{1,k}$ в этих выражениях. Сначала проведем все вычисления для $u_{1,1} = 0$; $u_{1,2} = 0$; $u_{1,3} = 0$. Результат, к которому мы придем в узлах прямой $x = x_5$, даст член в $u_{5,k}$, не зависящий от $u_{1,k}$. Так же вычисляют и коэфициенты при $u_{1,k}$. Например, если нужно найти коэфициент при $u_{1,1}$, мы полагаем $u_{1,1} = 1$, $u_{1,2} = u_{1,3} = 0$, затем отбрасываем все свободные члены уравнения (3) n° 2 и полагаем все значения u_{ik} на контуре

равными нулю. В нашем примере уравнения для узлов, относящихся к прямой $x = x_i$, после этого примут вид:

$$b^{(1)}_{i,1}\,u_{i+1,1} + b^{(2)}_{i,1}\,u_{i,2} + b^{(3)}_{i,1}\,u_{i-1,1} + 0 - a_{i,1}u_{i,1} = 0,$$

$$b^{(1)}_{i,2}\,u_{i+1,2} + b^{(2)}_{i,2}\,u_{i,3} + b^{(3)}_{i,2}\,u_{i-1,2} + b^{(4)}_{i,2}\,u_{i,1} - a_{i,2}u_{i,2} = 0,$$

$$b^{(1)}_{i,3}\,u_{i+1,3} + 0 + b^{(3)}_{i,3}u_{i-1,3} + b^{(4)}_{i,3}\,u_{i,2} - a_{i,3}u_{i,3} = 0.$$

После этого проводим вычисления уже указанным способом.

Проиллюстрируем эти рассуждения на примере, который мы заимствуем из указанного мемуара К. Рунге.

Пример. Кручение однородного цилиндрического стержня сводится к решению уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \text{const},$$

при условии обращения функции u в нуль на границе сечения стержня.



Рис. 12.

Пусть сечение стержня имеет форму креста, образованного из пяти равных квадратов со сторонами длины l. По соображениям симметрии нам достаточно найти функцию для восьмой части креста, отмеченной на чертеже. В нашем примере наиболее удобной сеткой будет квадратная. Уравнение (3) п° 2 в этом случае принимает форму (6) п° 2, или, если вместо неизвестных u_{ik} ввести новые неизвестные $u_{ik} = -Ch^2 v_{ik}$, то

$$v_{i+1,k} + v_{i,k+1} + v_{i-1,k} + v_{i,k-1} - 4v_{ik} = -1.$$

Разделим например стороны квадратов на восемь частей, полагая $h = \frac{l}{8}$. Соответствующая сетка для восьмой части фигуры изображена на черт. 13. Внутри креста будет расположено всего 273 узла, в рассматриваемой же нами части — 42 узла. Таким образом, нам необходимо будет решить систему 42 уравнений.

Оставляя произвольными значения $v_{11} = \alpha$; $v_{12} = \beta$; $v_{13} = \gamma$; $v_{14} = \delta$ соответственно в точках A, B, C, D на чертеже, обозначим через α', β', γ', δ' значения v в узлах соседнего правого вертикального столбца и запишем уравнения, которые должны быть соблюдены в точках A, B, C, D. В уравнение для точки A должно войти значение v в точке сетки, лежащей непосредственно под точкой A по вертикали. В виду симметрии оно будет совпадать с β, и мы поэтому получим

в точке	A	$\alpha' + \beta + 0 + \beta - 4\alpha = -1$
„	B	$\beta' + \gamma + 0 + \alpha - 4\beta = -1$
„	C	$\gamma' + \delta + 0 + \beta - 4\gamma = -1$
„	D	$\delta' + 0 + 0 + \gamma - 4\delta = -1.$

Найдем отсюда выражения α', β', γ', δ' через α, β, γ, δ. Аналогично для следующего столбца и т. д. до тех пор, пока не будут найдены α''', β''', γ''', δ''' для крайних точек справа; они будут определены из уравнений в точках A'', B'', C'', D''. Нам осталось записать уравнения для величин v в самих крайних точках. Пользуясь условиями симметрии, мы можем эти уравнения записать в следующей форме:

$$(*)\qquad \begin{aligned} 4\alpha'' - 4\alpha''' &= -1 \\ 2\beta'' + 2\alpha'' - 4\beta''' &= -1 \\ 2\gamma'' + 2\beta'' - 4\gamma''' &= -1 \\ 2\delta'' + 2\gamma'' - 4\delta''' &= -1 \end{aligned}$$

из этих равенств и должны быть определены α, β, γ, δ.

Сообразно сказанному выше, мы будем определять не сразу сами уравнения, а порознь свободные члены и коэфициенты при неизвестных в выражениях α'', α''', ...

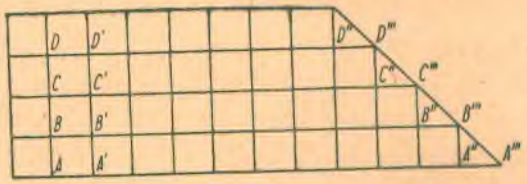


Рис. 13.

Для определения свободного члена полагаем $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ и проводим все необходимые вычисления. В результате получаем следующую таблицу, приводимую нами с точностью до 5 знаков: [1]

0	0	0	0	0	0	0	0	0			
0	0	−1	−4	−13	−44	−165	−680	−3 001	−13 881		
0	0	−1	−3	− 5	1	63	445	2 556	13 852	73 821	
0	0	−1	−3	− 6	−11	− 30	−160	−1 073	− 7 089	−44 864	27 488[1]
0	0	−1	−3	− 6	−10	− 13	+ 17	400	3 728	28 689	20 076[1]
0	0	−1	−3	− 6	−10	− 13	+ 17	400	3 728	28 689	20 076[1]

Для определения коэффициентов при α полагаем $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = 0$ и отбрасываем свободные члены. Получаем после вычислений таблицу

0	0	0	0	0	0	0	0	0			
0	0	0	0	− 1	− 16	− 160	−1 296	− 9 344	−62 736		
0	0	0	1	12	97	672	4 320	26 656	16 048[1]	95 094[1]	
0	0	−1	−8	−49	−280	−1 569	−8 752	−48 832	−27 294[1]	−15 289[1]	−85 814[2]
0	1	4	17	80	401	2 084	11 073	59 712	32 544[1]	17 879[2]	98 840[2] 54 911[3]

Таким же способом, или несколько более простым, который был предложен Рунге в указанной нами статье и останавливаться на пояснении которого мы здесь не будем, могут быть найдены и коэфициенты при остальных неизвестных. Таблицы вычислений приведены ниже.

---

[1] Часть чисел таблицы представляет собой произведение пятизначного числа на некоторую степень десяти: показатель степени десяти мы приписывали к числу сверху, так что $13\,241^2 = 13\,241 \cdot 10^2$.

Коэфициент при β

0	0	0	0	0	0	0	0	0			
0	0	0	1	12	97	672	4 320	26 656	16 048[1]		
0	0	−1	− 8	−50	−296	−1 729	−10 048	−58 176	−33 568[1]	−19 309[2]	
0	1	4	18	92	498	2 756	15 393	86 368	48 592[1]	27 389[2]	15 458[3]
0	0	−2	−16	−98	−560	−3 138	−17 504	− 97 664	−54 589[1]	−30 577[2]	−17 163[3] −96510[4]

Коэфициент при γ

0	0	0	0	0	0	0	0	0			
0	0	−1	−8	−48	−264	−1 409	−7 456	−39 488	−21 021[1]		
0	1	4	17	80	401	2 084	11 073	59 712	32 544[1]	17 879[2]	
0	0	−1	−8	−50	−296	−1 729	−10 048	−58 176	−33 568[1]	−19 309[2]	−11 078[3]
0	0	0	2	24	194	1 344	8 640	53 312	32 096[1]	19 019[2]	11 148[3] 64 848[4]

Коэфициент при δ

0	0	0	0	0	0	0	0	0			
0	1	4	16	68	304	1 412	6 753	33 056	16 496[1]		
0	0	−1	−8	−48	−264	−1 409	−7 456	−39 488	−21 021[1]	−11 268[2]	
0	0	0	1	12	97	672	4 320	26 656	16 048[1]	95 094[1]	55 742[2]
0	0	0	0	− 2	− 32	− 320	−2 592	−18 688	−12 547[1]	−80 416[1]	−49 931[2] −30 317[3]

Пользуясь этими таблицами, мы можем составить все величины α'', α''', ..., входящие в систему например

$$\delta'' = -3\,001 - 9\,344\alpha + 26\,656\beta - 39\,488\gamma + 33\,056\delta.$$

После решения системы, если сохранить два знака после запятой, получим:

$$\alpha = 2{,}63; \quad \beta = 2{,}50; \quad \gamma = 2{,}07; \quad \delta = 1{,}30.$$

Составленная при помощи найденных значений таблица v_{ik} имеет вид:

0	0	0	0	0	0	0	0	0			
0	1,30	2,12	2,70	3,14	3,53	3,95	4,55	5,65	8,29		
0	2,07	3,50	4,53	5,32	6,02	6,73	7,59	8,78	10,42	11,89	
0	2,50	4,28	5,59	6,61	7,49	8,36	9,32	10,45	11,72	12,86	13,63
0	2,63	4,53	5,93	7,03	7,98	8,89	9,88	10,98	12,15	13,19	13,90 14,15

n° 3. Метод последовательных приближений. Перепишем систему уравнений (3) n° 2 в форме

$$(5)\quad u_{ik} = \frac{1}{a_{ik}}\left(b_{ik}^{(1)} u_{i+1,\,k} + b_{ik}^{(2)} u_{i,\,k+1} + b_{ik}^{(3)} u_{i-1,\,k} + b_{ik}^{(4)} u_{i,\,k-1} - f_{ik}\right),$$

и применим к ее решению метод последовательных приближений. Допустим, что нами каким-либо путем установлены исходные приближения $u_{ik}^{(0)}$ для u_{ik}. Изложим первоначально весь ход последующих вычислений, как его предлагал провести Либман. Чтобы иметь в виду что-либо определенное, мы допустим, что область, для которой решается задача, есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, и сетка построена путем деления его сторон прямыми

$$x = x_0,\ x = x_1,\ \ldots\ x = x_m$$
$$y = y_0,\ y = y_1,\ \ldots\ y = y_n.$$

Рассмотрим узлы сетки, ближайшие к граничным. Подставляя в правые части равенств (5) исходные значения $u_{ik}^{(0)}$, вычислим в них первые приближения

$$\left.\begin{matrix} u_{1k}^{(1)} \\ u_{m-1,\,k}^{(1)} \end{matrix}\right\} k = 1,\ 2,\ \ldots\ n-1 \qquad \left.\begin{matrix} u_{i1}^{(1)} \\ u_{i,\,n-1}^{(1)} \end{matrix}\right\} i = 1,\ 2,\ \ldots\ m-1$$

$$(6)\quad u_{ik}^{(1)} = \frac{1}{a_{ik}}\left(b_{ik}^{(1)} u_{i+1,\,k}^{(0)} + b_{ik}^{(2)} u_{i,\,k+1}^{(0)} + b_{ik}^{(3)} u_{i-1,\,k}^{(0)} + b_{ik}^{(4)} u_{i,\,k-1}^{(0)} - f_{ik}\right).$$

После этого перейдем к узлам сетки, следующим по своей близости после рассмотренных, и будем вычислять в них первые приближения

$$\left.\begin{matrix} u_{2k}^{(1)} \\ u_{m-2,\,k}^{(1)} \end{matrix}\right\} k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-2 \qquad \left.\begin{matrix} u_{i,\,2} \\ u_{i,\,n-2} \end{matrix}\right\} i = 2,\ 3,\ \ldots,\ m-2.$$

При этом при вычислениях в тех точках, где не были вычислены раньше первые приближения, мы берем исходные значения, в тех же точках, где эти первые приближения вычислены, начальные значения мы заменяем ими; так, например, в узле (x_2, y_2) получаем:

$$u_{22}^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_{2,\,2}^{(1)} u_{3,\,2}^{(0)} + b_{22}^{(2)} u_{2,\,3}^{(0)} + b_{2,\,2}^{(3)} u_{1,2}^{(1)} + b_{2,\,2}^{(4)} u_{2,\,1}^{(1)} - f_{22}\right).$$

Вычисления будем продолжать таким же способом до тех пор, пока не будут исчерпаны все точки сетки. По полученным первым приближениям находим вторые и т. д., пока не будет достигнута требуемая точность.

Выясним сходимость процесса к точному решению системы (3). Пусть максимальная абсолютная погрешность исходных значений будет не больше ε. Обозначим через δ наименьшее из значений коэфициентов $\frac{b_{ik}^{(j)}}{a_{ik}}$ в точках сетки [1] и оценим погрешность первого приближения. Если вычесть (5) из (6), получим для этой погрешности выражение

$$(7)\quad u_{ik}^{(1)} - u_{ik} = \frac{1}{a_{ik}}\left[b_{ik}^{(1)}\left(u_{i+1,\,k}^{(0)} - u_{ik}\right) + b_{ik}^{(2)}\left(u_{i,\,k+1}^{(0)} - u_{ik}\right) + b_{ik}^{(3)}\left(u_{i-1,\,k} - u_{ik}\right) + b_{ik}^{(4)}\left(u_{i,\,k-1}^{(0)} - u_{ik}\right)\right].$$

Начнем с ряда узлов, ближайших к границе C. В вычисления для них в правую часть (5) будет входить по крайней мере одна граничная точка, и поэтому в предыдущем выражении по крайней мере одна из

[1] В виду неравенств (3) и (4), $\delta > 0$.

разностей обратится в нуль, и поэтому получаем следующую оценку для погрешности:

$$|u_{ik}^{(1)} - u_{ik}| \leqslant \varepsilon \left\{ \sum_{j=1}^{4} \frac{b_{ik}^{(j)}}{a_{ik}} - \frac{b_{ik}^{(s)}}{a_{ik}} \right\} \leqslant (1 - \delta)\, \varepsilon .$$

Для следующего ряда узлов в формуле (7) одна из разностей $u^{(0)} - u$ будет относиться к первому ряду и будет иметь только что полученную оценку. Поэтому для погрешности первого приближения во втором ряду точек имеем:

$$|u_{ik}^{(1)} - u_{ik}| \leqslant \varepsilon \left\{ \sum_{j=1}^{4} \frac{b_{ik}^{(j)}}{a_{jk}} - \delta\, \frac{b_{ik}^{(s)}}{a_{ik}} \right\} \leqslant (1 - \delta^2)\, \varepsilon .$$

Для последнего ряда точек, если он имел нумер p, получим:

$$|u_{ik}^{(1)} - u_{ik}| \leqslant (1 - \delta^p)\, \varepsilon .$$

Полученные оценки доказывают сходимость последовательных приближений при любой исходной погрешности.

Укажем еще на небольшое видоизменение процесса вычислений, позволяющее часто значительно сократить вычислительную работу.

Мы поясним его на примере нахождения первого приближения в первом ряду точек. В описанной выше схеме мы находим $u_{ik}^{(1)}$ по формуле (6), используя исключительно исходные значения для всех точек этого ряда. Допустим, что мы начали вычисления с точки (x_1, y_1) и вычислили значение $u_{11}^{(1)}$ через $u_{ik}^{(0)}$; оно, вообще говоря, будет более близким к действительному значению u_{11}, чем $u_{11}^{(0)}$. При нахождении первого приближения в следующей точке (x_2, y_1) мы использовали только исходные значения, в частности $u_{11}^{(0)}$. Но мы получим, повидимому, более точный результат в первом приближении, если при нахождении $u_{21}^{(1)}$ употребим не $u_{11}^{(0)}$, а $u_{11}^{(1)}$. Совершенно так же, вместо того, чтобы находить $u_{31}^{(0)}$ только через $u_{ik}^{(0)}$, естественно воспользоваться уже найденным значением $u_{21}^{(1)}$ и т. д. Иначе говоря, при вычислении s-го приближения в некотором ряду вместо того, чтобы использовать результаты вычисления этого приближения только в предшествующем ряду, употреблять их всюду там, где они были найдены до проводимого шага вычислений.

п° 4. Решение уравнений (8), (9), (10) п° 2. Все изложенное выше для основного уравнения (3) п° 2 может быть перенесено и на уравнения в конечных разностях (8), (9), (10), которые мы рассматривали в конце п° 2. Остановимся вкратце, например, на уравнении (8), считая в нем $\mu \geqslant 0$. Будем иметь в виду для него опять задачу о разыскании u_{ik} во внутренних узлах сетки по известным значениям на границе

C. В развернутой форме (8) имеет вид:

$$\lambda_{ik}(u) =$$

$$(8) \quad = \frac{1}{6h^2} \left\{ u_{i+1,\,k+1} + u_{i-1,\,k+1} + u_{i-1,\,k-1} + u_{i+1,\,k-1} + 4\,(u_{i+1,\,k} + \right.$$

$$\left. + u_{i,\,k+1} + u_{i-1,\,k} + u_{i,\,k-1}) - \left(20 + 6h^2\mu + \frac{h^4}{2}\,\mu^2\right) u_{ik} \right\} =$$

$$= f_{ik} + \frac{h^2}{12}\,[(\Delta f)_{ik} + \mu f_{ik}] = F_{ik} .$$

Так же как и для уравнения (3), в этом случае коэфициент при u_{ik}, взятый с обратным знаком, не меньше, чем сумма коэфициентов при остальных значениях u, входящих в уравнение (6). Отсюда вытекает следующий простой результат. Рассмотрим однородное уравнение $\lambda_{ik}(u) = 0$ при тех или иных граничных значениях и допустим, что наибольшее (наименьшее) значение u_{ik} положительно (отрицательно). Можно видеть, что оно достигается на границе C, а не во внутренних точках.[1] Исключением может быть лишь случай $u_{ik} = \text{const}$.

В самом деле, в противном случае можно было бы указать такой внутренний узел сетки, в котором u_{ik} было бы равно наибольшему положительному (наименьшему отрицательному) значению, тогда как по крайней мере для одной из восьми окружающих точек u имело бы меньшее (большее) значение. Но в таком случае, как сразу же видно из строения оператора $\lambda_{ik}(u)$, должно быть $\lambda_{ik}(u) < 0$ $(\lambda_{ik}(u) > 0)$, что противоречит (8).

Отсюда видно, что однородное уравнение $\lambda_{ik}(u) = 0$ при условии обращения в нуль u_{ik} на границе области может иметь единственное решение $u_{ik} = 0$, ибо в противном случае u_{ik} имело бы внутри C либо положительный максимум, либо отрицательный минимум. Неоднородное уравнение поэтому должно иметь единственное решение при всякой правой части F_{ik} и любых граничных значениях.

То же можно сказать о существовании и единственности решения уравнений (9) и (10).

Система значений u_{ik}, решающая поставленную проблему, может быть вычислена по одному из изложенных выше методов.

§ 4. Оценка погрешности, сходимость процесса

Погрешность, происходящая при применении метода сеток к решению дифференциального уравнения, обусловливается двумя обстоятельствами: во-первых, тем, что при сносе граничных условий, которые должны быть выполнены на контуре Г заданной области G на кривую C, мы допускаем известную погрешность. Так, в задаче Дирихле значения u в граничных точках сетки, вообще говоря, не будут совпадать с значениями решения дифференциального уравнения в этих точ-

[1] В п° 1 мы доказывали эту теорему в предположении, что на границе C $u_{ik} \geqslant 0$. Последнее нам нужно было лишь для того, чтобы утверждать положительность наибольшего значения.

ках, если последние не лежат на Г. Во-вторых, погрешность обусловливается заменой дифференциального уравнения уравнением в конечных разностях. Мы поставим сейчас перед собой задачу оценить максимальное отклонение u_{ik} от значений искомой функции u в соответствующих точках и показать, что при $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_k \to 0$ это отклонение будет стремиться к нулю.

В основании наших исследований будет лежать следующая теорема:

Теорема III. *Даны два уравнения* $l_{ik}(u) = t_{ik}$, $l_{ik}(U) = T_{ik}$ *с одинаковыми левыми и различными правыми частями. При этом известно, что* $T_{ik} \leqslant t_{ik}$ *и в граничных точках* $U_{ik} \geqslant u_{ik}$. *Тогда утверждается, что всюду внутри* C $U_{ik} \geqslant u_{ik}$.

Действительно, рассмотрим разность $U_{ik} - u_{ik}$. Она является решением уравнения

$$l_{ik}(U-u) = T_{ik} - t_{ik} \leqslant 0$$

и не отрицательна на границе C.

Если бы оказалось, что в некоторых точках сетки она отрицательна, то по крайней мере в одной из внутренних точек сетки она достигала бы своего наименьшего отрицательного значения m. Возьмем такую точку сетки, в которой $U_{ik} - u_{ik} = m$, но по крайней мере в одной из соседних точек эта разность будет больше m. Применение рассуждений, которыми мы пользовались в своих предшествующих теоремах, показало бы, что вопреки уравнению в этой точке должно выполняться неравенство

$$l_{ik}(U-u) > 0.$$

Полезным для наших целей следствием предыдущего результата является одно предложение, которое мы сформулируем в форме следующей теоремы:

Теорема IV. *Если в точках сетки заданы две системы величин* U_{ik} *и* u_{ik}, *при этом всюду внутри* C *соблюдено неравенство*

$$l_{ik}(U) \leqslant -|\, l_{ik}(u)\,|$$

и на самом контуре C $U_{ik} \geqslant u_{ik}$, *то везде должно быть*

$$U_{ik} \geqslant u_{ik}.$$

В самом деле, заданное неравенство эквивалентно следующим двум:

$$l_{ik}(U) \leqslant l_{ik}(u), \quad l_{ik}(U) \leqslant -l_{ik}(u),$$

или, что то же,

$$l_{ik}(U-u) \leqslant 0, \quad l_{ik}(U+u) \leqslant 0.$$

На основании теоремы III мы можем заключить из предыдущих неравенств, что всюду внутри C должно быть

$$U_{ik} - u_{ik} \geqslant 0 \qquad U_{ik} + u_{ik} \geqslant 0$$

или

$$U_{ik} \geqslant |\, u_{ik}\,|.$$

Оценим погрешность, которую мы совершаем при замене дифференциального уравнения уравнением в конечных разностях.

Применяя формулу Тейлора к разности $\Delta_x u_{ik} = u_{i+1,\,k} - u_{ik} = u(x_i + \Delta x_i, y_k) - u(x_i, y_k)$, мы видим, что первая разделенная разность $\frac{\Delta_x u_{ik}}{\Delta x_i}$ имеет, если остановиться на члене четвертого порядка, следующее выражение:

$$(1)\quad \frac{\Delta_x u_{ik}}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x_i}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x_i^2}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x_i^3}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,\,i+1;\,k},$$

где через $\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,\,i+1;\,k}$ обозначено среднее значение четвертой производной для промежутка (x_i, x_{i+1}). Аналогично для $\frac{\Delta_x u_{i-1,\,k}}{\Delta x_{i-1}}$ имеем:

$$(2)\quad \frac{\Delta_x u_{ik}}{\Delta x_{i-1}} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x_{i-1}}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x_{i-1}^2}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\Delta x_{i-1}^3}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i-1,\,i;\,k}.$$

Отсюда

$$2\,\frac{\dfrac{\Delta_x u_{ik}}{\Delta x_i} - \dfrac{\Delta_x u_{i-1,\,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R_{xx}.$$

Ошибка

$$(3)\quad R_{xx} = \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{12(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}\left[\Delta x_i^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,\,i+1;\,k} + \Delta x_{i-1}^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i-1,\,i;\,k}\right],$$

которую мы совершаем при замене второй частной производной от u по x удвоенной второй разделенной разностью, стоящей в левой части предыдущего равенства, будет при неравных промежутках по оси x зависеть от третьей производной; этот член, однако, пропадает, если мы имеем равные промежутки и R_{xx} примет вид:

$$R_{xx} = \frac{h^2}{24}\cdot\left[\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,\,i+1;\,k} + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i-1,\,i;\,k}\right].$$

Совершенно то же самое будет иметь место при замене второй частной производной $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ удвоенной второй разделенной разностью

$$2\,\frac{\dfrac{\Delta_y u_{ik}}{\Delta y_k} - \dfrac{\Delta_y u_{i,\,k-1}}{\Delta y_{k-1}}}{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}};$$

ошибка R_{yy} здесь будет

$$R_{yy}=\frac{\Delta y_k-\Delta y_{k-1}}{3}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{1}{12\,(\Delta y_k+\Delta y_{k-1})}\left[\Delta y_k^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{i;\,k,\,k+1}+\right.$$

$$\left.+\,\Delta y_{k-1}^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{i;\,k-1,\,k}\right]$$

или для равных подразделений по оси y: $\Delta y_k=l$

$$R_{yy}=\frac{l^2}{24}\left[\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{i;\,k,\,k+1}+\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{i;\,k-1,\,k}\right].$$

Если максимальную из величин $|\Delta x_i-\Delta x_{i-1}|$, $|\Delta y_k-\Delta y_{k-1}|$ обозначить через ε и максимум величин

$$\frac{\Delta x_i^3}{\Delta x_i+\Delta x_{i-1}},\quad \frac{\Delta x_{i-1}^2}{\Delta x_i+\Delta x_{i-1}},\quad \frac{\Delta y_k^3}{\Delta y_k+\Delta y_{k-1}},\quad \frac{\Delta y_{k-1}^3}{\Delta y_k+\Delta y_{k-1}}$$

через η_1, то для R_{xx} и R_{yy} получим следующую оценку:

$$|R_{xx}|,\ |R_{yy}|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\,M_3+\frac{\eta_1}{6}\,M_4,$$

где M_3 и M_4 — наибольшие абсолютные значения третьей и четвертой производных по x и y.

Для случая разного подразделения по каждой из осей получим:

$$R_{xx}|\leqslant\frac{h^2}{12}\,M_4,\quad |R_{yy}|\leqslant\frac{l^2}{12}\,M.$$

Перейдем к оценке погрешности, получающейся при замене первой производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ средним значением разделенных разностей, которое мы привели в § 2.

Пользуясь равенствами (1) и (2), если в них ограничиться членами до третьего порядка, найдем:

$$\frac{\Delta x_{i-1}\,\frac{\Delta_x u_{ik}}{\Delta x_i}+\Delta x_i\,\frac{\Delta_x u_{i-1,\,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_i+\Delta x_{i-1}}=\frac{\partial u}{\partial x}+R_x.$$

Ошибка R_x при замене $\frac{\partial u}{\partial x}$ левой частью имеет тот же порядок, что и в предыдущем случае:

$$(4)\quad R_x=\frac{\Delta x_i\Delta x_{i-1}}{6\,(\Delta x_i+\Delta x_{i-1})}\left[\Delta x_i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,\,i+1;\,k}+\Delta x_{i-1}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i-1,\,i;\,k}\right].$$

Оценка R_x будет иметь форму:

$$|R_x|\leqslant\frac{\eta_1}{3}\,M_3,$$

или для равных промежутков:

$$|R_x|\leqslant\frac{h^2}{6}\,M_3.$$

Аналогично для производной по другой координатной оси:

$|R_y|\leqslant\frac{\eta_1}{3}\,M_3$; для равных промежутков $\Delta y_k=l$ $|R_y|\leqslant\frac{l^2}{6}\,M_3$.

Ошибка R_{ik}, которую мы получим при замене уравнения $L(u)=f$ уравнением $l_{ik}(u)=f_{ik}$, будет:

$$(5)\quad R_{ik}=l_{ik}(u)-L(u)=R_{xx}A_{ik}+R_{yy}C_{ik}+R_xD_{ik}+R_yE_{ik}.$$

Отсюда для R_{ik} получаем:

$$(6)\quad |R_{ik}|\leqslant\left(\frac{\varepsilon}{3}\,M_3+\frac{\eta_1}{6}\,M_4\right)(A_{ik}+C_{ik})+\frac{\eta_1}{3}\,M_3\,(|D_{ik}|+|E_{ik}|).$$

Для равных промежутков по каждой из осей имеем:

$$|R_{ik}|\leqslant\frac{M_4}{12}\,(h^2A_{ik}+l^2C_{ik})+\frac{M_3}{6}\,(h^2|D_{ik}|+l^2|E_{ik}|).$$

Перейдем к исследованию погрешности на контуре C и проведем все рассуждения для задачи Дирихле.

Обозначим через φ_{ik} значения u_{ik} на контуре C, которые мы получили после сноса их с Г на C: они, вообще говоря, не будут совпадать, как мы говорили выше, с действительными значениями $u(x_i, y_i)$, которые принимает искомая функция u в соответствующих точках.

Разницу между ними обозначим через $\bar r_{ik}=\varphi_{ik}-u(x_i, y_k)$. Можно легко дать оценку этой погрешности. Если условиться переносить на контур значения $u(x, y)$ из ближайших точек контура Г, то $|\bar r_{ik}|\leqslant$ $\leqslant\sqrt{2}\,M_1\frac{\delta}{2}$, где δ — наибольшее из чисел Δx_i, Δy_k, и M_1 — максимальное значение частных производных от u по x и y.

Из всех предыдущих рассуждений видно, что погрешность $r_{ik}=$ $=u_{ik}-u(x_i, y_k)$, которую мы совершаем при замене искомой функции решением уравнения в конечных разностях внутри C, удовлетворяет уравнению:

$$(7)\quad l_{ik}(r)=-R_{ik},$$

что следует из равенства (5), и на границе C принимает значения:

$$(8)\quad r_{ik}=\bar r_{ik}.$$

Разделим влияние контурных погрешностей $\bar r_{ik}$ и ошибок R_{ik} в удовлетворении дифференциального уравнения на величину общей погреш-

ности r_{ik}. Будем искать решение уравнения (7) в виде суммы $r_{ik} = v_{ik} + w_{ik}$ двух систем величин, одна из которых удовлетворяет однородному уравнению

$$l_{ik}(v) = 0$$

и принимает на контуре области заданные значения $v_{ik} = \bar{r}_{ik}$, вторая же принимает на контуре нулевые значения и внутри C удовлетворяет уравнению:

$$l_{ik}(w) = -R_{ik}.$$

Оценить первую из систем величин не представляет никакого труда. В самом деле, пользуясь первой теоремой § 3, мы можем утверждать, что наибольшего значения своего v_{ik} достигает на контуре C, и поэтому всюду должно быть:

$$|v_{ik}| \leqslant \max |\bar{r}_{ik}| \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2}} M_1. \tag{9}$$

Отсюда видно, что v_{ik} будет, вообще говоря, малой величиной первого порядка вместе с Δx_i и Δy_k.

Несколько более сложно оценивается w_{ik}. Согласно теореме IV настоящего параграфа для ее оценки достаточно найти такую функцию, которая принимала бы на границе неотрицательные значения, внутри же контура оператор l_{ik}, примененный к ней, имел бы значение, не меньшее, чем $-|R_{ik}|$. Такая функция может быть построена многими способами. Мы воспользуемся здесь идеей, развитой С. А. Гершгориным.[1]

Будем искать необходимую нам функцию в форме произведения постоянной α на функцию W, удовлетворяющую уравнению:

$$L(W) = -1.$$

Можно видеть, что W не может принимать отрицательных значений, так как в противном случае W имела бы внутри C отрицательный минимум, в котором должны быть выполнены соотношения

$$W < 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \geqslant 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \geqslant 0,$$

и поэтому должно было бы быть $L(W) \geqslant 0$, что противоречит уравнению для W.

Подставляя αW в равенство (5) вместо u, получим:

$$l_{ik}(\alpha W) = [-1 + R_{ik}(W)]\,\alpha.$$

При этом $R_{ik}(W)$ имеет оценку вида (6), с той разницей, что в ней вместо максимальных значений M_3 и M_4 третьих и четвертых частных производных от u должны быть подставлены N_3 и N_4, являющиеся максимальными значениями соответствующих производных от W.

[1] S. Gerschgorin, Fehlerabschätzung für Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen, Zeitschrift für angew. Math. und Mechanik, Bd. 10, 1930.

В виду этого, для того, чтобы правая часть предыдущего равенства была меньше, чем $-|R_{ik}|$, достаточно число α подобрать так, чтобы

$$\left\{-1 + \left[\left(\frac{\varepsilon}{3} N_3 + \frac{\eta}{6} N_4\right)(A_{ik} + C_{ik}) + \frac{\eta}{3} N_3 (|D_{ik}| + |E_{ik}|)\right]\right\} \alpha \leqslant$$

$$\leqslant -\left[\left(\frac{\varepsilon}{3} M_3 + \frac{\eta}{6} M_4\right)(A_{ik} + C_{ik}) + \frac{\eta}{3} M_3 (|D_{ik}| + |E_{ik}|)\right].$$

Выбором Δx_i, Δy_k мы всегда можем достигнуть того, чтобы фигурная скобка, стоящая множителем при α в левой части неравенства, была отрицательна. После этого достаточно положить:

$$\alpha \geqslant \frac{\left[\left(\frac{\varepsilon}{3} M_3 + \frac{\eta}{6} M_4\right)(A + C) + \frac{\eta}{3} M_3 (|D| + |E|)\right]_{\max}}{1 - \left[\left(\frac{\varepsilon}{3} N_3 + \frac{\eta}{6} N_4\right)(A + C) + \frac{\eta}{3} N_3 (|D| + |E|)\right]_{\max}}.$$

w_{ik} будет иметь оценку

$$|w_{ik}| \leqslant \alpha N, \quad N = \max W.$$

Для r_{ik} мы следовательно получим:

$$|r_{ik}| \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2}} M_1 + \alpha N. \tag{10}$$

Когда промежутки по каждой из осей координат одинаковы, оценка примет вид:

$$|r_{ik}| \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2}} M_1 + N \frac{[M_4 (h^2 A + l^2 C) + 2 M_3 (h^2 |D| + l^2 |E|)]_{\max}}{12 - [N_1 (h^2 A + l^2 C) + 2 N_3 (h^2 |D| + l_2 |E|)]_{\max}}. \tag{11}$$

Отсюда видно, что при $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_k \to 0$ будет стремиться к нулю и правая часть, и поэтому $r_{ik} \to 0$.

Более простую мажоранту для w_{ik} можно пытаться строить, используя для этой цели полиномы, коэфициенты которых подбирают так, чтобы этот полином для точек внутри C имел бы положительные значения и оператор $l_{ik}(u)$, примененный к нему, имел бы значение не большее, нежели $-|R_{ik}|$. Мы остановимся только на простейшем случае полинома второй степени. Опишем около области, ограниченной кривой C, эллипс, с осями, параллельными осям координат; полуоси его назовем s, t и координаты центра x_c, y_c. Допустим, что коэфициенты заданного дифференциального уравнения удовлетворяют неравенству:

$$\frac{A}{s^2} + \frac{C}{t^2} - \frac{|D|}{s} - \frac{|E|}{t} + \frac{q}{2} > 0.$$

Будем искать мажоранту в форме:

$$W = \alpha \left(1 - \frac{(x - x_c)^2}{s^2} - \frac{(y - y_c)^2}{t^2}\right).$$

Подставим W в оператор l_{ik}. В виду того, что R_{ik} зависит только от производных порядка высшего, чем второй, из равенства (5) следует, что

$$l_{ik}(W) = L(W) =$$

$$= 2\alpha \left\{ -\frac{A_{ik}}{s^2} - \frac{C_{ik}}{t^2} - \frac{D_{ik}}{s^2}(x-x_c) - \frac{E_{ik}}{t^2}(y-y_c) + \right.$$

$$\left. + \frac{q}{2}\left(1 - \frac{(x-x_c)^2}{s^2} - \frac{(y-y_c)^2}{t^2}\right)\right\}.$$

Так как $|x-x_c| < s$, $|y-y_c| < t$ и скобка, стоящая множителем при q, не больше единицы, для $l_{ik}(W)$ имеет место неравенство:

$$l_{ik}(W) \leqslant -2\alpha\left(\frac{A_{ik}}{s^2} + \frac{C_{ik}}{t^2} - \frac{|D_{ik}|}{s} - \frac{|E_{ik}|}{t} + \frac{q}{2}\right),$$

и чтобы было $l_{ik}(W) \leqslant -|R_{ik}|$, достаточно положить

$$\alpha = \frac{\left[\left(\frac{\varepsilon}{3}M_3 + \frac{\eta}{6}M_4\right)(A+C) + \frac{\eta}{3}M_4(|D|+|E|)\right]_{\max}}{2\left(\frac{A}{s^2} + \frac{C}{t^2} - \frac{|D|}{s} - \frac{|E|}{t} + \frac{q}{2}\right)_{\min}} \tag{12}$$

Поэтому для r_{ik} получим оценку:

$$|r_{ik}| \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2}}M_1 + \alpha\left(1 - \frac{(x-x_c)^2}{s^2} - \frac{(y-y_c)^2}{t^2}\right). \tag{13}$$

Для равных промежутков по координатным осям:

$$|r_{ik}| \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2}}M + \frac{[M_4(h^2A + l^2C) + 2M_3(h^2|D| + l^2|E|)]_{\max}}{24\left(\frac{A}{s^2} + \frac{C}{l^2} - \frac{|D|}{s} - \frac{|E|}{t} + \frac{q}{2}\right)_{\min}} \times \tag{14}$$

$$\times\left(1 - \frac{(x-x_c)^2}{s^2} - \frac{(y-y_c)^2}{l^2}\right).$$

Например, для случая уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

так как $D = E = q = 0$, $A = C = 1$, получим следующую оценку:

$$|r_{ik}| \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2}}M_1 + \frac{(\eta M_4 + 2\varepsilon M_3)s^2l^2}{6(s^2+l^2)}$$

или для $\Delta x_i = h$, $\Delta y_k = l$

$$|r_{ik}| \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2}}M_1 + \frac{M_4(h^2+l^2)s^2l^2}{24(s^2+l^2)}.$$

Подобным же образом могут быть оценены ошибки, которые мы совершаем, заменяя дифференциальное уравнение

$$\Lambda(u) = \Delta u - \mu u = f(x, y)$$

уравнениями (8), (9), (10) § 2 в конечных разностях. Первое из этих уравнений было получено из (13) § 1 путем отбрасывания в этом равенстве членов, содержащих h в четвертой и высших степенях. Поэтому погрешность, которую мы получаем при замене заданного нам дифференциального уравнения уравнением (8), будет порядка h^4. Порядок малости этой погрешности будет вдвое превосходить порядок погрешности уравнения в случае, который мы только что разобрали, как это видно из неравенства (6) или следующего за ним.

Уравнение (9) получено из равенства (15) § 1 путем предварительного деления его на $\frac{3h^2}{2!}$ и последующего отбрасывания всех членов с h^4 и высшими степенями h. Поэтому погрешность уравнения в конечных разностях (9) будет также порядка h^4.

Наконец, уравнение (10) получено из (17) путем деления на $\frac{3}{2}\frac{h^2}{2!}$ и отбрасывания членов, содержащих h в первой и высших степенях; погрешность его будет порядка h. Оно будет обладать наименьшей точностью сравнительно со всеми другими приведенными нами уравнениями.

Величина всех этих погрешностей замены уравнения $\Delta(u) = f$ на (8), (9), (10) § 2 грубо может быть оценена следующим способом. При малых значениях h величина погрешностей будет определяться, вообще говоря, первыми из отбрасываемых членов, и поэтому мы можем приближенно считать погрешности уравнений соответственно равными:

$$R = \frac{h^4}{360}(u_{x^6} + 5u_{x^4y^2} + u_{x^2y^4} + u_{y^6})$$

$$R = \frac{h^4}{1080}\left(\frac{33}{16}u_{x^6} + \frac{45}{16}u_{x^4y^2} + \frac{135}{16}u_{x^2y^4} + \frac{27}{16}u_{y^6}\right)$$

$$R = \frac{h}{6}(u_{x^3} - 3u_{xy^2}).$$

Пользуясь изложенными соображениями, можно, как и выше, оценить погрешность $u_{ik} - u(x_i, y_k) = r_{ik}$, которая получается при вычислении значений функции u в узлах сетки при помощи приближенных уравнений (8), (9), (10). Не входя в подробности оценок, так как они проводятся путем, совершенно аналогичным тому, которым мы проводили эту оценку для общего уравнения эллиптического типа $L(u) = f$, отметим лишь тот факт, что она здесь будет иметь форму:

$$|r_{ik}| \leqslant M_6'h^4$$
$$|r_{ik}| \leqslant M_6''h^4$$
$$|r_{ik}| \leqslant M_3h,$$

где числа M_6', M_6'', M_3 будут зависеть от области G и от производных шестого и третьего порядков от искомой функции.

ГЛАВА IV

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

§ 1. Уравнения эллиптического типа и соответствующие им вариационные задачи

п° 1. Основная задача. Мы изучим сначала основную задачу, связанную с уравнениями эллиптического типа.

В плоскости xoy дана некоторая область B, ограниченная контуром L. Будем искать функцию $u(x, y)$, принимающую на контуре L области заданные значения

$$u|_L = s(\varphi), \tag{1}$$

где s — длина дуги контура, и внутри области удовлетворяющую уравнению

$$(au_x)_x + (bu_x)_y + (bu_y)_x + (cu_y)_y - f(x, y, u) = 0, \tag{2}$$

в котором a, b, c мы будет предполагать непрерывными в области B функциями от x и y вместе с их производными первого порядка; функцию же $f(x, y, u)$ — непрерывной по x, y в области B и по u для всех конечных значений. Допустим, далее, что уравнение (2) будет эллиптическим в области B, т. е. коэфициенты его удовлетворяющими там неравенству

$$ac - b^2 > 0$$

a и c должны, очевидно, иметь одинаковые знаки; их можно всегда предположить положительными, так как в противном случае достаточно у всего уравнения изменить знак на обратный.

Чтобы установить экстремальное свойство, характеризующее искомую функцию, наряду с только что формулированной задачей, рассмотрим следующую вариационную проблему.

Определим класс допустимых к конкуренции функций $u(x, y)$ следующими требованиями:

1) $u(x, y)$ непрерывна в области B вместе со своими частными производными первого порядка;

2) принимает на контуре L заданные значения, определяемые равенством (1).

Обозначим через $F(x, y, u)$ частный интеграл от $f(x, y, u)$, взятый по u

$$F(x, y, u) = \int f(x, y, u)\, du. \tag{3}$$

Среди всех допустимых функций будем искать ту, которая дает минимальное значение интегралу

$$I(u) = \iint_B [au_x^2 + 2bu_xu_y + cu_y^2 + 2F(x, y, u)]\, dxdy. \tag{4}$$

Будет ли иметь поставленная задача решение — еще подлежит исследованию. Здесь мы оставляем в стороне этот вопрос, предполагая решение существующим. Пусть оно дается функцией u. Ее мы будем предполагать имеющей непрерывные вторые производные. Наряду с ней рассмотрим функцию $\bar{u} = u + \varepsilon\eta(x, y)$, причем $\eta(x, y)$ непрерывна вместе с первыми производными и кроме того обращается в нуль на границе L области интегрирования. В остальном будем считать ее произвольной. При всяких ε функция $\bar{u}$ будет допустимой.

Подставим под знак интеграла $I(u)$ вместо u функцию $\bar{u}$. После выполнения всех квадратур получим некоторую функцию от ε. Так как при $\varepsilon = 0$ $\bar{u}$ вырождается в u, эта функция должна иметь минимум при $\varepsilon = 0$.

Поэтому должно быть

$$\left\{ \frac{dI(u + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} \right\}_{\varepsilon=0} = 0$$

каким бы способом мы ни выбирали $\eta(x, y)$. На основании равенства (4) написанная производная вычисляется легко и будет равна:

$$2\iint_B [au_x\eta_x + b(u_x\eta_y + u_y\eta_x) + cu_y\eta_y + f(x, y, u)\eta]\, dxdy.$$

Интеграл от первых четырех членов может быть переписан в следующей форме:

$$\iint_B [(au_x\eta + bu_y\eta)_x +$$

$$+ (bu_x\eta + cu_y\eta)_y]\, dxdy - \iint_B \eta[(au_x + bu_y)_x + (bu_x + cu_y)_y]\, dxdy.$$

Преобразуя первый интеграл по формуле Грина-Римана в линейный и внося результат в предыдущее выражение, получим:

$$\left\{ \frac{dI(u + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} \right\}_{\varepsilon=0} = \tag{5}$$

$$= 2\iint_B [f - (au_x + bu_y)_x - (bu_x + cu_y)_y]\eta dxdy +$$

$$+ 2\int_L \left[(au_x + bu_y)\frac{dy}{ds} - (bu_x + cu_y)\frac{dx}{ds} \right] \eta ds.$$

Линейный интеграл пропадает, так как функция η на контуре L равна нулю. Поэтому должен равняться нулю при всяком выборе η, удовлетворяющей поставленным требованиям, двойной интеграл. В виду произвола η последнее может быть только в том случае, когда выражение, стоящее в скобках, будет тожественно равно нулю. Ибо, в самом деле, пусть скобка отлична от нуля хоть в одной точке, тогда она будет отлична от нуля и следовательно сохранять знак в малой области около этой точки. Мы можем выбрать функцию η так, чтобы она была равной нулю всюду вне этого малого участка и положительной на самом участке. Тогда интеграл не может равняться нулю, так как интегрируемая функция не меняет знака в области B. Следовательно функция, решающая поставленную вариационную задачу, должна удовлетворять уравнению:

$$(au_x + bu_y)_x + (bu_x + cu_y)_y - f(x, y, u) = 0,$$

которое совпадает с (2).

Для нас важно отметить сейчас следующие частные случаи. Одной из физических задач, приводящей к решению рассматриваемого нами общего уравнения, будет задача об определении положения равновесия закрепленной с границ неоднородной и неизотропной мембраны под действием произвольных внешних сил. Соответствующий этому уравнению интеграл (5) связан с потенциальной энергией деформации мембраны.

1) Если мембрана изотропна, то $a = c = p(x, y)$, $b = 0$. Уравнение будет

$$(pu_x)_x + (pu_y)_y - f(x, y, u) = 0, \tag{6}$$

и соответствующий интеграл имеет вид

$$I(u) = \iint_B [p(u_x^2 + u_y^2) + 2F(x, y, u)]\, dxdy. \tag{7}$$

2) Если кроме того мы имеем дело с однородной мембраной, когда p есть постоянная величина, которую всегда можно принять равной единице, ибо для этого достаточно разделить уравнение на p, получим:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y, u), \tag{8}$$

$$I(u) = \iint_B [u_x^2 + u_y^2 + 2F(x, y, u)]\, dxdy. \tag{9}$$

3) Наконец, когда мембрана свободна от действия внешних сил $f(x, y, u) = 0$, уравнение (2) вырождается в уравнение Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{10}$$

Соответствующий же ему интеграл будет известный интеграл Дирихле

$$I(u) = \iint_B (u_x^2 + u_y^2)\, dxdy. \tag{11}$$

Мы рассмотрели задачу об интегрировании уравнения (2) при условии задания значений функции u на границе области B, являющуюся естественным обобщением задачи Дирихле для уравнения Лапласа и которую часто называют задачей Дирихле для уравнения (2).

Остановим еще внимание читателя на задачах с предельными условиями иной природы.

Само собой разумеется, при изменении предельных условий будет изменяться и тот функционал, который мы ставим в связь с изучаемой проблемой.

По своей общности для нас явится достаточной следующая задача.

Мы будем предполагать контур L области B кусочно-гладким. [1]

Допустимыми будем считать всякие функции, непрерывные со своими производными первого порядка в области B, включая и контур L. Никаких условий на граничные значения функций мы налагать не будем.

Среди такого рода функций будем искать ту, которая дает минимальное значение функционалу:

$$K(u) = \iint_B [au_x^2 + 2bu_xu_y + cu_y^2 + 2F(x, y, u)]\, dxdy + \int_L \Phi(s, u, u_s)\, ds, \tag{12}$$

где s — длина дуги контура и $u_s = \frac{\partial u}{\partial s}$.

Если u есть попрежнему решение задачи, то функция $\bar{u} = u + \varepsilon\eta$ при любой функции η, удовлетворяющей тем же условиям непрерывности, что и u, будет допустимой. $K(u + \varepsilon\eta)$, рассматриваемый как функция от ε, должен иметь для любых η минимальное значение при $\varepsilon = 0$. Поэтому должна равняться нулю производная от $K(u + \varepsilon\eta)$ по ε при $\varepsilon = 0$. Производная от двойного интеграла, входящего в состав (12), нами была вычислена раньше; она имеет вид (5). Осталось подсчитать производную от криволинейного интеграла. Это будет

$$\int_L [\Phi_u\eta + \Phi_{u_s}\eta_s]_2 ds.$$

Преобразуем второе слагаемое, проинтегрировав его по частям. При выполнении этой операции мы должны будем разбить весь контур L интегрирования на гладкие части. Пусть углы контура соответствуют значениям $s_1, s_2, \ldots s_n$ длины дуги

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} \Phi_{u_s}\eta_i\, ds = \Big|_{s_i+0}^{s_{i+1}-0} \eta_i\Phi_{u_s} - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \eta \frac{d}{ds}\Phi_{u_s}\, ds.$$

[1] Кусочно-гладким мы называем всякий контур, составленный из конечного числа кривых, имеющих непрерывно меняющуюся касательную.

Сложив все эти отдельные результаты, получим

$$\int_L \Phi_{u_s}\eta_s\,ds=\sum_{i=1}^{n}\Big|_{s_i+0}^{s_{i+1}-0}\eta\Phi_{u_s}-\int_L \eta\frac{d}{ds}\Phi_{u_s}\,ds.$$

Сумма, стоящая в правой части равенства, даст нам просто сумму скачков, которые претерпевает функция $\eta\Phi_{u_s}$ при переходе через угловые точки контура L. Обозначая величину скачка в точке s_i условно символом $S_i(\ )$ и помня, что η — непрерывна вплоть до контура, для предыдущей суммы будем иметь выражение:

$$\sum_{i=1}^{n} S(\Phi_{u_s})\,\eta(s_i).$$

Таким образом окончательно для изучаемой производной получаем

$$\left\{\frac{dK(u+\varepsilon\eta)}{d\varepsilon}\right\}_{\varepsilon=0}= \tag{13}$$

$$=2\int_B\int [f-(au_x+bu_y)_x-(bu_x+cu_y)_y]\,\eta\,dxdy+$$

$$+\int_L [2(au_x+bu_y)\frac{dy}{ds}-2(bu_x+cu_y)\frac{dx}{ds}+$$

$$+\Phi_u-\frac{d}{ds}\Phi_{u_s}]\,\eta\,ds+\sum_{i=1}^{n}S_i(\Phi_{u_s})\,\eta(s_i).$$

Найденное значение производной может равняться нулю при всякой функции η только в том случае, когда порознь равны нулю скобки, стоящие под знаком двойного и криволинейного интегралов, и все скачки функции Φ_{u_s}. Ибо, в самом деле, мы можем положить функцию η равной нулю на контуре L и менять ее произвольно внутри области B. В выражении (13) останется только двойной интеграл. Последний же, как говорилось выше, может равняться нулю лишь в том случае, когда скобка есть тождественный нуль. Таким же образом, положив η равной нулю во всех угловых точках s_i и изменяя произвольно ее значения на гладких частях контура, мы убедимся в том, что скобка, стоящая под знаком линейного интеграла, должна вдоль контура тождественно равняться нулю. Наконец, так как значения η в точках s_i между собой независимы, должны равняться нулю все скачки Φ_{u_s}, т. е. Φ_{u_s} должна быть непрерывной функцией точек контура. Итак, искомая функция u должна удовлетворять следующим трем требованиям:

1) быть решением уравнения (2);

2) удовлетворять на границе L условию:

$$2(au_x+bu_y)\frac{dy}{ds}-2(bu_x+cu_y)\frac{dx}{ds}+\Phi_u-\frac{d}{ds}\Phi_{u_s}=0, \tag{14}$$

которое, следуя терминологии Куранта, мы будем называть „естественным" условием;

3) удовлетворять условиям непрерывности Φ_{u_s}

$$S_i(\Phi_{u_s})=0 \qquad [i=1,\ 2,\ \ldots,\ n] \tag{15}$$

Пусть $a=b=p(x,\ y)$, $b=0$, $\Phi=p\sigma(s)\,u^2$. После сокращений естественное условие принимает форму:

$$u_x\frac{dy}{ds}-u_y\frac{dx}{ds}+\sigma u=0, \tag{16'}$$

или так как

$$y_s=\frac{dy}{ds}=\cos(s,\ y)=\cos(n,\ x),\quad [x_s=\frac{dx}{ds}=\cos(s,\ x)=-\cos(n,\ y),$$

где n — внешняя нормаль:

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(s)\,u=0. \tag{16''}$$

Если кроме того $\sigma(s)=0$, т. е. дело идет о минимуме двойного интеграла (7) при свободных граничных значениях допустимых функций u, естественные условия на границе принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0. \tag{16'''}$$

Остановимся еще на одном частном случае, когда

$$\Phi=2F(s)\,u.$$

Естественные условия (14) здесь примут вид

$$(au_x+bu_y)\frac{dy}{ds}-(bu_x+cu_y)\frac{dx}{ds}+F(s)=0. \tag{17}$$

Это — общая задача Неймана для уравнения эллиптического типа. В частном случае, когда $F(x,\ y,\ u)=0$, т. е. когда отсутствуют внешние воздействующие на мембрану силы, распределенные по площади мембраны, и она подвержена лишь воздействию сил, распределенных по ее контуру, мы будем иметь дело с минимумом функционала:

$$K=\int_B\int [au_x^2+2bu_xu_y+cu_y^2]\,dxdy+2\int_L F(s)\,uds \tag{18}$$

при свободных граничных значениях u.

Так как под знак двойного интеграла входят лишь производные от u по x и y, то прибавление к u постоянного слагаемого α не изменит величины интеграла. Контурный же интеграл увеличится на

$$2\alpha \int_L F(s)\,ds$$

и потому, чтобы задача имела решение, необходимо выполнение условия

$$\int_L F(s)\,ds = 0,$$

постоянно встречающегося в теории Неймановой проблемы. Физически оно представляется совершенно очевидным, ибо оно говорит, что в случае равновесия мембраны равнодействующая всех действующих на контур мембраны сил должна равняться нулю.

Само решение задачи будет, очевидно, определенно только с точностью до постоянного слагаемого, соответствующего параллельному переносу мембраны вдоль оси u.

Когда мембрана однородна и изотропна, т. е. $a = c = 1$, $b = 0$, мы будем иметь обычную задачу Неймана для гармонических функций:

$$K = \iint_B (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy + 2\int_L F(s)\,u\,ds = \min. \tag{19}$$

Естественное условие для нее будет:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + F(s) = 0. \tag{20}$$

n° 2. Обобщение основной задачи. Мы дадим сейчас обобщение основной задачи на случай трехмерного пространства.

Рассмотрим уравнение:

$$(au_x + du_y + gu_z)_x + (du_x + bu_y + eu_z)_y + (gu_x + eu_y + cu_z)_z - f(x, y, z, u) = 0, \tag{21}$$

в котором a, b, c, d, e, g суть заданные функции от x, y, z. Будем предполагать это уравнение принадлежащим к эллиптическому типу, т. е. таким, что коэфициенты a, b, c и определители

$$\begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & d & g \\ d & b & e \\ g & e & c \end{vmatrix}$$

будут положительными.

Пусть нужно найти функцию $u(x, y, z)$ в некотором объеме v пространства, удовлетворяющую там диференциальному уравнению и принимающую на границе S его заданные значения:

$$u|_S = \varphi(x, y, z). \tag{22}$$

Путем, аналогичным тому, который был употреблен в n° 1, можно установить, что функция u, дающая минимальное значение интегралу

$$I(u) = \iiint_v [au_x^2 + bu_y^2 + cu_z^2 + 2du_xu_y + 2eu_yu_z + 2gu_zu_x + 2F(x, y, z, u)]\,dxdydz, \tag{23}$$

где

$$F(x, y, z, u) = \int f(x, y, z, u)\,du$$

при условии задания граничных значений $u|_S = \varphi$, будет одновременно решать и поставленную выше проблему диференциальных уравнений.

Совершенно так же можно убедиться, что функция u, дающая минимум интегралу

$$K(u) = I(u) + 2\iint_S \Phi(x, y, z, u)\,ds \tag{24}$$

при свободных граничных значениях должна удовлетворять уравнению (21) и „естественному“ условию на поверхности

$$(au_x + du_y + gu_z)\cos(n, x) + (du_x + bu_y + eu_z)\cos(n, y) + (gu_x + eu_y + cu_z)\cos(n, z) + \Phi_u(x, y, z, u) = 0. \tag{25}$$

Остановимся еще на одном предложении, относящемся к уравнениям четвертого порядка, имеющим много общих черт с уравнениями эллиптического типа второго порядка и являющимся прямым обобщением уравнения деформации пластины. Рассмотрим следующую квадратичную форму вторых частных производных

$$2w = au_{xx}^2 + bu_{xy}^2 + cu_{yy}^2 + 2du_{xx}u_{xy} + 2eu_{xy}u_{yy} + 2gu_{yy}u_{xx}. \tag{26}$$

Ее мы будем предполагать определенной положительной, т. е. такой, что a, b, c и написанные нами выше определители положительными всюду в области B.

Составим следующий функционал:

$$K(u) = 2\iint_B [w + F(x, y, u)]\,dxdy + 2\int_L \Phi(s, u, u_s, u_n)\,ds, \tag{27}$$

где

$$u_n = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Будем искать функцию, дающую наименьшее значение $K(u)$ при тех или иных предельных требованиях. О простейших случаях этих условий, наиболее часто встречающихся в практических вопросах, мы будем иметь случай говорить немного ниже.

Пусть функция $u(x, y)$ решает задачу; составим $\bar{u} = u + \varepsilon\eta$, где η удовлетворяет таким предельным условиям, что $\bar{u}$ будет допустимой

функцией при любых значениях параметра ε. $K(u+\varepsilon\eta)$ при $\varepsilon=0$ должен иметь минимальное значение. Поэтому должно быть при всякой допустимой η: $\left\{\frac{dK(u+\varepsilon\eta)}{d\varepsilon}\right\}_{\varepsilon=0}=0$. Введем обозначения

$$w_1=\frac{\partial w}{\partial u_{xx}}=au_{xx}+du_{xy}+gu_{yy},$$

$$w_2=\frac{\partial w}{\partial u_{xy}}=du_{xx}+bu_{xy}+eu_{yy},$$

$$w_3=\frac{\partial w}{\partial u_{yy}}=gu_{xx}+eu_{xy}+cu_{xy}.$$

Для написанной производной будем иметь следующее очевидное выражение:

$$2\int_B\int(w_1\eta_{xx}+w_2\eta_{xy}+w_3\eta_{yy}+F_u\eta)\,dxdy+$$

$$+2\int(\Phi_u\eta+\Phi_{u_s}\eta_s+\Phi_{u_n}\eta_n)\,ds.$$

Двойной интеграл может быть путем двухкратного применения формулы Грина-Римана преобразован так, чтобы под знаком его осталась лишь функция η. Выделившийся при этом криволинейный интеграл будет содержать значения η_x, η_y на контуре L; если их заменить выражениями через η_s и η_n:

$$\eta_x=\eta_n x_n+\eta_s x_s,$$
$$\eta_y=\eta_n y_n+\eta_s y_s$$

и обозначить

$$M=w_1x_n^2+w_2x_ny_n+w_3y_n^2,$$

$$N=w_1x_nx_s+\frac{1}{2}w_2(x_ny_s+x_sy_n)+w_3y_sy_n,$$

$$P=\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)x_n+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial w_2}{\partial x}+\frac{\partial w_3}{\partial y}\right)y_n,$$

получим

$$\left\{\frac{d}{d\varepsilon}K(u+\varepsilon\eta)\right\}_{\varepsilon=0}=2\int_B\int\left[F_u+\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2w_3}{\partial y^2}\right]\eta dxdy+$$

$$+2\int_L[(M+\Phi_{u_n})\eta_n+(N+\Phi_{u_s})\eta_s+(\Phi_u-P)\eta]\,ds.$$

Член, содержащий η_s во втором интеграле, вычислим по частям. При этом, если контур L имеет угловые точки, выделятся скачки, которые

претерпевает функция $N+\Phi_{u_s}$ в этих точках. В результате мы получим следующее выражение для производной:

$$(28)\qquad 2\int_B\int\left[F_u+\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2w_3}{\partial y^2}\right]dxdy+$$

$$+2\int_L[(M+\Phi_{u_n})\eta_n+\left(\Phi_u-P-\frac{d}{ds}(N+\Phi_{u_s})\right)\eta]\,ds+$$

$$+\sum S_i(N+\Phi_{u_s})\eta(s_i).$$

В виду произвола η внутри области B написанное выражение может равняться нулю лишь тогда, когда квадратная скобка под знаком двойного интеграла будет тожественным нулем:

$$(29)\qquad F_u+\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2w_3}{\partial y^2}=0.$$

Примером такого уравнения может служить уравнение равновесия однородной изотропной пластинки. Здесь с точностью до постоянного множителя $\frac{Gh^3}{12}\cdot\frac{m}{m-1}$ потенциальная энергия деформации пластинки есть [1]

$$2\int_B\int w\,dxdy=\int_B\int[(\Delta u)^2-2(1-\nu)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)]\,dxdy,$$

$$w_1=u_{xx}+u_{yy}-(1-\nu)u_{yy}$$
$$w_2=2(1-\nu)u_{xy},$$
$$w_3=u_{xx}+u_{yy}-(1-\nu)u_{yy}.$$

Уравнение (29) принимает вид:

$$\Delta\Delta u=\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4u}{\partial y^4}=-F_u(x,\ y,\ z,\ u).$$

Что касается криволинейного интеграла, то его природа зависит от граничных условий для функции u и потому требование обращения его в нуль будет влечь за собой различные следствия в зависимости от конкретной формы этих условий. Мы различим сейчас четыре наиболее часто встречающихся случая.

1. На контуре L заданы значения допустимых функций и их нормальных производных

$$(30)\qquad u\Big|_L=f(s),\qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_L=\varphi(s).$$

[1] См. напр. Е. Трефф ц, Математическая теория упругости, 1934, стр. 74.

Для того чтобы $\bar{u}$ была допустимой функцией при всяких ε, мы должны считать, что η и $\frac{\partial\eta}{\partial n}$ на контуре обращаются в нуль. Линейный интеграл в формуле (28) обращается в нуль, и функция, решающая проблему, находится как решение уравнения (29) при предельных условиях (30).

2. На L заданы лишь значения допустимых функций; значения же нормальных производных остаются произвольными и должны быть найдены из условия экстремальности. Здесь $\eta|_L = 0$, и, в виду произвола значений η_n, из равенства нулю упомянутого криволинейного интеграла вытекает, что должен равняться нулю множитель $M + \Phi_{u_n}$ при η_n. Таким образом функция, решающая задачу, должна удовлетворять уравнению (29) и граничным условиям:

$$u|_L = f(s), \quad M + \Phi_{u_n} = 0. \tag{31}$$

Например, для случая пластинки, о которой мы говорили выше, второе условие имеет вид:

$$\nu\Delta u + (1-\nu)(u_{xx}x_n^2 + 2u_{xy}x_y n + u_{yy}y_n^2) + \Phi_{u_n} = 0.$$

3. На L заданы значения нормальных производных, тогда как значения самих функций остаются произвольными. $\frac{\partial\eta}{\partial n} = 0$, и в виду произвола значений η на L из равенства нулю линейного интеграла и суммы, стоящей в (28), следует, что функция u должна удовлетворять на границе требованиям:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(s); \quad \frac{d}{ds}(N + \Phi_{u_s}) + P - \Phi_u = 0 \tag{32}$$

и условиям непрерывности комбинации $N + \Phi_{u_s}$ вдоль контура L:

$$S_i(N + \Phi_{u_s}) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{33}$$

4. Наконец, если на граничные значения допустимых функций и их производных по нормали не наложено никаких требований, искомая функция u должна будет удовлетворять одновременно вторым равенствам (31), (32) и равенству (33).

п° 3. Экстремальные свойства собственных чисел и собственных функций. Рассмотрим задачу о собственных числах и собственных функциях для дифференциального уравнения:

$$L(u) + \lambda\rho u = (au_x)_x + (bu_x)_y + (bu_y)_x + (cu_y)_y - qu + \lambda\rho u = 0, \quad \rho > 0 \tag{34}$$

при граничном условии либо $u = 0$, либо

$$(au_x + bu_y)\frac{dy}{ds} - (bu_x + cu_y)\frac{dx}{ds} + \sigma(s)\,u = 0.$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем следующие обозначения:

$$D(u, v) = \int_B\int [au_xv_x + b(u_xv_y + u_yv_x) + cu_yv_y + quv]\,dxdy,$$

$$H(u, v) = \int_L \sigma uv\,ds. \tag{35}$$

$$G(u, v) = \int_B\int \rho uv\,dxdy.$$

Когда u и v совпадают, мы будем иметь:

$$\begin{cases} D(u) = \int_B\int [au_x^2 + 2bu_xu_y + cu_y^2 + qu^2]\,dxdy, \\ H(u) = \int_L \sigma u^2 ds, \\ G(u) = \int_B\int \rho u^2 dxdy; \end{cases} \tag{36}$$

относительно последних функционалов очевидны следующие свойства:

$$D(u+v) = D(u) + 2D(u, v) + D(v)$$

аналогично для $H(u)$ и $G(u)$.

Сообразно двум типам предельных условий, о которых мы говорили, рассмотрим две вариационные задачи. В первом случае мы будем считать допустимыми всякие функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям непрерывности и принимающие на контуре L области B нулевые значения. Во втором случае мы будем считать контурные значения допустимых функций свободными.

Соответственно первой и второй задачам мы будем рассматривать функционал либо $I(u) = D(u)$, либо $I(u) = D(u) + H(u)$. Так как в обеих задачах и формулировки теорем и ход рассуждений между собой аналогичны, мы будем иметь в виду ниже только первую задачу.

Среди допустимых функций, удовлетворяющих условию $G(u) = 1$, будем искать ту, которая дает минимальное значение функционалу $I(u)$. Докажем, что она будет собственной функцией уравнения (34) при граничном условии $u|_L = 0$, собственное же число будет равно минимальному значению $I(u)$.

Вместо того чтобы рассматривать задачу о минимуме $I(u)$ при условии $G(u) = 1$, мы можем рассмотреть вопрос о минимуме отношения $\frac{I(u)}{G(u)}$ без каких-либо дополнительных требований. Решение определится лишь с точностью до постоянного множителя.

Функцию, решающую поставленную проблему, назовем u_1, соответствующее минимальное значение отношения λ_1, так что для всякой допустимой функции $\frac{I(u)}{G(u)} \geqslant \frac{I(u_1)}{G(u_1)} = \lambda_1$.

Пусть $\eta(x, y)$ удовлетворяет тем же условиям, что и u. Положим $u = u_1 + \varepsilon\eta$, где ε — произвольная постоянная.

Подстановка в неравенство $I(u) \geqslant \lambda_1 G(u)$ приводит нас, если заметить, что $I(u_1) = \lambda_1 G(u_1)$, к соотношению:

$$2\varepsilon [D(u_1, \eta) - \lambda_1 G(u_1, \eta)] + \varepsilon^2 [D(\eta) - \lambda_1 G(\eta)] \geqslant 0.$$

Чтобы это неравенство имело место при любых значениях ε, нужно, чтобы коэфициент при ε был равен нулю

$$D(u_1, \eta) - \lambda_1 G(u_1, \eta) = 0. \tag{37}$$

Преобразовав левую часть по формуле Грина-Римана и приняв во внимание, что η на контуре L обращается в нуль, получим

$$-\int_B\int [L(u_1) + \lambda_1 \rho u_1] \eta dx dy = 0,$$

откуда, в силу произвола η, следует, что функция u_1 удовлетворяет уравнению (34) при $\lambda = \lambda_1$.

Наложим теперь на допустимые функции кроме условия нормированности $G(u) = 1$ еще требование ортогональности к первой собственной функции $G(u_1, u) = 0$ и покажем, что функция u_2, решающая задачу о минимуме $I(u)$ при новых требованиях, есть вновь собственная функция уравнения (34), при том же граничном условии, и соответствующее собственное число равно новому минимуму $I(u)$:

$$\lambda_2 = \frac{I(u_2)}{G(u_2)}.$$

Рассмотрим опять отношение $\dfrac{I(u)}{G(u)}$ и назовем его минимум в нашей задаче λ_2. Положим $u = u_2 + \varepsilon\eta$. Функция η здесь кроме условий граничных и непрерывности должна удовлетворять еще требованию ортогональности к u_1. Пусть $\zeta(x, y)$ любая допустимая функция; положим $\eta = \zeta + ku_1$ и подберем число k так, чтобы η стала ортогональной к u_1:

$$G(u_1, \zeta + ku_1) = G(u_1, \zeta) + kG(u_1, u_1) = G(u_1, \zeta) + k,$$
$$k = -G(u_1, \zeta).$$

Подставив в неравенство $I(u) \geqslant \lambda_2 G(u)$ вместо u его значение, найдем, в силу произвола ε, что для u_2 должно быть выполненным равенство

$$D(u_2, \zeta) - \lambda_2 G(u_2, \zeta) + k[D(u_1, u_2) - \lambda_2 G(u_1, u_2)] = 0.$$

Обратим наше внимание на скобку, стоящую множителем при k. В силу ортогональности u_1 и u_2, $G(u_1, u_2) = 0$. Далее, так как u_2 будет допустимой функцией, равенство (37) должно быть верным при $\eta = u_2$, что даст:

$$D(u_1, u_2) - \lambda_1 G(u_1, u_2) = D(u_1, u_2) = 0.$$

Таким образом для u_2 должно быть при произвольных ζ выполнено равенство

$$D(u_2, \zeta) - \lambda_2 G(u_2, \zeta) = 0.$$

Отсюда обычными рассуждениями можно установить, что u_2 удовлетворяет уравнению (34) при $\lambda = \lambda_2$ и т. д.

Вообще говоря, n-ая собственная функция u_n, если известны предшествующие, определится следующей минимальной задачей: $I(u) = \min$ для допустимых функций, удовлетворяющих условиям нормированности $G(u) = 1$ и ортогональности:

$$G(u, u_i) = 0. \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Собственное число λ_n есть минимальное значение $I(u_n)$ функционала I.

§ 2. Метод Ритца

n°1. Последовательные приближения. Установленные выше экстремальные свойства функций, удовлетворяющих диференциальным уравнениям, позволяют свести задачу разыскания их к проблеме об экстремуме некоторого функционала. Приближенное же решение последней задачи часто бывает проще, чем решение исходной.

Пусть $I(u)$ будет одним из рассмотренных выше функционалов. Чтобы иметь в виду что-либо определенное, мы будем говорить о наименьшем значении $I(u)$. Обозначим его через m. Допустим далее, что нам каким-либо путем удалось установить последовательность допустимых функций $u_1, u_2, \ldots$, такую, что соответствующие значения $I(u_n)$ сходятся к m: $\lim\limits_{n\to\infty} I(u_n) = m$. Подобную последовательность ниже мы будем называть минимизирующей.

Так как значения I, соответствующие членам минимизирующей последовательности, сходятся к наименьшему значению m, то следует ожидать, что функции, входящие в эту последовательность, будут сходиться к решению задачи, если такое существует; $u_1, u_2, \ldots$ можно рассматривать как последовательные приближения к решению. Само собой разумеется, что факт сходимости или расходимости этих приближений будет тесно связан не только с существованием или отсутствием решения, но и с удачным или неудачным правилом выбора их, ибо при одном способе построения минимизирующей последовательности она может оказаться сходящейся, при другом же — расходящейся.

Мы изложим сейчас идею метода построения ее, принадлежащего германскому физику Ритцу. [1] Свой способ Ритц применял с большим и постоянным успехом к решению ряда задач; с тех пор метод начал приобретать все возрастающее значение и к настоящему времени стал одним из основных методов решения задач математической физики и инженерного дела.

---

[1] W. Ritz, Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Math. Physik. Crelle's Journal, Bd. 135, 1908.

п° 2. Метод Ритца. Основная идея этого метода заключается в следующем. Пусть мы имеем семейство допустимых функций, зависящее от нескольких произвольных постоянных $u = U_n(x, y, a_1 \dots a_n)$. Вопрос о построении такого семейства по заданным предельным условиям мы рассмотрим ниже. Будем среди функций нашего семейства искать такую, которая подходила бы наилучшим образом к решению задачи. Внесем под знак функционала $I(u)$ вместо u функцию $U_n(x, y; a_1 \dots a_n)$. После выполнения всех необходимых квадратур получим некоторую функцию от $a_1, a_2, \dots a_n$. Выберем теперь постоянные $a_1, a_2, \dots a_n$ так, чтобы эта функция имела наименьшее значение.

Числа a_i мы найдем, вообще говоря, как решение n уравнений:

$$\frac{\partial I(U_n)}{\partial a_i} = 0. \qquad i = 1, 2, \dots n \tag{1}$$

Определив отсюда a_i и подставив их значения в U_n, получим искомую функцию; обозначим ее через u_n. Будем теперь брать семейство допустимых функций все с большим числом произвольных постоянных так, чтобы оно представляло все более широкий класс допустимых функций. Чем шире взятое нами семейство функций, тем ближе мы сможем, вообще говоря, подойти таким путем к искомому решению задачи. При достаточно хорошем выборе функций U_n построенная нами последовательность функций $u_1, u_2, \dots$ будет минимизирующей, и тогда в пределе при $n \to \infty$ мы можем надеяться получить решение нашей основной задачи. Разумеется, сходимость и исследование тех условий, при которых она осуществляется, должны быть предметом специального анализа. Мы оставляем сейчас его в стороне.

Дав общие пояснения идеи метода Ритца, мы перейдем к частным вопросам, возникающим из этой теории.

В своей работе Ритц предлагает выбирать функции, определяющие семейство допустимых функций, специальным образом, имеющим громадное преимущество по сравнению с другими. Способ этот остается единственно употребительным и до настоящего времени во всех практических вычислениях.

Мы поясним сейчас его на примере. Пусть дело идет об основной задаче разыскания наименьшего значения функционала (4) предыдущего параграфа при предельном условии (1). Рассмотрим некоторую функцию $\psi_0(x, y)$, удовлетворяющую требованиям непрерывности и тому же условию на границе L области B, что и решение задачи:

$$\psi_0|_L = \varphi(s).$$

Возьмем теперь любую систему линейно независимых функций $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$, удовлетворяющих нашим требованиям непрерывности и обращающихся в нуль на контуре L, и составим следующую линейную комбинацию их:

$$U_n = \psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \dots + a_n\psi_n. \tag{2}$$

Очевидно, при всех значениях постоянных a_k, U_n будет принимать на L заданные значения и быть, следовательно, допустимой функцией.

Заметим сейчас, что U_{n+1} представляет более широкое семейство допустимых функций, чем U_n, и потому минимальное значение функционала I, найденное из задачи $I(U_n) = \min$, будет не меньше, чем минимальное значение, найденное из задачи $I(U_{n+1}) = \min$.

Такой способ построения функции U_n имеет следующее несомненное достоинство. В большинстве случаев, если не сказать почти исключительно, в практических задачах под знаком интеграла в равенстве (4) стоит квадратичная функция от u и производных u_x u_y вида:

$$I(u) = \int_B\int [au_x^2 + 2bu_xu_y + cu_y^2 + qu^2 + 2f(x, y)u]\, dxdy. \tag{3}$$

$$ac - b^2 > 0, \quad q \geqslant 0$$

После подстановки сюда U_n и выполнения интеграции, мы получим некоторую квадратичную функцию от a_k:

$$I(U_n) = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{kj}a_ka_j + 2\sum_{k=1}^{n} \beta_ka_k + \delta, \tag{4}$$

где

$$\alpha_{kj} = D(\psi_k, \psi_j) = \int_B\int [a\psi_{kx}\psi_{jx} + b(\psi_{kx}\psi_{jy} + \psi_{ky}\psi_{jx}) + c\psi_{ky}\psi_{jy} + q\psi_k\psi_j]\, dxdy, \tag{5}$$

$$\beta_k = \int_B\int [a\psi_{0x}\psi_{kx} + b(\psi_{0x}\psi_{ky} + \psi_{0y}\psi_{kx}) + c\psi_{0y}\psi_{ky} + q\psi_0\psi_k + f\psi_k]\, dxdy,$$

$$\delta = I(\psi_0).$$

Система (1) для определения постоянных a_k будет в этом случае линейной:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}a_j + \beta_k = 0. \qquad k = 1, 2, \dots n \tag{6}$$

Особенная простота этой системы и является причиной того предпочтения, которое оказывают рассматриваемому способу построения U_n.

Определитель системы будет вместе с тем определителем квадратичной формы от a_k, получающейся от подстановки вместо u суммы $\sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k$ в интеграл

$$\int_B\int [au_x^2 + 2bu_xu_y + cu_y^2 + qu^2]\, dxdy.$$

Но, в силу сделанных предположений относительно a, b, c и q этот интеграл может равняться нулю только в том случае, когда u равно нулю, чего не может быть по причине линейной независимости функций ψ_k. $\sum_{k,j=1}^{n} \alpha_{kj}a_ka_j$ будет определенной положительной формой и определитель ее наверное отличен от нуля. Таким образом система

(6) наверное имеет единственное решение. Аналогично будет и для других рассмотренных нами вариационных задач.

Пример 1. Известно, что задача об определении напряжений, возникающих в призматическом стержне при скручивании его касательными усилиями, распределенными по концевым сечениям, если пренебречь его весом, сводится к нахождению решения уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2\mu\tau$$

(τ — угол закручивания стержня, отнесенный к единице его длины, и μ — известная постоянная Ламэ), обращающегося в нуль на контуре сечения стержня.

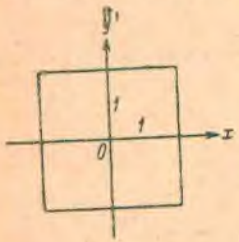


Рис. 14.

Пусть стержень имеет квадратное поперечное сечение со стороной 2. Направим оси координат как указано на рис. 14.

Для упрощения записи введем вместо искомой функции u новую функцию $v=-\dfrac{1}{2\mu\tau}u$.

Уравнение для нее будет

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=1.$$

Эквивалентная этой задаче вариационная проблема имеет вид:

$$I(v)=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}[v_x^2+v_y^2+2v]\,dxdy.$$

$$v|_L=0.$$

Примем за функции Ψ_k произведения тригонометрических функций. Решение, в силу симметрии уравнения, области, для которой оно ищется, и предельных условий относительно осей координат, должно быть само симметричным относительно этих осей. Поэтому мы наверное должны будем взять одни лишь косинусы. Приняв во внимание предельные условия, положим:

$$\Psi_{kj}=\cos\frac{2k+1}{2}\pi x\cos\frac{2j+1}{2}\pi y,$$

$$V_n=\sum_{k,j=0}^{n}a_{kj}\cos\frac{2k+1}{2}\pi x\cos\frac{2j+1}{2}\pi y,$$

$$I(V_n)=\frac{\pi^2}{4}\sum_{k,j=0}^{n}[(2k+1)^2+(2j+1)^2]\,a_{kj}^2+\frac{32}{\pi^2}\sum_{k,j=0}^{n}\frac{(-1)^{k+j}}{(2k+1)(2j+1)}a_{kj},$$

$$\frac{\partial I(V_n)}{\partial a_{k,j}}=\frac{\pi^2}{2}[(2k+1)^2+(2j+1)^2]\,a_{kj}+\frac{32}{\pi^2}\frac{(-1)^{k+j}}{(2k+1)(2j+1)}=0,$$

$$a_{kj}=-\frac{64(-1)^{k+j}}{\pi^4(2k+1)(2j+1)[(2k+1)^2+(2j+1)^2]}.$$

По найденным a_{kj} сейчас же напишем и v_n. Замечательно, что найденные нами приближения для коэфициентов a_{kj} не зависят от n.

Перейдя к пределу при $n\to\infty$, получим известное точное решение в форме двойного ряда:

$$v=-\frac{64}{\pi^2}\sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+j}}{(2k+1)(2j+1)[(2k+1)^2+(2j+1)^2]}\cdot\cos\frac{2k+1}{2}\pi x\cos\frac{2j+1}{2}\pi y.$$

Простота решения обусловлена разумеется тем, что нами особенно удачно выбраны „координатные функции“ Ψ_{kj}.

Иначе дело будет обстоять, если мы другим способом выберем Ψ_{kj}. Решим ту же задачу, принимая за координатные функции полиномы. Общий вид многочленов, обращающихся в нуль при $x=\pm1$ и $y=\pm1$, будет:

$$(1-x^2)(1-y^2)(a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+\dots)$$

Для нас бесполезно брать V_n в такой общей форме, ибо мы знаем, что оси x и y являются осями симметрии, и потому в последний множитель должны входить лишь четные степени x и y; далее, в силу равноправности осей, x и y должны входить туда симметрично:

$$V_n=(1-x^2)(1-y^2)[a_{00}+a_{20}(x^2+y^2)+a_{40}(x^4+y^4)+a_{22}x^2y^2+\dots].$$

Ограничимся в своих вычислениях сначала одним членом в последних скобках, положив

$$V_1=(1-x^2)(1-y^2)\,a_{00},$$

$$I(V_1)=\frac{256}{45}a_{00}^2+\frac{32}{9}a_{00},\qquad \frac{dI}{da_{00}}=2\,\frac{256}{45}a_{00}+\frac{32}{9}=0.$$

$$a_{00}=-\frac{5}{16}.$$

Возьмем два члена в скобках

$$V_2=(1-x^2)(1-y^2)[a_{00}+a_{20}(x^2+y^2)].$$

Аналогичные вычисления покажут нам, что

$$a_{00}=-\frac{5}{16}\,\frac{259}{277}\qquad a_{20}=-\frac{5}{16}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{35}{277}.$$

Для характеристики точности полученных результатов найдем значения приближений в центре квадрата: $V_1=-\dfrac{5}{16}=-0{,}313$, $V_2=-0{,}292$. Точное же значение, найденное путем вычисления нескольких первых членов ряда, построенного нами для v, будет, если ограничиться тремя десятичными знаками $v=-0{,}293$. Ошибка второго приближения составит около $^1/_3\,\%$.

Как известно, величина скручивающего момента по функции u определяется следующим образом:

$$M = 2\int_B\int u\,dx\,dy.$$

Посмотрим, с какой степенью точности позволяют нам вычислить его построенные приближения. Подставляя под знак интеграла сначала $u_1 = -2\mu\tau V_1$ и затем $u_2 = -2\mu\tau V_2$, найдем два значения:

$$M = 0{,}5555\mu\tau \quad \text{и} \quad M = 0{,}5616\mu\tau.$$

Точное же значение есть $M = 0{,}5624\mu\tau$. Ошибка первого приближения есть $1^1/_3{}^0/_0$ и второго меньше чем $0{,}15^0/_0$.

Пример II. Второй пример мы заимствуем из упоминавшегося нами раньше основного труда В. Ритца. Пусть дело идет об определении положения равновесия однородной изотропной пластинки, имеющей форму прямоугольника со сторонами a и b, заделанной по краям в горизонтальном направлении, под действием внешних поперечных сил.

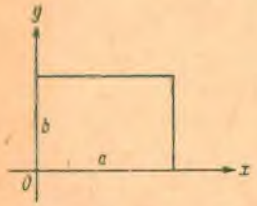


Рис. 15.

Обозначим через $f(x, y)$ плотность внешних сил, рассчитанную на единицу площади пластины.

Расположим оси координат, как указано на рис. 15. Вопрос сводится к разысканию решения уравнения

$$\Delta\Delta u = f(x, y),$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$(*) \qquad u = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на контуре } L$$

или, если принять во внимание форму пластинки

$$(**) \qquad \begin{cases} u = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \\ u = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b; \end{cases}$$

соответствующая вариационная задача имеет вид:

$$I(u) = \int_0^a\int_0^b [(\Delta u)^2 - 2f(x, y)\,u]\,dx\,dy = \min$$

при условии (**).

Выберем теперь „координатные" функции Ψ. Форма взятой пластинки и физическая аналогия между деформацией заделанной по краям пластинки и деформацией заделанного стержня естественно приводят нас к следующим функциям.

Пусть стержень имеет длину a и заделан с концов:

$$u = 0 \quad \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = a.$$

Собственные числа λ_n являются решением следующего уравнения:

$$\cos\lambda_n a \operatorname{ch}\lambda_n a = 1.$$

Ниже часто вместо λ_n мы будем употреблять величину $\mu_n = \lambda_n a$, не зависящую от длины стержня. Для больших n μ_n весьма мало отличается от $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$. Мы приведем здесь полезные нам для дальнейшего несколько первых значений μ, найденных с точностью до четырех десятичных знаков.

$$\mu_1 = \frac{3}{2}\pi + 0{,}01765 = 4{,}7300; \qquad \mu_2 = \frac{5}{2}\pi - 0{,}00078 = 7{,}8532;$$

$$\mu_3 = \frac{7\pi}{2} + 0{,}00003 = 10{,}9956; \qquad \mu_4 = \frac{9\pi}{2} = 14{,}1372;$$

$$\mu_5 = \frac{11\pi}{2} = 17{,}2787; \qquad \mu_6 = \frac{13\pi}{2} = 20{,}4203.$$

Собственные же функции удовлетворяют уравнению

$$u'''' = \lambda^4 u.$$

Если нормируем их обычным способом:

$$\int_0^a u^2 dx = 1,$$

то они будут иметь следующий вид

$$\xi_n(x) = \frac{(\cos\lambda_n x - \operatorname{ch}\lambda_n x)(\sin\mu_n - \operatorname{sh}\mu_n) - (\sin\lambda_n x - \operatorname{sh}\lambda_n x)(\cos\mu_n - \operatorname{ch}\mu_n)}{\sqrt{a}\,(\sin\mu_n - \operatorname{sh}\mu_n)}.$$

Обозначим через $\tau_{in}(x)$ собственные функции стержня длины b, которые получаются из ξ_n путем замены a на b и собственных чисел λ_n^4 на $\left(\frac{b}{a}\right)^4\lambda_n^4 = \lambda_n'^4$. Положим:

$$\Psi_{kj} = \xi_k(x)\,\tau_{ij}(y)$$

$$U_{n,m} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{kj}\xi_k(x)\,\tau_{ij}(y).$$

Подставим $U_{n,m}$ в интеграл $I(u)$ и запишем условия его минимальности

$$\frac{\partial I(U_{n,m})}{\partial a_{r,s}} = 2\int_0^a\int_0^b [\Delta U_{n,m}\Delta(\xi_r\eta_s) - f\cdot\xi_r\eta_s]\,dxdy = 0.$$

После двухкратного применения к первому члену интегрирований по частям мы, в силу условий (**), получим:

$$(***)\qquad \int_0^a\int_0^b [\Delta\Delta U_{n,m} - f]\,\xi_r\eta_s dxdy = 0.$$

Но так как $\xi_k'''' = \lambda_k^4\xi_k$, $\eta_j'''' = \lambda_j'^4\eta_j$,

$$\Delta\Delta U_{n,m} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{kj}[(\lambda_k^4 + \lambda_j'^4)\xi_k\eta_j + 2\xi_k''\eta_j''].$$

Обозначим

$$\alpha_k = \frac{\cos\mu_k - \operatorname{ch}\mu_k}{\sin\mu_k - \operatorname{sh}\mu_k}, \qquad \sigma_{kj} = \int_0^a \xi_k\xi_j''dx.$$

Приведем несколько первых значений α_k:

$$\alpha_1 = 0{,}98250; \quad \alpha_2 = 1{,}00078; \quad \alpha_3 = 0{,}99997; \quad \alpha_4 = 1{,}00000.$$

Приняв во внимание уравнение для ξ_k и проинтегрировав дважды по частям, имеем:

$$\sigma_{kj} = \sigma_{jk} = \frac{1}{\lambda_k^4 - \lambda_j^4}[\xi_k'''\xi_j'' - \xi_k''\xi_j''']_0^a =$$

$$= \frac{1}{a}\frac{4\lambda_k^2\lambda_j^2}{\lambda_k^4 - \lambda_j^4}[(-1)^{k+j}+1](\lambda_k\alpha_k - \lambda_j\alpha_j) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{4\mu_k^2\mu_j^2}{\mu_k^4 - \mu_j^4}[(-1)^{k+j}+1]\cdot(\mu_k\alpha_k - \mu_j\alpha_j).$$

$$\sigma_{kk} = \int_0^a \xi_k\xi_k''dx = -\lambda_k^2\alpha_k^2 + 2\lambda_k\frac{\alpha_k}{a} = \frac{1}{a^2}[2\mu_k\alpha_k - \mu_k^2\alpha_k^2].$$

При $k > 2$, $j > 2$ с точностью до 0,0001:

$$\sigma_{kj} = \frac{1}{a^2}\frac{4\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\left(j+\frac{1}{2}\right)^2(k-j)[(-1)^{k+j}+1]}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(j+\frac{1}{2}\right)^2},$$

$$\sigma_{kk} = \frac{1}{a^2}\left[(2k+1)\pi - \left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\right].$$

Система (***) может быть переписана в виде:

$$(****)\quad a_{rs}(\lambda_r^4 + \lambda_s'^4 + 2\sigma_{rr}\sigma_{ss}) + 2\sum_{k=1}^{n}{}'\sum_{j=1}^{m}{}' a_{kj}\sigma_{kr}\sigma_{js} = f_{rs};$$

$$r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

$$f_{rs} = \int_0^a\int_0^b f\xi_r\eta_s dxdy.$$

Знак $'$ у сумм показывает, что при суммировании должно быть пропущено слагаемое, содержащее a_{rs}.

Дальнейшие вычисления будут зависеть от вида функции f; пусть мы предположим пластинку квадратной со сторонами a и внешнюю действующую силу распределенной равномерно по всей поверхности пластинки: $f(x, y) = C$. Так как

$$\int_0^a \xi_k dx = \begin{cases} -\dfrac{4\alpha_k}{\sqrt{a}\,\lambda_k} & \text{при } k \text{ — нечетном,} \\ 0 & \text{при } k \text{ — четном} \end{cases}$$

то, в виду $\eta_j(y) = \xi_j(y)$,

$$f_{rs} = \int_0^a\int_0^a C\xi_r(x)\,\xi_s(y)\,dxdy =$$

$$= \begin{cases} C\dfrac{16\alpha_r\alpha_s}{a\lambda_r\lambda_s} = C\dfrac{16a\alpha_r\alpha_s}{\mu_r\mu_s}, & \text{если } r \text{ и } s \text{ нечетные.} \\ 0, & \text{если хоть одно из чисел } r \text{ или } s \text{ четное.} \end{cases}$$

В силу симметрии, оси x и y должны быть равноправными; поэтому $a_{kj} = a_{jk}$ и система (****) может быть упрощена, если отбросить все уравнения, для которых $r > s$. Далее, первая собственная функция стержня не имеет нулей в промежутке и симметрична относительно средины стержня, вторая будет антисимметрична относительно средины и т. д. В силу упомянутой симметрии нашей задачи, в решении должны, очевидно, отсутствовать все собственные функции ξ и η с четными нумерами, и поэтому могут быть отличными от нуля только такие a_{kj}, когда оба индекса будут нечетными.

Обозначим для упрощения записи $l = 8ca^5 10^{-4}$. Положим сначала $n = m = 1$. Тогда система для определения a_{kj} вырождается в одно уравнение

$$651{,}8a_{11} = 431{,}5l,$$

$$a_{11} = 0{,}6620l; \quad u_{11} = 0{,}6620l\xi_1(x)\,\xi_1(y).$$

Для $n = m = 3$ получим систему

$$651{,}8a_{11} - 239{,}2a_{13} + 94{,}7a_{33} = 431{,}5l,$$
$$-119{,}6a_{11} + 8867a_{13} - 961a_{33} = 188{,}5l,$$
$$94{,}6a_{11} - 1922a_{13} + 24390a_{33} = 82{,}7l.$$

Вместо того чтобы решать эту систему при помощи определителей, мы предпочтем, в виду того что коэфициенты при диагональных членах значительно превосходят остальные коэфициенты, найти ее решение методом последовательных приближений.

Решая уравнения относительно a_{11}, a_{13}, a_{33}, имеем:

$$a_{11} = 0{,}6620l + 0{,}3670a_{13} - 0{,}1453a_{33}$$
$$a_{13} = 0{,}0213l + 0{,}0135a_{11} + 0{,}1084a_{33}$$
$$a_{33} = 0{,}0034l - 0{,}0039a_{11} + 0{,}0792a_{13}.$$

Что касается исходных значений, то за них можно было бы принять например свободные члены правых частей. Но так как первое приближение для a_{11} мы знаем, то предпочтительнее начать вычисления с $a_{11} = 0{,}6620$, $a_{13} = a_{33} = 0$. В результате мы получим таблицу:

Коэфиц.	Исходные значения	Первое приближен.	Второе приближен.	Третье приближен.
a_{11}	$0{,}6620l$	$0{,}6620l$	$0{,}6730l$	$0{,}6727l$
a_{13}	0	$0{,}0302l$	$0{,}0303l$	$0{,}0307l$
a_{33}	0	$0{,}0008l$	$0{,}0031l$	$0{,}0031l$

$$U_{23} = 0{,}6727l\xi_1(x)\,\xi_1(y) + 0{,}0307\,[\xi_1(x)\,\xi_3(y) + \xi_3(x)\,\xi_1(y)] + 0{,}0031l\xi_3(x)\,\xi_3(y).$$

Преимущество метода последовательных приближений становится еще яснее, если обратиться к дальнейшим приближениям. Так при $n = m = 5$ будем иметь:

$$651{,}8a_{11} - 239{,}2a_{13} + 94{,}7a_{33} - 188a_{15} + 148a_{35} + 58a_{55} = 431{,}5l,$$
$$-119{,}6a_{11} + 8867a_{13} - 961a_{33} - 226a_{15} - 515a_{35} + 186a_{55} = 188{,}5l,$$
$$94{,}6a_{11} - 1922a_{13} + 24390a_{33} + 474a_{15} - 4820a_{35} + 592a_{55} = 82{,}7l,$$
$$-93{,}8a_{11} - 226a_{13} + 237a_{33} + 48100a_{15} - 2370a_{35} - 2015a_{55} = 120{,}0l,$$
$$74{,}3a_{11} - 515a_{13} - 2410a_{33} - 2370a_{15} + 78600a_{35} - 6420a_{55} = 52{,}5l,$$
$$58a_{11} + 372a_{13} + 592a_{33} - 4030a_{15} - 12840a_{35} + 158500a_{55} = 33{,}5l.$$

Так как система содержит много членов, мы предпочитаем применять последовательные приближения непосредственно к ней, не решая

ее относительно диагональных членов. За исходные значения для a_{11}, a_{13}, a_{33} примем найденные при $n = m = 3$ значения и для a_{15}, a_{35}, a_{55} нулевые. Подставляя в последние три уравнения системы найденные первые приближения для коэфициентов:

$$a_{11} = 0{,}6727l; \quad a_{13} = 0{,}0307l; \quad a_{33} = 0{,}0031l,$$

получим:

$$a_{15} = 0{,}0039l; \quad a_{35} = 0{,}0003l; \quad a_{55} = 0{,}0001l.$$

Подставляя найденные значения a_{ik} во все члены системы кроме диагональных, получим вторые приближения для a_{jk}, которые будут уже достаточно точными, и дальнейшие вычисления не внесут существенных изменений в них:

$$a_{11} = 0{,}6740l; \quad a_{13} = 0{,}0308l; \quad a_{33} = 0{,}0032l;$$
$$a_{15} = 0{,}0040l; \quad a_{35} = 0{,}0004l; \quad a_{55} = 0{,}0000l.$$

Само собой разумеется, при вычислении последовательных приближений нет нужды находить сами приближения, достаточно ограничиться более простой задачей нахождения последовательных поправок для них.

п° 3. Приложение к приближенному нахождению собственных функций и собственных чисел. Мы поясним идею приложения метода Ритца к приближенному построению собственных чисел и функций на примере уравнения (34) п° 3 при предельном условии $u|_L = 0$.

Возьмем произвольную систему „координатных“ функций.

$$\Psi_1(x, y), \quad \Psi_2(x, y), \ldots \tag{7}$$

удовлетворяющих контурным условиям задачи $\Psi_n|_L = 0$. Мы будем предполагать их линейно независимыми. Составим линейную комбинацию U с произвольными коэфициентами.

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \Psi_k. \tag{8}$$

Рассмотрим два интеграла, входящие в проблему вариационного исчисления, эквивалентную нашей задаче:

$$J(u) = D(u) \quad \text{и} \quad G(u) \text{ [см. п°п° 35 и 36 § 1]} \tag{9}$$

и внесем в них вместо u комбинацию U_n. В результате подстановки и выполнения всех квадратур, получим две квадратичные формы постоянных

$$A = \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} a_k a_j, \quad a_{kj} = a_{jk} =$$
$$= \int_B \int [a\Psi_{kx}\Psi_{jx} + b(\Psi_{kx}\Psi_{jy} + \Psi_{ky}\Psi_{jx}) + c\Psi_{ky}\Psi_{jy} + q\Psi_k\Psi_j]\,dxdy, \tag{10}$$

$$\Gamma = \sum_{k,j=1}^{n} \gamma_{kj} a_k a_j; \quad \gamma_{kj} = \int_B \int \rho\Psi_k\Psi_j\,dxdy. \tag{11}$$

Будем искать теперь такую систему коэфициентов, которая давала бы минимальное значение A при условии $\Gamma = 1$. Мы имеем дело с обычной задачей на связанный экстремум функции. Следуя правилу Лагранжа, образуем новую функцию $A - \lambda\Gamma = \Delta$ и для нее запишем условия свободного минимума:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_r} = 2\sum_{k=1}^{n}(a_{rk} - \lambda\gamma_{rk})\,a_k = 0. \qquad [r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n] \tag{12}$$

Полученные равенства дают систему n линейных уравнений для a_k. В виду их однородности, отличное от нулевого решение существует лишь только в том случае, если определитель системы равен нулю.

Поэтому число λ должно быть таким, чтобы было соблюдено равенство:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda\gamma_{11}, & \ldots, & a_{1n} - \lambda\gamma_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} - \lambda\gamma_{n1}, & \ldots, & a_{nn} - \lambda\gamma_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

Последнее представляет собой алгебраическое уравнение степени n относительно λ. [1]

Можно показать, что, в виду симметрии определителя, все корни его будут вещественными. Обозначим их через $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$; среди них могут оказаться равные. Найденные значения λ могут быть приближенно приняты за первые n собственных чисел задачи. Возьмем какое-нибудь одно из них: λ_m. Подставив его в (12) и решив полученную систему относительно a_k, найдем их с одним или несколькими произволами в зависимости от ранга системы. Заметим, что если корень простой, то мы будем иметь единственное решение, определенное с точностью до произвольного множителя. Если же λ_m — кратный корень, то таких решений, определенных с точностью до множителя и линейно между собой независимых, может оказаться несколько. Тогда мы рассмотрим одно из них. Обозначим образующие его значения коэфициентов a_k через $a_k^{(m)}$. Внося их в (8), найдем функцию

$$u_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(m)}\Psi_k,$$

[1] В том, что это уравнение будет действительно степени n, а не ниже, можно убедиться следующим способом. Если развернуть определитель по степеням λ, то без затруднений можно видеть, что коэфициентом при $(-\lambda)^n$ будет определитель, составленный из γ_{kj}. Но это есть не что иное, как определитель Грамма, составленный для функций $\sqrt{\rho}\Psi_k$, и равенство его нулю есть, как известно, необходимое и достаточное условие линейной зависимости этих функций, чего не может быть, так как из зависимости $\sqrt{\rho}\Psi_k$ прямо следует линейная зависимость Ψ_k; последнее же противоречит предположению.

которую можно принять за приближенное выражение для m-ой собственной функции.

Постоянный множитель с точностью, до которого она найдена, мы определим из условия нормированности. Проверим теперь ортогональность функций $u_n^{(m)}$. Возьмем две из них:

$$u_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(p)}\Psi_k \quad \text{и} \quad u_n^{(q)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(q)}\Psi_k.$$

$$G(u_n^{(p)},\ u_n^{(q)}) = \sum_{k,\,j=1}^{n} \gamma_{kj}a_k^{(p)}a_j^{(q)}.$$

Напишем уравнения (12) для коэфициентов $a_k^{(p)}$:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{jk} - \lambda_p\gamma_{jk})\,a_k^{(p)} = 0.$$

Умножив их соответственно на $a_j^{(q)}$ и сложив, получим:

$$\sum_{k,\,j=1}^{n} a_{jk}a_k^{(p)}a_j^{(q)} - \lambda_p\sum_{k,\,j=1}^{n}\gamma_{jk}a_k^{(p)}a_j^{(q)} = 0.$$

Коэфициентом при λ_p стоит интересующий нас интеграл $G(u_n^{(p)}, u_n^{(q)})$. Аналогичное равенство мы получим, беря уравнения для $a_j^{(q)}$, умножая их на $a_k^{(p)}$ и складывая. Первый член при этом сохраняется; второй же член изменится только в том смысле, что вместо λ_p будет стоять λ_q. Поэтому должно быть $\lambda_p G(u_n^{(p)}, u_n^{(q)}) = \lambda_q G(u_n^{(p)}, u_n^{(q)})$, и если мы имеем различные корни, то сейчас же следует $G(u_n^{(p)}, u_n^{(q)}) = 0$. Таким образом функции $u_n^{(p)}$ и $u_n^{(q)}$, соответствующие двум разным корням (13) — ортогональны. Когда же корни одинаковые, то добиться выполнения условия ортогональности можно простым преобразованием, обычным в таких случаях.

Пример I. Рассмотрим собственные функции однородной мембраны, имеющей форму круга радиуса a. Будем иметь в виду тот простейший случай, когда деформированная поверхность мембраны симметрична относительно центра круга и концы ее закреплены. В этом случае прогибы зависят только от радиального расстояния r от центра. Положим

$$\Psi_1 = \cos\frac{2\pi}{a}r, \quad \Psi_2 = \cos\frac{3\pi}{2a}r, \quad \Psi_3 = \cos\frac{5\pi}{2a}r, \quad \ldots$$

Функционалы $I(u)$ и $G(u)$ здесь имеют вид:

$$I(u) = \int_B\int (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy, \quad G(u) = \int_B\int u^2 dxdy$$

или, если преобразовать интегралы к полярной системе координат и воспользоваться независимостью u от полярного угла φ:

$$I(u)=2\pi\int_0^a u_r^2 r\,dr,\quad G(u)=2\pi\int_0^a u^2 r\,dr.$$

Ограничимся сейчас первым приближением, положив

$$U_1=a_1\cos\frac{\pi}{2a}r,$$

$$I(U_1)=\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\right)a_1^2\qquad G(U_1)=\pi a^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\right)a_1^2.$$

Уравнение для определения λ, если отбросить множитель $2\pi a_1$, будет

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\right)-\lambda a^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\right)=0,$$

откуда следует:

$$\lambda_1=\frac{5{,}832}{a^2}.$$

Точное значение λ есть

$$\lambda=\frac{5{,}779}{a^2}$$

и ошибка первого приближения меньше одного процента.

Возьмем теперь второе приближение:

$$U_2=a_1\cos\frac{\pi}{2a}r+a_2\cos\frac{3\pi}{2a}r.$$

Уравнения (12) для коэфициентов a_1 и a_2 и числа λ будут:

$$(1{,}7337-0{,}29736\lambda a^2)\,a_1+(0{,}20264\lambda a^2-1{,}5)\,a_2=0,$$
$$(0{,}20264\lambda a^2-1{,}5)\,a_1+(11{,}603-0{,}47748\lambda a^2)\,a_2=0,$$
$$\begin{vmatrix}1{,}7337-0{,}29736\lambda a^2; & 0{,}20264\lambda a^2-1{,}5\\ 0{,}20264\lambda a^2-1{,}5; & 11{,}603-0{,}47748\lambda a^2\end{vmatrix}=0$$

или

$$0{,}14198\lambda^2a^4-4{,}2781\lambda a^2+20{,}116=0.$$

Меньший корень уравнения есть

$$\lambda_1=\frac{5{,}788}{a^2}.$$

Ошибка второго приближения к первому собственному числу будет следовательно меньше $0{,}16\%$.

Подстановка вместо λ_1 его значения в первое из уравнений дает:

$$0{,}035a_1-0{,}327a_2=0.$$

Можно поэтому положить

$$a_1=0{,}327C,\quad a_2=0{,}035C,$$

причем C должно быть определено из условия нормированности.

Пример II. Найдем основной тон колебания однородной пластинки, имеющей форму круга радиуса a с центром в начале координат, горизонтально заделанной по краю. Это равносильно разысканию первой собственной функции и первого собственного числа уравнения

$$\Delta\Delta u-\lambda u=0$$

при предельных условиях

$$u\Big|_{r=a}=\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a}=0.$$

Соответствующая вариационная задача есть

$$I(u)=\int_B\int(\Delta u)^2\,dx\,dy=\min$$

при условиях

$$G(u)=1\qquad u\Big|_{r=a}=\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a}=0.$$

В случае низшего тона форма колеблющейся пластинки симметрична относительно начала координат и u будет функцией одного лишь r. Преобразовав I и G к полярным координатам, получим, после интегрирования по полярному углу

$$I(u)=2\pi\int_0^a\left(\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 r\,dr,$$

$$G(u)=2\pi\int_0^a u^2 r\,dr.$$

Возьмем U_n в форме:

$$U_n=a_1\left(1-\frac{r}{a}\right)^2+a_2\left(1-\frac{r}{a}\right)^3+\ldots+a_n\left(1-\frac{r}{a}\right)^{n+1}$$

и ограничимся в наших вычислениях только двумя первыми членами:

$$I(U_2)=\frac{96}{9a^2}\left(a_1^2+\frac{3}{2}a_1a_2+\frac{9}{10}a_2^2\right),$$

$$G(U_2)=\frac{a^2}{10}\left(a_1^2+\frac{5}{3}a_1a_2+\frac{5}{7}a_2^2\right).$$

Уравнения (12) имеют вид:

$$a_1\left(\frac{192}{9}-\frac{\lambda a^4}{5}\right)+a_2\left(\frac{144}{9}-\frac{\lambda a^4}{6}\right)=0,$$

$$a_1\left(\frac{144}{9}-\frac{\lambda a^4}{6}\right)+a_2\left(\frac{96}{5}-\frac{\lambda a^4}{7}\right)=0.$$

Отсюда для λ следует уравнение:

$$(\lambda a^4)^2-\frac{204{,}48}{5}\lambda a^4+768\cdot 36\cdot 7=0,$$

меньший корень которого будет

$$\lambda=\frac{104{,}39}{a^4}.$$

Подставляя найденное значение λ в первое уравнение системы для a_1, a_2, найдем:

$$0{,}455a_1-1{,}398a_2=0,$$

$$a_2=0{,}395a_1,$$

$$u_2=a_1\left[\left(1-\frac{r}{a}\right)^2+0{,}395\left(1-\frac{r}{a}\right)^3\right].$$

Пример III. Вскоре после выхода в свет основного мемуара Ритц опубликовал пример приложения своего метода к решению трудной задачи о разыскании собственных чисел и функций для колебания однородной пластинки со свободными границами. [1] Мы не будем приводить полностью его обстоятельных исследований, а ограничимся лишь той частью их, которая имеет значение для нашего порядка идей приближенного решения уравнений.

Пусть мы имеем дело с квадратной пластинкой со стороной 2. Выберем оси так, как указано на чертеже 14. Аналитически поставленная проблема сводится, если отбросить несущественные для нас постоянные множители, к нахождению функции, дающей наименьшее значение интегралу

$$I(u)=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left\{(\Delta u)^2-2(1-\nu)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)\right\}dx\,dy,$$

при условии:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}u^2\,dx\,dy=1.$$

Граничные значения допустимых функций и их нормальных производных — свободны. Мы имеем здесь частный случай поставленной нами выше задачи, о которой говорилось в конце п° 3 § 1.

[1] Ritz, Theorie der Thansversalschwingungen... Annalen der Physik, 4-te Folge, Bd. 28, 1909, стр. 737.

Подобно разобранному в п° 2 случаю пластинки с заделанными границами мы будем строить систему координатных функций $\psi_n(x, y)$ из собственных функций свободного стержня. Как известно, они удовлетворяют уравнению

$$\xi_n^{IV}-k_n\xi_n=0$$

и условиям:

$$\xi_n''=0,\quad \xi_n'''=0$$

на концах стержня. Кроме того, они удовлетворяют условиям ортогональности и всегда могут быть нормированы

$$\int u_m u_n\,dx=0\qquad \int u_n^2\,dx=1.$$

Интегралы взяты вдоль всей длины стержня. Чтобы сделать вычисления более симметричными, мы будем полагать концы стержня лежащими в точках $x=\pm 1$.

Тогда для собственных функций получаются следующие выражения, правильность которых легко проверяется:

Для четного m

$$\xi_m=\frac{\operatorname{ch}k_m\cos k_m x+\cos k_m\operatorname{ch}k_m x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2k_m+\cos^2k_m}},\qquad m=2,\ 4,\ \ldots$$

где k_m есть корень уравнения

$$\operatorname{tg}k+\operatorname{th}k=0.$$

Для нечетного m:

$$\xi_m=\frac{\operatorname{sh}k_m\sin k_m x+\sin k_m\operatorname{sh}k_m x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2k_m-\sin^2k_m}},\qquad m=3,\ 5,\ \ldots$$

где k_m есть корень уравнения:

$$\operatorname{tg}k-\operatorname{th}k=0.$$

Сюда должны быть присоединены еще две собственные функции, соответствующие случаю $k_0=k_1=0$

$$\xi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\xi_1(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,x.$$

Они отвечают движению стержня как целого без деформации.

При $m=2$ мы будем иметь основной тон с двумя узлами, при $m=3$ — первый обертон с тремя узлами и т. д.

Числа $k_2, k_4, \ldots$ весьма мало разнятся от $\frac{\pi m}{2}-\frac{\pi}{4}$; $k_2=2{,}3650$ и уже k_4 отличается от $\left(2-\frac{1}{4}\right)\pi$ только в шестом десятичном знаке и т. д.

Числа k_3, k_5, ... столь мало разнятся от $\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, что с точностью до пяти десятичных знаков можно считать:

$$k_3 = 3{,}92660, \quad k_5 = \left(2+\frac{1}{4}\right)\pi, \ldots$$

оставим теперь функции ψ:

$$\psi_{kj} = \xi_k(x)\,\xi_j(y)$$

$$U_s = \sum_{n,\,m=0}^{s} a_{m,\,n}\,\xi_m(x)\,\xi_n(y),$$

$$I(U_s) - \lambda G(U_s) =$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left\{(\Delta U_s)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U_s}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] - \lambda U_s^2\right\} dx\,dy.$$

Вычисление этого интеграла ведет к нахождению величин:

$$\omega_{mn} = \int_{-1}^{+1} \xi_m''\xi_n\,dx,$$

$$\omega_{0n} = \omega_{1n} = 0.$$

$$\Delta_{mn} = \Delta_{nm} = \int_{-1}^{+1} \xi_m'\xi_n'\,dx,$$

$$\Delta_{0n} = \Delta_{n0} = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \xi_m''\xi_n''\,dx = 0 \quad m \neq n; \qquad \int_{-1}^{+1} \xi_m''^2\,dx = k_m^4.$$

Точное выражение их через числа k_m сравнительно сложно, но если ограничиться четырьмя верными знаками, то формулы для них могут быть весьма сильно упрощены и приведены к виду, практическое использование которого не представляет никаких затруднений.

Так как для нас разбираемая задача имеет лишь иллюстративное значение, мы не будем приводить результаты вычислений Ритца и отсылаем читателя, желающего ознакомиться с ними, к упомянутой выше его работе. Ниже мы просто воспользуемся найденными Ритцем численными данными.

В введенных обозначениях коэфициентом при $a^2{}_{mn}$ в $I(U_s) - \lambda G(U_s)$ будет

$$k_m^4 + k_n^4 + 2\mu\omega_{mm}\omega_{nn} + 2(1-\nu)\Delta_{mm}\Delta_{nn} - \lambda = \alpha_{mn}^{(mn)} - \lambda$$

и коэфициентом при $a_{mm}a_{pq}$

$$\nu[\omega_{mp}\omega_{qn} + \omega_{pm}\omega_{nq}] + 2(1-\nu)\Delta_{mp}\Delta_{nq} = \alpha_{mn}^{(pq)}.$$

Система (12) для определения чисел a_{mn} имеет вид:

$$[\alpha_{00}^{(00)} - \lambda]\,a_{00} + \alpha_{01}^{(00)}a_{01} + \alpha_{10}^{(00)}a_{10} + \ldots + \alpha_{ss}^{(00)}a_{ss} = 0,$$

$$\alpha_{00}^{(01)}a_{00} + [\alpha_{01}^{(01)} - \lambda]\,a_{01} + \alpha_{10}^{(01)}a_{10} + \ldots + \alpha_{ss}^{(01)}a_{ss} = 0.$$

. . . . . .

$$\alpha_{00}^{(ss)}a_{00} + \alpha_{01}^{(ss)}a_{01} + \alpha_{10}^{(ss)}a_{10} + \ldots + [\alpha_{ss}^{(ss)} - \lambda]\,a_{ss} = 0.$$

Она может быть значительно упрощена, если воспользоваться симметрией задачи.

Будем, например, искать решения, симметричные относительно диагоналей координатных углов, т. е. остающиеся неизменными при замене x на y, и антисимметричные относительно координатных осей, т. е. нечетные относительно x и y. Среди них будет находиться решение, соответствующее основному тону.

Согласно этому мы в U_s опускаем все члены, содержащие $\xi_m(x)\,\xi_n(y)$ с четными нумерами, и a_{mn} полагаем равными a_{nm}.

Ограничимся членами до ξ_5, полагая $s=5$, и для ν выберем значение $\nu = 0{,}225$ (стекло). Обозначая ради простоты $\xi_n(y) = \eta_n$, имеем:

$$U_5 = A_0\xi_1\eta_1 + A_1(\xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1) + A_2\xi_3\eta_3 + A_3(\xi_1\eta_5 + \xi_5\eta_1) + A_4(\xi_3\eta_5 + \xi_5\eta_3) + A_5\xi_5\eta_5.$$

Система уравнений для A_k, если внести туда численные значения $\alpha_{mn}^{(pq)}$ и ν, будет:

$$(13{,}95-\lambda)A_0 - 32{,}08A_1 + 18{,}6A_2 + 32{,}08A_3 - 37{,}20A_4 + 18{,}60A_5 = 0,$$

$$-16{,}04A_0 + (411{,}8-\lambda)A_1 - 120{,}0A_2 - 133{,}6A_3 + 166{,}8A_4 + 140A_5 = 0,$$

$$18{,}60A_0 - 240{,}0A_1 + (1686-\lambda)A_2 - 218{,}0A_3 - 1134A_4 + 330A_5 = 0,$$

$$16{,}04A_0 - 133{,}6A_1 + 109{,}0A_2 + (2945-\lambda)A_3 - 424A_4 + 179A_5 = 0,$$

$$-18{,}6A_0 + 166{,}8A_1 - 567A_2 - 424A_3 + (6303-\lambda)A_4 - 1437A_5 = 0,$$

$$18{,}6A_0 + 280A_1 + 330A_2 + 358A_3 - 2874A_4 + (13\,674-\lambda)A_5 = 0.$$

Итти обычным путем в решении этой системы крайне затруднительно, ибо уже уравнение для λ, получаемое от приравнивания нулю определителя системы, будет вековым уравнением 6-ой степени, и действительное развертывание его, даже если прибегнуть к методу А. Н. Крылова, о котором будем говорить ниже, заняло бы очень много времени. Однако одна особенность системы позволяет чрезвычайно упростить вычисления. Как и в примере, приведенном в предыдущем п°, здесь коэфициенты диагональных членов будут, вообще говоря, доминирующими. Если бы система действительно привелась к диагональным членам, то для λ мы получили бы следующие корни: $\lambda_1 = 13{,}95$, $\lambda_2 = 411{,}8$, $\lambda_3 = 1686\ldots$ Для первого из них остается произвольным A_0, и остальные A_k равны нулю, для второго остается произвольным

A_1 и т. д. Так как постоянный множитель не имеет для нас сейчас никакого значения, то при определении основного тона мы можем считать $A_0 = 1$.

Итак, примем за исходные значения $\lambda_0 = 13{,}95$, $A_1 = A_2 = \ldots = 0$ и подставим эти значения во все члены кроме диагональных пяти последних уравнений. Из них найдем первые приближения для A_k:

$$A_1 = \frac{16{,}04}{411{,}8 - 13{,}95} = 0{,}0403, \quad A_2 = -\frac{18{,}60}{1686 - 13{,}95} = -0{,}0112,$$

$$A_3 = -\frac{16{,}04}{2945 - 13{,}95} = -0{,}0055, \quad A_4 = \frac{18{,}6}{6303 - 13{,}95} = 0{,}0029,$$

$$A_5 = \frac{18{,}6}{13\,674 - 13{,}95} = 0{,}0014.$$

Эти A_k подставляем в первое уравнение и из него находим первую поправку $\delta\lambda_1$ для λ_1:

$$\delta\lambda_1 = -32{,}08A_1 + 18{,}6A_2 + 32{,}08A_3 - 37{,}20A_4 + 18{,}60A_5 = -1{,}17.$$

Поэтому первым приближением для λ_1 будет:

$$\lambda_1 = 13{,}95 - 1{,}17 = 12{,}78.$$

После этого повторяем круг вычислений: подставляем новое значение λ_1 в последние пять уравнений системы и вносим во все члены, кроме диагональных, первые приближения для A_k; решая результат относительно A_1, A_2, ... получаем вторые приближения и т. д.

Взятые нами исходные значения были определены очень грубо. Выгоднее путем некоторого усложнения процесса вычислений найти более точно исходные значения с тем, чтобы операции, которые нужно проделать для полной системы, были бы малочисленнее, чем при первоначальном грубом приближении. Рассмотрим, например, для этого систему:

$$(13{,}95 - \lambda)A_0 - 32{,}08A_1 = 0,$$
$$-16{,}04A_0 + (411{,}8 - \lambda)A_1 = 0$$

и решаем ее указанным путем. Полагая $A_0 = 1$, $\lambda_1 = 13{,}95$, имеем

$$A_1 = 0{,}0403, \quad \delta\lambda_1 = -1{,}29.$$

Исправленное λ_1 есть $\lambda_1 = 13{,}95 - 1{,}29 = 12{,}66$.

Второе приближение для A_1 будет

$$A_1 = \frac{16{,}04}{411{,}8 - 12{,}66} = 0{,}0402.$$

Новая поправка для λ_1:

$$\delta\lambda_1 = -32{,}08 \cdot 0{,}402 = -1{,}29,$$
$$\lambda_1 = 13{,}95 - 1{,}29 = 12{,}66.$$

Внесем полученные λ_1 и A_1 в полную систему и найдем указанным путем $A_2 \ldots A_5$.

$$A_2 = -0{,}0053, \quad A_3 = -0{,}0036, \quad A_4 = 0{,}0019, \quad A_5 = -0{,}0022.$$

Полученную систему значений для λ_1, A_1, ..., A_5 принимаем за исходную и дальше вычисления последовательных приближений проводим поясненным выше способом.

После нескольких шагов будем иметь следующие значения искомых величин:

$$A_1 = 0{,}0394; \quad A_2 = -0{,}0040; \quad A_3 = -0{,}0034$$
$$A_4 = 0{,}0011, \quad A_5 = -0{,}0019.$$
$$\lambda = 12{,}43.$$

Следовательно собственная функция, отвечающая основному тону, приближенно будет равна:

$$u = \xi_1\eta_{11} + 0{,}0394\,(\xi_1\eta_{13} + \eta_{13}\xi_1) - 0{,}0040\xi_3\eta_{13} - 0{,}0034\,(\xi_1\eta_{15} + \xi_5\eta_{11}) +$$
$$+ 0{,}0011\,(\xi_3\eta_{15} + \xi_5\eta_{13}) - 0{,}0019\xi_5\eta_{15}.$$

Аналогично вычисляются и все следующие собственные функции и числа.

п° 4. Замечание о вычислении собственных чисел. Собственные числа той или иной проблемы нами приближенно определялись как корни уравнения типа (13) п° 3. Каждый член определителя, стоящего в левой части, будет, вообще говоря, двухчленом. При этом диагональные члены будут наверное двухчленами, ибо $\alpha_{kk} \neq 0$ и $\gamma_{kk} \neq 0$. Даже для самого благоприятного случая, когда система координатных функций будет ортогональна по отношению операторов D или G, т. е. когда либо $\alpha_{kj} = 0$, либо $\gamma_{kj} = 0$ при $k \neq j$, определитель будет иметь вид характеристического определителя.

Как известно, определитель n-го порядка содержит $n!$ членов, и если даже сохранить двухчленные множители, разложение его становится затруднительным уже начиная с $n = 4$. Если же раскрыть все скобки, то число членов возрастет во много раз. Поэтому при раскрытии левой части нашего уравнения приходится прибегать к таким методам, которые не связаны с непосредственным вычислением определителей.

Внимание исследователей до сих пор привлекал наиболее простой случай уравнения (13) — когда λ входит только в диагональные члены. Наибольшего успеха достиг в отношении простоты составления исследуемого уравнения акад. А. Н. Крылов в своей интересной статье „О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем", опубликованной в Известиях Академии наук СССР, ОМЕН, VII серия, № 4, 1931 г.

Мы изложим его способ применительно к нашему случаю.

Рассмотрим следующую систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэфициентами:

$$(*)\quad \begin{cases} \gamma_{11}q_1' + \gamma_{12}q_2' + \ldots + \gamma_{1n}q_n' = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \ldots + \alpha_{1n}q_n, \\ \gamma_{21}q_1' + \gamma_{22}q_2' + \ldots + \gamma_{2n}q_n' = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \ldots + \alpha_{2n}q_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{n1}q_1' + \gamma_{n2}q_2' + \ldots + \gamma_{nn}q_n' = \alpha_{n1}q_1 + \alpha_{n2}q_2 + \ldots + \alpha_{nn}q_n. \end{cases}$$

Обычно ищут частное решение ее в виде:

$$q_1 = C_1 e^{\lambda t},\quad q_2 = C_2 e^{\lambda t},\quad \ldots,\quad q_n = C_n e^{\lambda t},$$

где C_k — некоторые постоянные. Подставляя эти выражения в систему и сокращая на $e^{\lambda t}$, получим n однородных уравнений для чисел C:

$$(\alpha_{11} - \lambda\gamma_{11})C_1 + (\alpha_{12} - \lambda\gamma_{12})C_2 + \ldots + (\alpha_{1n} - \lambda\gamma_{nn})C_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\alpha_{n1} - \lambda\gamma_{n1})C_1 + (\alpha_{12} - \lambda\gamma_{n2})C_2 + \ldots + (\alpha_{nn} - \lambda\gamma_{nn})C_n = 0,$$

совершенно подобных уравнениям (12) для a_k. Равенство (13) будет условием существования у этой системы ненулевого решения.

Идея академика А. Н. Крылова состоит в том, чтобы составить одно дифференциальное уравнение n-го порядка, эквивалентное данной системе, для которого характеристическое уравнение для определения значений λ выписывается немедленно. Достигнуть этого можно многими способами, но наиболее простым является, повидимому, следующий.

Введем вместо функций q_k новые функции z_k при помощи равенств:

$$(**)\quad \begin{cases} z_1 = \gamma_{11}q_1 + \ldots + \gamma_{1n}q_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = \gamma_{n1}q_1 + \ldots + \lambda_{nn}q_n. \end{cases}$$

Решим эти уравнения относительно q_k:[1]

$$(***)\quad \begin{cases} q_1 = \delta_{11}z_1 + \ldots + \delta_{1n}z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n = \delta_{n1}z_1 + \ldots + \delta_{nn}z_n. \end{cases}$$

Все вычисления, связанные с решением, могут быть проведены по хорошо известной и привычной для вычислительных работников схеме Гаусса.

Диференциальные уравнения (*) принимают форму

$$(****)\quad \begin{cases} z_1' = \alpha_{11}q_1 + \ldots + \alpha_{1n}q_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n' = \alpha_{n1}q_1 + \ldots + \alpha_{nn}q_n. \end{cases}$$

[1] Мы имели случай отметить выше, что определитель $|\gamma_{kj}| \neq 0$ и решение, следовательно, возможно.

Дальше можно итти двумя путями: либо подставить сюда значения (***) для q_k и получить нормальную систему для z_k, либо наоборот продиференцировать равенства (***) и внести в них вместо z_k их значения. Изберем, например, первый путь и образуем уравнения для z_k:

$$(A)\quad \begin{cases} z_1' = \varepsilon_{11}z_1 + \ldots + \varepsilon_{1n}z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n' = \varepsilon_{n1}z_1 + \ldots + \varepsilon_{nn}z_n. \end{cases}$$

Возьмем теперь какое-либо из уравнений, например первое, и продиференцируем его по t:

$$z_1'' = \varepsilon_{11}z_1' + \ldots + \varepsilon_{1n}z_n'.$$

Заменяя в нем $z_1', \ldots, z_n'$ их значениями из (A), получим выражение вида

$$z_1'' = \varepsilon_{11}'z_1 + \ldots + \varepsilon_{1n}'z_n$$

т. д.

После n шагов мы придем к равенствам:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1, \\ z_1' &= \varepsilon_{11}z_1 + \varepsilon_{12}z_2 + \ldots + \varepsilon_{1n}z_n, \\ z_1'' &= \varepsilon_{11}'z_1 + \varepsilon_{12}'z_2 + \ldots + \varepsilon_{1n}'z_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1^{(n)} &= \varepsilon_{11}^{(n-1)}z_1 + \varepsilon_{12}^{(n-1)}z_2 + \ldots + \varepsilon_{1n}^{(n-1)}z_n, \end{aligned}$$

которые можно рассматривать как систему уравнений для $1, z_1, \ldots, z_n$. Условием существования ненулевого решения будет выполнение для z_1 обыкновенного диференциального уравнения порядка n:

$$\begin{vmatrix} z_1, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ z_1', & \varepsilon_{11}, & \varepsilon_{12}, & \ldots, & \varepsilon_{1n} \\ z_1'', & \varepsilon_{11}', & \varepsilon_{12}', & \ldots, & \varepsilon_{1n}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n)}, & \varepsilon_{11}^{(n-1)}, & \varepsilon_{12}^{(n-1)}, & \ldots, & \varepsilon_{1n}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

Ищем решение в форме $z_1 = Ce^{\lambda t}$.

После подстановки и сокращения получаем для λ уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ \lambda, & \varepsilon_{11}, & \varepsilon_{12}, & \ldots, & \varepsilon_{1n} \\ \lambda^2, & \varepsilon_{11}', & \varepsilon_{12}', & \ldots, & \varepsilon_{1n}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^n, & \varepsilon_{11}^{(n-1)}, & \varepsilon_{12}^{(n-1)}, & \ldots, & \varepsilon_{1n}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

Отнимая от второго столбца первый, приводим его к виду

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11}-\lambda, & \varepsilon_{12}, & \dots, & \varepsilon_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{11}^{(n-1)}-\lambda^n, & \varepsilon_{12}^{(n-1)}, & \dots, & \varepsilon_{1n}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Это новое характеристическое уравнение, вообще говоря, совпадает со старым (13), [1] но имеет сравнительно с ним то драгоценное преимущество, что параметр λ и все его степени сосредоточены только в первом столбце. Поэтому, если разложить определитель по элементам первого столбца, все будет сведено сразу же к вычислению определителя:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11}, & \dots, & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{11}^{(n-1)}, & \dots, & \varepsilon_{1n}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

и его миноров для элементов первого столбца. Все они будут численными и нахождение их не представляет затруднений.

§ 3. Приведение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

n° 1. Идея метода и его приложение к интегрированию уравнений. Излагаемый способ выбора минимизирующей последовательности предложен Л. В. Канторовичем[2] и по своей идее состоит в том, чтобы задачу о минимуме функционала, зависящего от функции двух аргументов, свести к задаче о минимуме функционала, зависящего от нескольких функций одной переменной.

Мы выясним его содержание на задаче о минимуме функционала

$$(1) \qquad I(u) = \int\int_B (au_x^2 + 2bu_xu_y + cu_y^2 + qu^2 + 2fu)\,dx\,dy$$

при условии

$$(2) \qquad u|_L = \varphi(s).$$

Выберем в промежутке изменения одного из аргументов функции $u(x, y)$, например y, ряд значений:

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

и с помощью интерполирования построим функцию двух переменных

$$(3) \qquad u(x, y; f_1, f_2, \dots, f_n),$$

которая обращалась бы при $y = y_1, y = y_2, \dots y = y_n$ соответственно в $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ и удовлетворила бы граничным условиям.

Функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ здесь произвольны. Выберем теперь их так, чтобы соответствующее значение $I[u(x, y; f_1, f_2, \dots, f_n)]$ было бы минимальным.

Проследим более подробно построение функции u. Разобьем область B прямыми, параллельными оси x, на k частей так, чтобы каждая из них была ограничена двумя кривыми вида $y = F_1(x)$ и $y = F_2(x)$ и, может быть, еще участками вертикальных прямых. Кроме того будем считать, что контур каждой из этих частей пересекается прямыми, параллельными оси x, только в двух точках. На чертеже 16 указано такого рода разбиение для кольца между двумя окружностями. Рассмотрим какую-



Рис. 16.

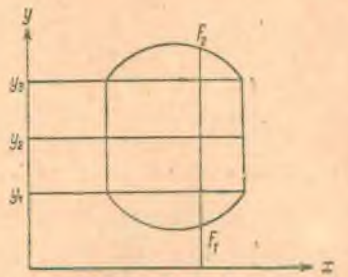


Рис. 17.

нибудь из этих частей. Пусть она лежит между y_{j-1} и y_j. Вставим между этими числами m промежуточных чисел

$$y_{j-1} = y_{j1} < y_{j2} < \dots < y_{jm} = y_j$$

и проведем во взятой части области прямые $y = y_{j,i}$.

На каждой из проведенных прямых зададим произвольную функцию $f_{ji}(x)$ под условием, чтобы значения ее на границах прямой совпадали бы со значениями $\varphi(s)$ в точках пересечения прямой с контуром L.

Пользуясь одним из правил интерполирования, строим функцию $u_n(x, y; f_1, f_2, \dots, f_n)$, подчиненную требованиям:

1) u_n непрерывна вместе с частными производными первого порядка в B и на L;

2) на каждой прямой $y = y_{ji}$ совпадает с f_{ji};

3) на контуре L, за исключением может быть участков вертикальных прямых, u_n принимает заданные значения.

Наиболее естественным будет здесь воспользоваться параболическим интерполированием по y.

Поясним эту мысль примером. Пусть взятая нами область имеет вид, изображенный на рис. 17. Уравнение верхней части контура области есть $y = F_1(x)$ и нижней $y = F_2(x)$. Предельные значения u на этих частях контура обозначим соответственно

$$u|_{L_1} = \varphi_1(x), \quad u|_{L_2} = \varphi_2(x).$$

---

[1] Для более подробного исследования уравнения (13) мы отсылаем читателя к работам акад. Н. Н. Лузина „О методе акад. А. Н. Крылова составления векового уравнения" и „О некоторых свойствах перемещающего множителя в методе акад. А. Н. Крылова", Известия Академии наук СССР, № 7, 1931 г. №№ 5, 6, 8, 1932 г., и Н. Н. Холодовского, „К теории общего случая преобразования векового уравнения методом академика А. Н. Крылова", Изв. Акад. наук № 8, 1932 г.

[2] См. Л. В. Канторович, Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла, Известия Академии наук СССР, ОМЕН, № 5, 1933 г.

Допустим, что мы провели три прямых $y=y_1$, $y=y_2$, $y=y_3$. При интерполировании по y мы должны будем построить такой полином от y, коэфициенты коего суть функции от x и который принимал бы на прямых $y=y_1$, $y=y_2$, $y=y_3$ значения f_1, f_2, f_3, а на кривых $y=F_1$ и $y=F_2$ значения φ_1 и φ_2.

Воспользовавшись формулой Лагранжа, получим:

$$u_3(x, y; f_1, f_2, f_3)=\frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-F_2)}{(F_1-y_1)(F_1-y_2)(F_1-y_3)(F_1-F_2)}\varphi_1+$$

$$+\frac{(y-F_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-F_2)}{(y_1-F_1)(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_1-F_2)}f_1+\ldots+$$

$$+\frac{(y-F_1)(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(F_2-F_1)(F_2-y_1)(F_2-y_2)(F_2-y_3)}\varphi_2.$$

В правую часть входят члены, не зависящие от f_k и происходящие от контурных условий; коэфициенты же при f_k, вообще говоря, зависят не только от y, но и от x через F_1 и F_2.

Перенумеруем теперь функции f_{jl} подряд:

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x).$$

u_n выражается через $f_k(x)$ формулой вида:

$$u_n(x, y; f_1, \ldots, f_n)=\sum_{s=1}^{n}\varphi_s(x, y)f_s(x)+\varphi_0(x, y), \tag{4}$$

где $\varphi_s(x, y)$ — известные функции переменных x и y.

Подставляя это выражение в интеграл $I(u)$ и производя интегрирование по y, получим выражение вида:

$$I(u_n)=\int_\alpha^\beta\Big[\sum_{s,\,z=1}^{n}(\omega_{sz}^{(1)}f_s'f_z'+2\omega_{sz}^{(2)}f_s'f_z+\omega_{sz}^{(3)}f_sf_z)+$$

$$+2\sum_{s=1}^{n}(\omega_s^{(1)}f_s'+\omega_s^{(2)}f_s)+\Phi\Big]\,dx, \tag{5}$$

причем $\omega_{sz}^{(0)}$, ω_s и Φ суть известные функции от x. Подбирая теперь функции f_1, f_2, ..., так, чтобы $I(u_n)$ было минимальным, мы получим для них систему уравнений Эйлера вида: [1]

$$\frac{d}{dx}\Big[\sum_{z=1}^{n}(\omega_{sz}^{(1)}f_z'+\omega_{sz}^{(2)}f_z)\Big]-$$

$$-\sum_{z=1}^{n}(\omega_{sz}^{(2)}f_z'+\omega_{sz}^{(3)}f_z)=X_s, \qquad s=1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

из которой и должны их определить, пользуясь тем обстоятельством, что f_s на границах соответствующей ей отрезка прямой $y=y_s$ должна иметь заданные значения, равные значениям $\varphi(s)$ в соответствующих точках.

Найдя $f_s(x)$ и внося их выражения в (4), определим $u_n(x, y)$.

Результат, как видно из предыдущих рассуждений, определяется двумя фактами: выбором отрезков прямых $y=y_s$, на которых строятся $f_s(x)$, и избранным при построении функции u_n законом интерполяции по y. Чтобы быть уверенным в сходимости процесса, т. е. в пределе при $n\to\infty$ получить точное решение задачи, или, практически говоря, быть уверенным в возможности вычислить решение с любой наперед заданной точностью, необходимо брать достаточно полную систему упомянутых отрезков и такую интерполяцию, которая давала бы возможность подойти как угодно близко к любой допустимой функции.

Пример. Рассмотрим задачу о розыскании решения уравнения Пуассона $\Delta u=-1$, обращающегося в нуль на контуре прямоугольника со сторонами 1 и 2, параллельными координатным осям, и с центром в начале координат:

$$u=0 \text{ при } x=\pm 1,\ y=\pm 0{,}5.$$

Здесь

$$I(u)=\int_{-1}^{+1}\int_{-0{,}5}^{+0{,}5}[u_x^2+u_y^2-2u]\,dxdy.$$

---

[1] В любом из курсов вариационного исчисления можно найти доказательство следующего предложения: система функций $y_1(x)$ $y_2(x)$,... дающая минимальное (максимальное) значение интегралу

$$\int_\beta^\alpha F(x, y_1, y_2, \ldots, y_1', y_2', \ldots)\,dx,$$

по отношению всех других систем функций, имеющих на границе промежутка интегрирования заданные значения, должна удовлетворять системе уравнений

$$\frac{d}{dx}F_{y'k}-F_{yk}=0. \qquad [k=1, 2, \ldots]$$

Если же она будет давать минимум (максимум) по отношению всяких систем с произвольными граничными значениями, то кроме написанных уравнений она должна удовлетворять еще и так называемым естественным граничным требованиям: $F_{y'k}=0$ на концах промежутка интегрирования.

Ограничиваемся проведением одной лишь прямой $y = y_1 = 0$:

$$u_1 = (1 - 4y^2)\, f(x),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = (1 - 4y^2)\, f', \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = -8yf.$$

Подставляя в $I(u)$, получим:

$$I(u_1) = \int_{-1}^{+1} \left[\frac{8}{15} f'^2 + \frac{16}{3} f^2 - \frac{4}{3} f \right] dx.$$

Уравнение Эйлера для f будет:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{16}{15} f'\right] - \frac{32}{3} f + \frac{4}{3} = 0$$

или

$$f'' - 10f + \frac{5}{4} = 0.$$

Решение, удовлетворяющее поставленным предельным условиям $f = 0$ при $x = \pm 1$, имеет вид:

$$f = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{10}\, x}{\operatorname{ch}\sqrt{10}}\right).$$

Подставляя полученное выражение в u_1, найдем:

$$u = \frac{1}{8}(1 - 4y^2)\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{10}\, x}{\operatorname{ch}\sqrt{10}}\right).$$

Точное решение, как известно, дается рядом:

$$u = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch}(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2 \operatorname{ch}(2n+1)\pi} \cos(2n+1)\pi y.$$

Сравним значения нашего приближенного и точного решений в центре $x = 0$, $y = 0$. Они соответственно будут: 0,11443 и 0,11387, так что погрешность равна 0,00056, что составляет меньше 0,5%.

Рассматриваемый метод будет наиболее удобным в том случае, когда коэфициенты a, b, c и q в функционале (1) будут постоянными, а контур L области B будет состоять из отрезков прямых, параллельных координатным осям.

Тогда, как легко видеть, коэфициенты φ_s в интерполяционной формуле (4) будут зависеть только от одного y. Система уравнений (6) для определения f_s будет иметь тогда постоянные коэфициенты или по крайней мере кусочно постоянные, т. е. такие, что весь интервал изменения x будет разбит на конечное число частей, для каждой из которых коэфициенты системы будут сохранять постоянное значение.

n° 2. Исправление результатов вычислений. Во многих случаях можно, если полученные результаты неудовлетворительны по своей точности, не увеличивая числа искомых функций $f_s(x)$, уточнить вычисления, вводя известного рода итерацию.

Будем иметь в виду тот случай, когда контур L состоит из прямых, параллельных осям координат. Как мы отметили в конце предыдущего n°, интерполирующая функция (4) может быть взята тогда в виде:

$$u_n(x, y, f, \ldots f_n) = \sum_{s=1}^{n} \varphi_s(y)\, f_s(x) + \varphi_0(x, y). \tag{7}$$

При интерполировании мы выберем вполне определенные $\varphi_s(y)$, и тогда $f_s(x)$ определим из системы (6) и предельных условий.

Оставляя в (7) $\varphi_s(y)$ неопределенными, внесем туда найденные значения для $f_s(x)$ и затем $\varphi_s(y)$ найдем из условия минимальности интеграла (1). Для определения их получим систему дифференциальных уравнений, аналогичных (6). Вычисленные значения для $\varphi_s(y)$ вносим в (7) и получаем исправленное значение $u(x, y)$. Если оно неудовлетворительно в смысле точности, то мы вновь повторяем круг вычислений.

Следует отметить, однако, что эффективность подобного процесса постепенных исправлений не беспредельна, ибо мы в пределе, вообще говоря, не получим решения задачи, а только лишь приближение к нему такого рода, как будто бы мы пытались искать решение в виде (7), подбирая в этом выражении одновременно и $f_s(x)$ и $\varphi_s(x)$ из условия минимальности $I(u)$, т. е. применяя, по существу дела, к решению поставленной минимальной задачи метод разделения переменных.

Пример. В предыдущем n° мы рассматривали задачу об интегрировании уравнения $\Delta u = -1$ при условиях $u = 0$ для $x = \pm 1$ и $y = \pm 0{,}5$. Ограничиваясь первым приближением, мы брали

$$u_1 = \varphi(y)\, f(x).$$

Положив $\varphi(y) = 1 - 4y^2$, мы для $f(x)$ нашли там:

$$f(x) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{10}\, x}{\operatorname{ch}\sqrt{10}}\right).$$

Присоединяя, для упрощения письма, постоянный множитель $\frac{1}{8}$ к $\varphi(y)$, положим

$$u_1 = \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{10}\, x}{\operatorname{ch}\sqrt{10}}\right)\varphi(y),$$

и выберем $\varphi(y)$ из требования минимальности $I(u_1)$. Так как

$$\int_{-1}^{+1}\left(1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{10}\,x}{\operatorname{ch}\sqrt{10}}\right)dx=2\left(1-\frac{\operatorname{sh}\sqrt{10}}{\sqrt{10}\operatorname{ch}\sqrt{10}}\right)=1{,}3698,$$

$$\int_{-1}^{+1}\left[\left(1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{10}\,x}{\operatorname{ch}\sqrt{10}}\right)'\right]^2dx=$$

$$=\frac{10}{\operatorname{ch}^2\sqrt{10}}\left(\frac{\operatorname{ch}\sqrt{10}\operatorname{sh}\sqrt{1}}{\sqrt{10}}-1\right)=3{,}0795,$$

$$\int_{-1}^{+1}\left(1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{10}\,x}{\operatorname{ch}\sqrt{10}}\right)^2dx=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{ch}^2\sqrt{10}}\left(2\operatorname{ch}^2\sqrt{10}-\frac{4}{\sqrt{10}}\operatorname{ch}\sqrt{10}\operatorname{sh}\sqrt{10}+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sh}2\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}+1\right)=1{,}0618.$$

Для $I(u_1)$ получаем:

$$I(u_1)=\int_{-0{,}5}^{+0{,}5}(3{,}0795\varphi^2+1{,}0618\varphi'^2-2\cdot 1{,}3698\varphi)\,dy=\min$$

$$\varphi(\pm 0{,}5)=0.$$

Уравнение Эйлера для $\varphi(y)$ имеет вид:

$$1{,}0618\varphi''-3{,}0795\varphi=-1{,}3698;$$

искомое решение его, удовлетворяющее поставленным граничным требованиям, будет

$$\varphi(y)=0{,}44482\left(1-\frac{\operatorname{ch}1{,}705y}{\operatorname{ch}0{,}8525}\right),$$

$$u_1=0{,}44482\left(1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{10}\,x}{\operatorname{ch}\sqrt{10}}\right)\left(1-\frac{\operatorname{ch}1{,}705y}{\operatorname{ch}0{,}8525}\right).$$

Подставляя сюда $x=y=0$, находим для u_1 значение 0,11340, отличающееся от точного значения 0,11387 на 0,00047 и являющееся немного лучшим приближением, чем найденное раньше.

n° 3. Приложение к собственным числам и функциям. Мы выясним сущность вопроса на задаче о собственных числах и функциях для уравнения

$$(au_x+bu_y)_x+(bu_x+cu_y)_y+(\lambda\rho-q)u=0,$$

при условии

$$u\Big|_L=0.$$

Пусть, следуя методу, указанному в n° 1, мы построили интерполирующую функцию $u_n(x, y; f_1, \ldots, f_n)$ вида (4). Так как предельные значения для u будут нулевыми, свободный член в выражении (4) будет отсутствовать:

$$u_n(x, y; f_1, \ldots, f_n)=\sum_{s=1}^{n}\varphi_s(x, y)\,f_s(x). \tag{7}$$

Подставляя U_n вместо u в соответствующие задаче функционалы

$$I(u)=\int\int_B(au_x^2+2bu_xu_y+cu_y^2+qu^2)\,dxdy$$

и

$$G(u)=\int\int_B\rho u^2dxdy,$$

и производя интегрирование по y, найдем

$$I(u_n)=\int_\alpha^\beta\left[\sum_{s,\sigma}(\omega_{s,\sigma}{}^{(1)}f_s'f_\sigma'+2\omega_{s,\sigma}{}^{(2)}f_s'f_\sigma+\omega_{s,\sigma}{}^{(3)}f_sf_\sigma)\right]dx,$$

$$G(u_n)=\int_\alpha^\beta\sum_{s,\sigma}^{n}\omega_{s,\sigma}{}^{(4)}f_sf_\sigma dx.$$

Выбирая теперь $f_1, \ldots, f_n$ из условия $I(u_n)=\min$ при $G(u_n)=1$, получим для $f_1, \ldots, f_n$ однородную линейную систему уравнений второго порядка:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{\sigma=1}^{n}(\omega_{s,\sigma}{}^{(1)}f_\sigma'+\omega_{s,\sigma}{}^{(2)}f_\sigma)\right]+\sum_{\sigma=1}^{n}(\lambda\omega_{s,\sigma}{}^{(4)}f_\sigma-\omega_{s,\sigma}{}^{(2)}f_\sigma'-\omega_{\sigma,s}^{(3)}f_\sigma)=0. \tag{8}$$

Для составления общего решения ее, как известно, нужно найти $2n$ систем частных линейно-независимых решений $f_1^{(j)}, f_2^{(j)}, \ldots, f_n^{(j)}$ $(j=1, 2, \ldots, 2n)$. Общее решение системы тогда определится по формуле

$$f_s(x)=\sum_{j=1}^{2n}C^{(j)}f_s^{(j)}(x, \lambda) \tag{9}$$

и будет содержать $2n$ произвольных постоянных $C^{(j)}$. Функции $f_s^{(j)}(x, \lambda)$, входящие в состав общего решения, будут аналитическими функциями параметра λ, содержащегося линейно в коэфициентах системы.

Каждая из искомых $f_s(x)$ должна обращаться в нуль на концах того отрезка прямой $y=y_s$, построенного нами раньше в B, для которого она ищется.

Подставляя в (9) значения x, соответствующие концам этих отрезков и приравнивая результат нулю, мы получим систему $2n$ линейных однородных уравнений для $C^{(j)}$, коэфициентами в которой будут значения $f_k^{(j)}$ на концах отрезков. В виду однородности системы, определитель ее должен равняться нулю. Сравнение его с нулем приводит к некоторому, вообще говоря, трасцендентному уравнению для определения λ, корни которого можно принять за приближенные значения собственных чисел задачи.

Пример. Исследование колебания однородной закрепленной по краям прямоугольной мембраны со сторонами a и b приводит к разысканию собственных чисел и функций для уравнения $\Delta u = -\lambda u$ при условии $u = 0$ для $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

Мы будем искать группу тонов мембраны, не имеющих узловых линий, параллельных оси x.

Проведем одну прямую $y = \frac{b}{2}$ и зададим на ней произвольную функцию $f(x)$, обращающуюся в нуль на ее концах. Относительно y интерполируем по Лагранжу и получим:

$$u = 4\,\frac{y(b-y)}{b^2}\,f(x).$$

Подставляя в $I(u)$ и $G(u)$ имеем:

$$I(u) = \int_0^a\int_0^b [u_x^2 + u_y^2]\,dxdy = \int_0^a \left(\frac{8}{15}\,bf'^2 + \frac{16}{3b}\,f^2\right)dx = \min,$$

$$G(u) = \int_0^a\int_0^b u^2 dxdy = \int_0^a \frac{8}{15}\,bf^2 dx.$$

Уравнение для $f(x)$ имеет вид:

$$\frac{8}{15}\,bf'' + \left(\frac{8}{15}\,b\lambda - \frac{16}{3b}\right)f = 0.$$

Общее решение его есть

$$f = A\sin\sqrt{\lambda - \frac{10}{b^2}}\,x + B\cos\sqrt{\lambda - \frac{10}{b^2}}\,x.$$

предельные требования дадут

$$B = 0 \text{ и } A\sin\sqrt{\lambda - \frac{10}{b^2}}\,a = 0,$$

и следовательно должно быть

$$\sqrt{\lambda - \frac{10}{b^2}}\,a = k\pi,\quad \lambda = \frac{k^2\pi^2}{a^2} + \frac{10}{b^2}.$$

Значение λ, соответствующее основному тону мембраны, получается при $k = 1$:

$$\lambda = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{10}{b^2}.$$

Точное его значение есть $\lambda = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}$, и ошибка нашего приближения будет не больше $1{,}3\%$.

Определив постоянную A, входящую в $f(x)$, из условия нормированности $G(u) = 1$, для нашей группы собственных функций получаем следующее приближенное выражение:

$$u = \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{ab}}\,\frac{y(b-y)}{b^2}\sin\frac{k\pi x}{a}.$$

§ 4. Метод наименьших квадратов

n° 1. Средняя квадратичная погрешность. Наши последующие рассуждения будут относиться к любым дифференциальным уравнениям и любым предельным условиям. Мы выясним идею метода на частном примере. Пусть нужно найти решение уравнения

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее предельным требованиям на контуре L области B:

$$u\Big|_L = \varphi(s). \tag{2}$$

Допустим далее, что, как и в методе Ритца, мы имеем некоторую совокупность функций, удовлетворяющих предельному условию (2). Выберем какую-либо из них и подставим в левую часть уравнения (1). Если случайно окажется, что взятая нами функция совпадает с решением уравнения, мы получим тожественный нуль, вообще же говоря, этого не будет, и мы в результате подстановки придем к некоторой вполне определенной функции от x и y, которую можно рассматривать как погрешность в выполнении уравнения (1) взятой нами функцией. Если взятая функция близка к решению задачи как по ее величине, так и по значениям ее производных до второго порядка, то абсолютная величина погрешности будет, вообще говоря, мала. Следует ожидать, что и наоборот, если полученная нами после подстановки взятой функции погрешность будет малой, то и сама функция мало уклоняется от решения уравнения. Мы же будем входить в подробности оценки разности между нашей функцией и решением задачи по известной оценке погрешности и ограничимся только приведенной качественной характеристикой вопроса.

Естественно поставить следующую проблему: среди всех функций заданной совокупности найти такую, чтобы соответствующая ей ошибка в выполнении уравнения (1) была бы наименьшей в том или ином

смысле слова. Полученную функцию можно будет рассматривать как „наилучшее" в нашем смысле приближение к решению задачи. Если взятая совокупность функций достаточно широка, найденное таким способом приближение будет, следует думать, мало отличаться от решения.

Само приближение к решению определяется двумя факторами: во-первых, рассматриваемой совокупностью функций, удовлетворяющих требованию (2), и во-вторых, способом оценки погрешности.

В зависимости от характера семейства и способа этой оценки мы будем получать тот или иной метод приближенного решения.

Наиболее прямым и естественным в оценке погрешности здесь было бы применение идей, развитых Чебышевым при построении им полиномов, наименее уклоняющихся от нуля. „Погрешность", т. е. результат подстановки взятой функции в уравнение (1), будет зависеть от x и y. Найдем ее наибольшее значение в области B. Это число и является, повидимому, наиболее подходящей к существу дела характеристикой точности выполнения уравнения (1) во всей области B.

Однако, практически такого рода оценка связана с почти непреодолимыми затруднениями, и предпочтительнее, в смысле простоты вычислений, метод наименьшей средней квадратической погрешности. В нашем случае он имеет следующий вид.

Среди функций взятой совокупности найти такую, чтобы интеграл по области B от квадрата результата подстановки ее в левую часть уравнения (1) имел бы наименьшее значение:

$$\iint_B [F(x, y, u, \ldots, u_{yy})]^2\, dxdy = \min. \tag{3}$$

Ниже в настоящем параграфе мы всюду будем иметь в виду, когда будем говорить о наименьшей погрешности, наименьшую среднюю квадратическую погрешность.

Следует здесь же указать, что в решении задачи (3) при условии (2) мы считаем допустимыми к конкуренции всякие функции, принимающие на контуре заданные значения, тогда как контурные значения нормальных производных к ним могут быть какими угодно.

Дальнейшее изложение потребует специальных предположений относительно характера совокупностей функций, среди которых мы ищем решение.

п° 2. Минимизация при помощи линейных комбинаций. Задача о минимизации интеграла (3) при условии (2) представляет собой вариационную проблему обычного вида, и для решения ее может быть применен любой из методов, рассматривавшихся выше.

Подобно тому как это делал Ритц, мы можем рассмотреть семейство допустимых в нашей задаче функций, зависящее от нескольких параметров $u = U_n(x, y, a_1, \ldots, a_n)$, подставить u_n вместо u под знак интеграла (3), произвести все необходимые квадратуры и затем искать такие значения параметров, чтобы им соответствовало бы наименьшее значение полученной после интегрирования функции от $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Мы разовьем здесь это более подробно для случая линейного уравнения, для которого метод имеет наибольший успех и простоту.

$$M(u) \equiv au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + qu = f(x, y), \tag{4}$$

при заданных граничных значениях (2).

a, b, c, q, d и e суть заданные функции от x и y.

Пусть $\psi_0(x, y)$ — любая функция, принимающая на границе L те же значения, что и искомое решение:

$$\psi_0\Big|_L = \varphi(s). \tag{5}$$

Берем любую систему линейно-независимых функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \ldots$ обращающихся в нуль на L, и составляем линейную комбинацию первых n из них вида:

$$u_n = \psi_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j. \tag{6}$$

В результате подстановки ее вместо u в интеграл

$$I(u) = \iint_B [M(u) - f]^2\, dx, \tag{7}$$

мы получим квадратичную функцию от $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$I(U_n) = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{kj} a_j a_k + 2\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j + A;$$

$$\alpha_{kj} = \iint_B M(\psi_j)\, M(\psi_k)\, dxdy,$$

$$\beta_j = \iint_B M(\psi_j)\, [M(\psi_0) - f]\, dxdy,$$

$$A = \iint_B [M(\psi_0) - f]^2\, dxdy.$$

Уравнения, определяющие значения для $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которые дают минимум $I(U_n)$, будут:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} a_j + \beta_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

Определитель системы (7) будет определителем квадратической формы от $a_1, \ldots, a_n$, получающейся в результате подстановки в $\iint_B [M(u)]^2\, dxdy$ вместо u суммы $u_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j$. Интеграл же может равняться нулю лишь в том случае, когда сумма u_n удовлетворяет уравнению $M(u_n) = 0$.

Далее могут представиться два случая.

Взятые нами функции ψ_j обладают тем свойством, что никакая линейная комбинация первых n их не дает решения уравнения $M(u)=0$, обращающегося в нуль на контуре L и отличного от тожественного нуля.

Тогда, очевидно, $\int_B\int [M_n(u)]^2\,dxdy$ будет определенной положительной квадратичной формой, и определитель ее наверное отличен от нуля. Система (7) будет иметь единственное решение.

В практических вычислениях этот случай является наиболее распространенным.

В противном случае может оказаться, что при некоторой системе значений $a_1, \ldots, a_n$, u_n будет удовлетворять уравнению $M(u)=0$. Определитель системы (7) наверное будет равен нулю. Как известно, необходимым и достаточным условием существования решения системы тогда будет равенство нулю суммы произведений чисел a_j', образующих решение сопряженной однородной системы:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk}a_j' = 0,$$

на свободные члены β_j. Но, в силу симметрии коэфициентов α_{jk} относительно значков j и k, числа a_j' будут совпадать с a_j, удовлетворяющими уравнениям $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}a_j = 0$ и входящими в образование решения u_n однородного уравнения $M(u)=0$ при граничном требовании $u\big|_L = 0$.

Составим указанную сумму произведений

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\beta_j = \int_B\int \sum_{j=1}^{n} a_j M(\psi_j)\,[M(\psi_0)-f]\,dxdy =$$

$$= \int_B\int M(u_n)\,[M(\psi_0)-f]\,dxdy = 0,$$

в виду $M(u_n)=0$. Этим доказана разрешимость уравнений (7). Общее решение будет составляться как сумма какого-либо частного решения и произвольного решения однородной системы. Добавление же последнего соответствует тому, что мы к частной функции u_n, решающей задачу о минимуме интеграла $I(u_n)$, придаем самое общее решение однородного уравнения $M(u)=0$, какое можно образовать линейно из функций ψ_j.

Пример. Найдем решение уравнения Пуассона $\Delta u = 1$, обращающееся в нуль на границе квадрата с центром в начале координат, со

сторонами по длине равными двум и параллельными осям координат.

$$u=0, \quad x=\pm 1, \quad y=\pm 1.$$

Задача раньше была нами решена по методу Ритца. Будем в качестве функций ψ_j брать полиномы относительно x и y. Уравнение и предельные условия остаются неизменными, если заменить x на $-x$ и y на $-y$, и потому в полиномы должны входить только четные степени x и y. Наконец, в силу симметрии уравнения и предельных условий относительно x и y, наши полиномы должны быть симметричными относительно этих переменных.

Поэтому, приняв во внимание предельные условия, полагаем:

$$\psi_1 = (1-x^2)(1-y^2),\ \psi_2(x) = (1-x^2)(1-y^2)(x^2+y^2), \ldots$$

Возьмем лишь две первых функции и составим U_2:

$$U_2 = a\psi_1 + b\psi_2.$$

Подстановка этой комбинации в соответствующий уравнению интеграл

$$I(u) = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (u_{xx}+u_{yy}-1)^2\,dxdy$$

дает:

$$I(U_2) = 512\,\frac{269}{5^2\cdot 7\cdot 9}\,b^2 + 128\,\frac{11}{45}\,a^2 + 512\,\frac{31}{5\cdot 7\cdot 9}\,ab +$$

$$+ \frac{128}{5}\,b + \frac{64}{3}\,a + 4.$$

Условия минимальности, получающиеся от сравнения с нулем частных производных по a и b, после некоторых сокращений примут вид:

$$308a + 248b + 105 = 0$$

$$620a + 2152b + 315 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$a = -0{,}2902, \qquad b = -0{,}0627.$$

Поэтому

$$U_2 = -(1-x^2)(1-y^2)\,[0{,}2902 + 0{,}0627\,(x^2+y^2)].$$

В начале координат при $x=y=0$ $U_2 = -0{,}290$. По сравнению с действительным значением искомой функции в той же точке мы имеем погрешность, меньшую 1%.

n° 3. Приведение к системе обыкновенных уравнений. Мы будем иметь в виду ради определенности уравнение (4) настоящего параграфа и предельное требование (2).

Пусть, как это указано в n° 1 § 3, мы построили в области B n отрезков прямых, параллельных оси x, на них задали произвольные функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, принимающие на концах этих отрезков такие же значения, как и $\varphi(s)$, и построили путем интерполяции по y функцию

$U_n(x, y; f_1, \ldots, f_n)$, принимающую на контуре заданные значения и на отрезках прямых совпадающую соответственно с $f_1(x)$, $f_2(x)$, ...

$$U_n = \sum_{s=1}^{n} \varphi_s(x, y) f_s(x) + \varphi_0(x, y).$$

Подставим U_n под знак интеграла (7) и произведем все необходимые квадратуры по y: в результате получим интеграл вида

$$(9) \qquad I(U_n) = \int_\alpha^\beta \Big[\sum_{s,\,z=1}^{n} (\omega_{sz}^{(1)} f_s'' f_z'' + 2\omega_{sz}^{(2)} f_s'' f_z' + 2\omega_{sz}^{(3)} f_s'' f_z + + \omega_{sz}^{(4)} f_s' f_z' + 2\omega_{sz}^{(5)} f_s' f_z + \omega_{sz}^{(6)} f_s f_z) + 2\sum_{s=1}^{n} (\omega_s^{(1)} f_s'' + + \omega_s^{(2)} f_s' + \omega_s^{(3)} f_s) + \Phi \Big] dx.$$

Мы должны будем найти функции f_s из условия минимальности написанного интеграла при заданных граничных значениях для них, но однако свободных значениях их производных по x. Как известно из вариационного исчисления, искомые функции должны удовлетворять уравнениям Эйлера, имеющим в нашем случае вид:

$$(10) \qquad \frac{d^2}{dx^2} \sum_{z=1}^{n} (\omega_{sz}^{(1)} f_z'' + \omega_{sz}^{(2)} f_z' + \omega_{sz}^{(3)} f_z) - \frac{d}{dx} \sum_{z=1}^{n} (\omega_{sz}^{(2)} f_z'' + + \omega_{sz}^{(4)} f_z' + \omega_{sz}^{(5)} f_z) + \sum_{z=1}^{n} (\omega_{sz}^{(3)} f_z'' + \omega_{sz}^{(5)} f_z' + \omega_{sz}^{(6)} f_z) = X_s(x)$$

$$s = 1, 2, \ldots, n$$

и так называемым „естественным граничным условиям“, [1] связанным

[1] Ограничимся ради простоты одной искомой функцией. В вариационном исчислении доказывается, что если допустимыми к конкуренции при разыскании экстремума функционала

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'')\, dx$$

будут все дважды дифференцируемые функции, определенные в промежутке от x_1 до x_2, то первая вариация δI будет иметь вид:

$$\delta I = \Big[F_{y'} \delta y + F_{y''} \delta y' - \delta y \frac{d}{dx} F_{y''} \Big]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \Big\{ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \Big\} \delta y\, dx.$$

с произволом производных f_s' на концах отрезков прямых:

$$(11) \qquad \sum_{z=1}^{n} (\omega_{sz}^{(1)} f_z'' + \omega_{sz}^{(2)} f_z' + \omega_{sz}^{(3)} f_z + \omega_s^{(1)}) = 0 \qquad s = 1, 2, \ldots, n.$$

при x, соответствующем концам отрезков.

Таким образом функции f_s должны быть найдены как решения системы (10) при заданных значениях на концах отрезков прямых и соблюдении там „естественных условий“ (11).

Пример. Решим задачу о разыскании решения уравнения $\Delta u = 1$, удовлетворяющего условию $u = 0$ при $x = \pm 1$, $y = \pm 0{,}5$. В прямоугольнике, внутри которого ищется решение, зададим лишь одну прямую $y = 0$ и положим

$$u_1 = (1 - 4y^2) f(x),$$

$$u_{xx} = (1 - 4y^2) f'', \quad u_{yy} = -8f.$$

$$I(u_1) = \iint_B (\Delta u - 1)^2\, dx dy =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \Big(\frac{8}{15} f''^2 - \frac{32}{3} f'' f - \frac{4}{3} f'' + 64 f^2 + 16 f + 1 \Big) dx.$$

Уравнение Эйлера для f здесь будет:

$$\Big(\frac{16}{15} f'' - \frac{32}{3} f - \frac{4}{3} \Big)'' + \Big(-\frac{32}{3} f'' + 128 f + 16 \Big) = 0$$

или после некоторых упрощений:

$$f^{\mathrm{IV}} - 20 f'' + 120 f + 15 = 0.$$

Частным решением неоднородного уравнения будет постоянная $-\frac{1}{8}$.

В исследуемом нами случае граничные значения искомой функции y закреплены; поэтому $\delta y = 0$ при $x = x_1$ и $x = x_2$ и члены с δy в квадратных скобках вне интеграла пропадут. Для искомой функции δI должно быть равным нулю. В виду произвола вариации δy внутри промежутка (x_1, x_2) и вариации $\delta y'$ на концах промежутка, порознь должны равняться нулю фигурная скобка, стоящая под знаком интеграла, что дает уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0,$$

и множитель при $\delta y'$ в квадратных скобках вне интеграла. Последнее равенство приводит к естественным условиям на границах:

$$F_{y''} = 0 \qquad \text{при} \quad x = x_1 \quad \text{и} \quad x = x_2.$$

Наш случай отличается от этого лишь наличием не одной, а многих искомых функций. См. об этом например Егоров, Основания вариационного исчисления, ГИЗ, Москва, или J. Hadamard, Leçons sur le calcul des variations, I. Paris 1910.

Характеристическое уравнение для однородной задачи будет:

$$s^4 - 20s^2 + 120 = 0.$$

Все корни его суть комплексные числа. Обозначим через $\alpha + i\beta$ корень, равный $+\sqrt{10 + i\sqrt{20}}$. При этом очевидно $\alpha^2 = \sqrt{30} + 5 = 10{,}47723$, $\beta^2 = \sqrt{30} - 5 = 0{,}47723$ и следовательно

$$\alpha = 3{,}237, \qquad \beta = 0{,}691.$$

Так как коэфициенты характеристического уравнения вещественны и s входит только в четных степенях, то остальные корни его будут:

$$\alpha - i\beta, \quad -\alpha + i\beta, \quad -\alpha - i\beta.$$

Общее решение однородного уравнения в силу этого будет иметь вид:

$$A \operatorname{ch}\alpha x \cos\beta x + A \operatorname{sh}\alpha x \sin\beta x + C \operatorname{ch}\alpha x \sin\alpha x + D \operatorname{sh}\alpha x \cos\beta x.$$

Искомая функция должна быть четной, и поэтому в написанном выражении сохранятся только два первых члена:

$$f(x) = A \cos\alpha x \cos\beta x + B \sin\alpha x \sin\beta x - \frac{1}{8}.$$

Постоянные A и B должны быть найдены из того требования, чтобы при $x = 1$ функция $f(x)$ обращалась в нуль, что дает

$$A \operatorname{ch}\alpha \cos\beta + B \operatorname{sh}\alpha \sin\beta = \frac{1}{8},$$

и из естественного граничного условия при $x = 1$, которое имеет здесь вид:

$$\left(\frac{16}{15} f''' - \frac{32}{3} f - \frac{4}{3}\right)_{x=1} = 0$$

Если принять во внимание $f(1) = 0$ и сократить на численный множитель, получим: $f'' = \frac{5}{4}$, после подстановки сюда вместо $f(x)$ его значения, найдем:

$$A \operatorname{sh}\alpha \sin\beta - B \operatorname{ch}\alpha \cos\beta = 0.$$

Решая это уравнение совместно с предыдущим, получим для A и B следующие значения:

$$A = \frac{\operatorname{ch}\alpha \cos\beta}{8(\operatorname{ch}^2\alpha\cos^2\beta + \operatorname{sh}^2\alpha\sin^2\beta)} = 0{,}00757,$$

$$B = \frac{\operatorname{sh}\alpha \sin\beta}{8(\operatorname{ch}^2\alpha\cos^2\beta + \operatorname{sh}^2\alpha\sin^2\beta)} = 0{,}00624;$$

таким образом

$$f(x) = 0{,}00757 \operatorname{ch}\alpha x \cos\beta x + 0{,}00624 \operatorname{sh}\alpha x \sin\beta x - \frac{1}{8}$$

$$u_1 = (1 - 4y^2)\left(0{,}00757 \operatorname{ch}\alpha x \cos\beta x + 0{,}00624 \operatorname{sh}\alpha x \sin\beta x - \frac{1}{8}\right).$$

Положим здесь $x = y = 0$ и найдем для u в центре прямоугольника значение $-0{,}117$; точно же значение есть $0{,}114$, и ошибка нашего первого приближения будет около 3%.

n° 4. Положение к приближенному построению собственных функций и чисел. Несколько более затруднительным является применение метода наименьших квадратов к нахождению собственных чисел и функций.

Рассмотрим диференциальное выражение

$$M(u) = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + qu \tag{12}$$

и будем искать собственные функции уравнения

$$M(u) + \lambda\rho u = 0, \tag{13}$$

обращающиеся в нуль на контуре L области B.

С той точки зрения, которую мы развиваем сейчас, дело идет о том, чтобы найти, во-первых, такие значения параметра λ, при которых задача о минимуме интеграла

$$I(u) = \int_B\int [M(u) + \lambda\rho u]^2 dxdy \tag{14}$$

при $u|_L = 0$ была бы неопределенной и допускала решения, отличные от тожественного нуля, и, во-вторых, разыскать сами эти решения.

Будем, как обычно, исходить из системы линейно независимых функций $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$, ..., обращающихся в нуль на L. Образуем линейную комбинацию первых n из них

$$U_n = \sum_{j=1}^{n} a_j\psi_j$$

и внесем ее под знак интеграла вместо u. В результате интеграции получим некоторую положительную квадратичную форму параметров a_j.

Последняя имеет минимальное значение, вообще говоря, только в том случае, когда все $a_j = 0$, и только тогда этот минимум достигается вне нулевых значений a_j, если U_n будет собственной функцией и λ — собственным числом, что может оказаться только случайно.

Мы свяжем поэтому числа a_j требованием, чтобы функция U_n не могла обращаться в тожественный нуль, приняв, например, условие нормированности

$$G(U_n) = \int_B\int \rho U_n^2 dxdy = 1 \tag{15}$$

или аналогичное равенство.

Если λ не равно собственному числу, то бесполезно при соблюдении (15) пытаться приблизиться к точному решению $u=0$, выбирая в U_n коэфициенты a_j, так как для точного решения уравнения (13) интеграл $G(u)$ имеет значение, равное нулю. Иначе будет, если λ равно собственному числу. Тогда наверное будет существовать решение, удовлетворяющее условию нормированности (15), и изменяя коэфициенты a_j, мы можем надеяться подойти близко к решению проблемы и получить значение для интеграла $I(U_n)$, близкое к абсолютному минимуму.

Сообразно этим рассуждениям мы будем поступать следующим образом. Станем искать минимум функции $I(U_n)$ при требовании (15). Величина этого минимума, точно так же как и значения коэфициентов, для которых он достигается, будут функциями параметра λ. Допустим, что мы это минимальное значение нашли тем или иным путем. Выберем теперь параметр λ так, чтобы найденный минимум был наименьшим. Для определения λ получится некоторое уравнение. Корни его и могут быть приняты за приближенные значения собственных чисел.

После этих качественных пояснений войдем в некоторые вычислительные подробности.

В результате подстановки U_n в интеграл (14) получим форму вида

$$I(U_n)=\sum_{k,j=1}^{n}(\alpha_{kj}+2\lambda\beta_{kj}+\lambda^2\gamma_{kj})a_k a_j,$$

где

$$\alpha_{kj}=\int_B\int M(\psi_k)M(\psi_j)\,dx\,dy,$$

$$\beta_{kj}=\int_B\int M(\psi_k)\rho\psi_j\,dx\,dy,$$

$$\gamma_{kj}=\int_B\int \rho^2\psi_k\psi_k\,dx\,dy.$$

Уравнение связи (15) очевидно дает:

$$\sum_{k,j=1}^{n}\gamma_{kj}a_k a_j=1.$$

По правилу Лагранжа образуем вспомогательную функцию

$$K=I(U_n)-\mu G(U_n)$$

и для нее составляем условия свободного экстремума:

$$\frac{\partial K}{\partial a_k}=2\sum_{j=1}^{n}[\alpha_{kj}+(\beta_{kj}+\beta_{jk})\lambda+\lambda^2\gamma_{kj}-\mu\gamma_{kj}]\alpha_j=0. \tag{16}$$

В виду однородности системы, определитель ее должен быть равным нулю:

$$\Delta(\lambda,\mu)=|\alpha_{kj}+(\beta_{kj}+\beta_{jk})\lambda+\lambda^2\gamma_{kj}-\mu\gamma_{kj}|=0. \tag{17}$$

Это дает уравнение n-го порядка для μ.[1]

Отсюда мы найдем n значений для μ как функции от λ. Подставив какое-либо одно из них в систему, мы определим числа a_j и по ним построим комбинацию U_n. После этого мы должны бы были найти значения интеграла (14) для U_n и определить λ из требования его минимальности. Легко, однако, видеть, что эти вычисления бесполезны, ибо μ в наших предположениях совпадает с $I(U_n)$. Действительно, умножим уравнения (16) последовательно на $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и сложим. В силу теоремы Эйлера об однородных функциях, получим

$$2[I(U_n)-\mu G(U_n)]=0;$$

отсюда, в виду нормированности U_n, следует

$$\mu=I(U_n).$$

Поэтому разыскание приближенных значений собственных чисел сводится к определению минимума неявной функции μ от λ, заданной уравнением (17). Обе эти величины найдутся из системы

$$\Delta(\lambda,\mu)=0$$
$$\frac{\partial\Delta(\lambda,\mu)}{\partial\lambda}=0.$$

Пример. Рассмотрим неоднократно решавшуюся нами задачу об основном тоне квадратной мембраны со сторонами длины 2 с закрепленными краями

$$\Delta u+\lambda u=0$$
$$u=0 \quad \text{при } x=\pm 1 \quad y=\pm 1.$$

Будем функции ψ_n брать в форме полиномов

$$\psi_1=(1-x^2)(1-y^2),\quad \psi_2=(1-x^2)(1-y^2)x,\ldots$$

и ограничимся лишь самым грубым приближением, положив

$$U_1=(1-x^2)(1-y^2)a.$$

Здесь

$$I(U_1)=a^2\left(\frac{256}{225}\lambda^2-\frac{512}{45}\lambda+\frac{1408}{45}\right);$$

λ находим из условия минимальности полученного выражения. Приравняв производную по λ нулю, легко получим

$$\lambda=5.$$

Точное значение есть

$$\lambda=\frac{\pi^2}{2}=4{,}935.$$

Разница между ним и найденным нами грубым приближением будет 0,065, что составляет меньше $1{,}5\%$.

---

[1] Что μ^n войдет в уравнение, следует из того, что коэфициентом при нем будет определитель, составленный из γ_{kj}. Но это — определитель Грамма для функций $\rho\psi_1, \rho\psi_2, \ldots, \rho\psi_n$; он наверное отличен от нуля в виду их линейной независимости.

ГЛАВА V

КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ

§ 1. Введение

n° 1. Конформное преобразование и уравнение Лапласа. Весьма большое число стационарных задач математической физики сводится к решению простейшего из уравнений эллиптического типа — уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

Сюда относятся, например, плоские стационарные задачи теории электричества, теории теплоты, задачи о движении совершенной несжимаемой жидкости и т. д.

При этом искомая функция, решающая поставленную проблему, определяется, во-первых, областью, в которой она ищется, зависящей от формы изучаемого объекта, и, во-вторых, предельными условиями, которые должны быть выполнены на границе этой области.

Часто бывает, что для простейших областей — круга, квадрата, кругового кольца, плоскости с разрезами и т. п. — задача может быть относительно просто разрешена при сравнительно сложных предельных требованиях. Если же область имеет сложное строение, то решение задачи непосредственно для этой области представляет подчас весьма большие затруднения даже для такой простой задачи, какой является например, проблема Дирихле.

Поэтому пытаются предварительно преобразовать данную область к простейшему виду. При такого рода преобразованиях будет меняться, вообще говоря, не только область, для которой ищется решение и предельные условия, но и диференциальное уравнение, которому должна удовлетворять искомая функция.

Наибольшее значение для уравнения Лапласа будет, очевидно, иметь такое преобразование, относительно которого само уравнение Лапласа остается инвариантным.

Пусть вместо переменных x и y мы ввели новые переменные ξ и η при помощи равенств:

$$\xi=\xi(x, y), \quad \eta=\eta(x, y). \tag{2}$$

Когда переменные x, y меняются в области B, новые переменные ξ и η меняются в некоторой области G. Исследуем, как изменится уравнение при преобразовании:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

и аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Поэтому новое уравнение для функции в переменных ξ и η будет

$$\Delta_{xy}u=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial u}{\partial \xi}\Delta_{xy}\xi+\frac{\partial u}{\partial \eta}\Delta_{xy}\eta.$$

Чтобы оно было уравнением Лапласа, нужно, очевидно, чтобы преобразование (2) удовлетворяло следующим требованиям:

$$\Delta_{xy}\xi=0, \quad \Delta_{xy}\eta=0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}=0; \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

Первые два из этих уравнений говорят о том, что ξ и η должны быть гармоническими функциями от x и y. Третье уравнение дает

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}:\frac{\partial \xi}{\partial y}=-\frac{\partial \eta}{\partial y}:\frac{\partial \xi}{\partial x}=\mu; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x}=\mu\frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y}=-\mu\frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Если подставить теперь вместо производных от η их значения в последнее уравнение, получим:

$$(1-\mu^2)\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]=0.$$

Отсюда видно, что $\mu=\pm 1$ и, стало быть, либо

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y}=-\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{3}$$

либо:

$$(3') \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Уравнение (3′) отличается от (3) только тем, что ξ и η поменялись местами; мы остановимся поэтому только на первом из условий. Оно выражает то обстоятельство, что ξ и η суть сопряженные гармонические функции. Преобразования, даваемые такого рода функциями, будут конформными — переводящими бесконечно малые фигуры плоскости x, y в подобные им фигуры плоскости ξ, η всюду, где $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \neq 0$.

Образуем следующую комплексную функцию: $f(z) = \xi + i\eta$ комплексной переменной $z = x + iy$. Для нее (3) будут известными условиями моногенности Коши-Римана.

Таким образом, уравнение Лапласа остается инвариантным относительно преобразований, доставляемых моногенными функциями комплексной переменной.

Ниже нам будут полезны некоторые общие предложения, относящиеся к конформным преобразованиям. Мы приведем их сейчас без доказательства.

№ 2. Преобразование односвязных областей. Простейшим случаем конформного преобразования будет тот, когда преобразуемые области односвязны. Первый вопрос, возникающий в связи с исследованием конформного преобразования их, это — вопрос о существовании голоморфной функции, совершающей взаимно однозначное преобразование их друг в друга.

Ответ дается следующим предложением, известным под именем теоремы Римана:

Если B и G суть односвязные однолистные области плоскостей комплексных переменных $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$, отличные от всей плоскости и всей плоскости без одной точки, то существует функция $\zeta = f(z)$, голоморфная в B и совершающая конформное взаимно-однозначное отображение B на G, при этом так, что заранее указанная точка a области B переходит в произвольно избранную точку α из G и заданное направление в точке a перейдет в заданное направление в α.

Требованием соответствия внутренних точек и направлений в них преобразующая функция определяется вполне.

Таким образом, функция, преобразующая B в G, будет зависеть от трех параметров в виду того, что точка α, задаваемая произвольно, определяется двумя параметрами, и направление в ней — одним. Выбором этих трех параметров мы можем распорядиться иначе, чем в теореме Римана. Например, для областей, подчиненных некоторым ограничениям, которые для практически встречающихся случаев, наверное, выполняются, можно требовать, чтобы три наперед заданные точки границы области B перешли в три заданные точки границы G.

Остановим еще внимание читателя на некоторых фактах, относящихся к поведению преобразующей функции на границе L преобразуемой области B.

Будем предполагать, простоты ради, что области B и G ограничены. Для практических приложений нам достаточно считать границы их — кусочно гладкими кривыми. Мы не будем, однако, предполагать эти кривые простыми: одну и ту же комплексную координату z могут иметь несколько граничных точек.

Опишем около граничной точки с координатой z круг малого радиуса ε; он пересечется с B по некоторой совокупности областей. Возьмем те из них, которые имеют z своей граничной точкой. Пусть это будут $B_\varepsilon^{(1)}, B_\varepsilon^{(2)} \ldots$ Точка z называется простой точкой границы L области B, если при всяких ε будет существовать только одна из областей B_ε. В противном случае точку называют кратной. Граничные точки с одной и той же комплексной координатой называют разными, если им при некотором ε будут соответствовать различные $B_\varepsilon^{(k)}$. Как индивидуум, граничная точка определяется своей координатой и прилежащей к ней областью B_ε при произвольно малом ε; последнюю называют B_ε — окрестностью граничной точки.

Можно показать, что преобразующая функция $\zeta = f(z)$ будет стремиться к определенному пределу, если аргумент z будет приближаться к граничной точке. Больше того, если к области присоединить все ее граничные точки, то преобразующая функция будет непрерывна всюду в полученном замыкании области B.

Задача об эффективном построении функции, совершающей преобразование B на G, даже в простом случае преобразования области на круг или круга на область, представляет очень часто весьма большие, или даже непреодолимые затруднения. Достаточно вспомнить проблему определения постоянных в формуле Кристофеля-Шварца для функции, преобразующей круг на многоугольник, чтобы убедиться в этом. Даже если известен аппарат представления преобразующей функции, его строение, порой, бывает настолько сложным, что пользование им сопряжено с весьма большой затратой труда.

Поэтому весьма большое значение имеют для неточного разрешения задач более простые методы приближенного представления преобразующей функции. Обычно пытаются приблизиться к искомой функции, составляя известные комбинации из хорошо изученных функций. Наиболее простыми и чаще всего употребляемыми функциями являются полиномы. Возможность применения их была исследована К. Рунге; им было установлено, что в области B всегда можно построить полином, который отличается от функции, преобразующей область на круг, как угодно мало в любой внутренней части B.

Если граница области B имеет кратные точки, то полиномы, очевидно, недостаточны для того, чтобы приблизиться к отображающей функции равномерно всюду в B. Если же граница области B есть простая кривая, то, как показали исследования Уолша, в B можно поло-

брать так полином, чтобы он отличался от преобразующей функции как угодно мало всюду в B, включая и границу L.

n° 3. Преобразование многосвязных областей. Конформное преобразование многосвязных областей подчинено гораздо большим ограничениям, чем преобразование односвязных. Для возможности взаимно-однозначного преобразования одной области на другую необходимо, чтобы они были одинаковой связности. Но равная связность областей еще не является достаточной для возможности их преобразования, и не всякие две области одной и той же связности могут быть преобразованы друг в друга.

Мы остановимся сначала на случае двухсвязных областей. Простейшая среди них есть кольцо между двумя концентрическими окружностями. Относительно преобразования на нее любой другой области известна следующая теорема: *всякая двухсвязная область может быть конформно и взаимно-однозначно преобразована на кольцо с конечным или бесконечным отношением радиусов его граничных окружностей.*

Обозначим граничные кривые области через L_1, L_2 и радиусы соответствующих им окружностей через ρ_1 и ρ_2. Отношение $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ определяется с точностью до обращения, что отвечает выбору соответствия между L_1, L_2 и окружностями кольца. Если указано, какая из граничных кривых области должна перейти во внешнюю и какая во внутреннюю окружность кольца, то отношение радиусов ρ_1 и ρ_2 будет вполне определено. Разыскание этого отношения представляет одну из трудных задач теории конформного преобразования. Ниже мы даем практические приемы его определения.

Можно просто видеть, что преобразование одного кольца в другое с тем же отношением радиусов без перемены местами внешней и внутренней окружностей сводится только к подобному преобразованию и вращению около центра. Поэтому, если начало координат лежит в центре кольца, функция, преобразующая область B на кольцо, определяется с точностью до произвольного комплексного множителя.

Для приближенного преобразования здесь могут быть использованы рациональные функции частного вида.

Пусть бесконечно далекая точка плоскости не принадлежит области. Внешний контур обозначим L_2 и внутренний через L_1. Поместим начало координат внутри или на L_1. Преобразующая функция есть, как известно, сумма двух слагаемых, одно из которых — $\varphi_0(z)$ голоморфно внутри внешнего контура, и другое — $\varphi_1(z)$ — вне внутреннего. К $\varphi_2(z)$ можно равномерно приблизиться в любой внутренней части области, ограниченной L_2 при помощи полинома вида

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n,$$

тогда как $\varphi_1(z)$ можно равномерно аппроксимировать как угодно точно в любой внутренней части области, лежащей вне L_1 при помощи рациональной функции, имеющей форму:

$$Q_m(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_{-m}}{z^m}.$$

Таким образом функция, преобразующая область B между L_1 и L_2 на кольцо, может быть в любой внутренней части B представлена равномерно с произвольной точностью при помощи рациональной функции типа:

$$\sum_{\nu=-m}^{n} a_\nu z^\nu.$$

Если бесконечно далекая точка и начало координат будут внешними точками B и кривые L_1 и L_2 не будут иметь кратных точек, то равномерная аппроксимация возможна всюду в B, включая и контур.

Немного иначе будет обстоять дело в том случае, когда бесконечно далекая точка будет принадлежать области. Тогда B будет внешностью двух кривых L_1 и L_2. Пусть a_1 и a_2 — две точки, лежащие внутри кривых или на них самих.

Преобразующая функция здесь будет представляться суммой двух функций, одна из которых голоморфна вне L_1; к ней можно приблизиться произвольно близко в любой внутренней части области внешней L_1 при помощи рациональной функции:

$$R_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{(z-a_1)} + \frac{\alpha_2}{(z-a_1)^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{(z-a_1)^n};$$

вторая же будет голоморфна вне L и к ней можно совершенно так же приблизиться при помощи рациональной функции:

$$R_2 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{(z-a_2)} + \frac{\beta_2}{(z-a_2)^2} + \ldots + \frac{\beta_n}{(z-a_2)^n}.$$

Поэтому преобразующая функция приближенно может быть представлена при помощи функции вида:

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{\alpha_k}{(z-a_1)^k} + \frac{\beta_k}{(z-a_2)^k} \right\}.$$

Когда L_1 и L_2 простые кривые и точки a_1 и a_2 лежат внутри их, то, как и выше, возможно равномерное приближение к $\varphi(z)$ в B, включая и границу.

Перейдем к преобразованию областей любой связности. Ради простоты мы будем иметь в виду область конечной связности n.

За каноническую область, на которую преобразуется всякая другая область, здесь принимают чаще всего всю плоскость с разрезами, параллельными некоторому направлению, например направлению вещественной оси.

При преобразовании мы можем задавать произвольно точку a области B плоскости z, которая должна перейти в бесконечно далекую точку плоскости ζ изображения. Далее, можно задавать произвольно то направление в точке a, которое должно переходить в направление

вещественной оси в точке $\zeta = \infty$. Если a лежит на конечном расстоянии, то преобразующая функция имеет вблизи ее разложение:

$$\zeta = \frac{c}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \tag{4}$$

когда же $a = \infty$, то

$$\zeta = cz + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \tag{4'}$$

В обоих случаях выбор указанного направления соответствует выбору аргумента коэфициента c главного члена ряда.

При умножении ζ на любое вещественное число, что отвечает произвольному преобразованию подобия из начала координат плоскости ζ, разрезы, параллельные вещественной оси, не изменят, очевидно, своего направления и останутся опять параллельными вещественной оси. Но подобное преобразование отвечает произвольному изменению модуля c. Наконец, разрезы не будут менять своего направления при любом параллельном переносе плоскости ζ, иначе говоря, при любом изменении свободного члена c_0.

Таким образом, при подобного рода преобразованиях в выражениях (4) или (4') преобразующей функции остаются произвольными соответственно либо a, c, c_0, либо c, c_0.

Можно просто показать, что если эти величины заданы, то преобразующая функция определяется вполне.

В самом деле, пусть кроме функции ζ область B преобразуется конформно на плоскость с разрезами, параллельными вещественной оси, при помощи функции ζ^*, имеющей разложения около a, либо

$$\zeta^* = \frac{c}{z-a} + c_0 + c_1^*(z-a) + c_2^*(z-a)^2 + \dots$$

либо

$$\zeta^* = cz + c_0 + \frac{c_1^*}{z} + \frac{c_2^*}{z^2} + \dots$$

Составим разность между ζ и ζ^*:

$$\zeta - \zeta^* = p + iq.$$

Вблизи a она имеет разложение либо

$$\zeta - \zeta^* = (c_1 - c_1^*)(z-a) + (c_2 - c_2^*)(z-a)^2 + \dots$$

либо

$$\zeta - \zeta^* = \frac{c_1 - c_1^*}{z} + \frac{c_2 - c_2^*}{z^2} + \dots$$

Мы можем рассматривать ее как функцию от ζ. Так как при вычитании главные члены ζ и ζ^* сократятся, разность их $\Phi(\zeta) = \zeta - \zeta^*$ будет ограничена на всей плоскости. Каждый граничный разрез $Im[\zeta] = \text{const}$ она переводит в разрез $Im[\Phi] = Im[\zeta] - Im[\zeta^*] = \text{const}$.

Пусть теперь хоть один из коэфициентов $c_k - c_k^*$ отличен от нуля. Тогда будет отличной от тожественного нуля и функция $\Phi(\zeta)$. Она будет доставлять преобразование плоскости с разрезами на некоторую ограниченную область, границей которой будут служить прямолинейные разрезы, параллельные вещественной оси. Но такая область, очевидно, невозможна, и поэтому все $c_k - c_k^*$ должны быть равными нулю, что влечет за собой $\zeta = \zeta^*$.

§ 2. Метод Бибербаха

n° 1. Экстремальное свойство функции, преобразующей область на круг. Среди функций, дающих конформное преобразование заданной односвязной однолистной области B на некоторую другую область, функция, отображающая на круг, обладает одним интересным экстремальным свойством, которое было указано Бибербахом, [1] позволяющим дать сравнительно простой по идее, и в некоторых случаях по вычислениям, метод приближенного конформного преобразования области на круг.

Установим сначала минимальный принцип. Пусть функция:

$$\zeta = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

регулярная в круге радиуса R с центром в начале координат, преобразует его в некоторую область комплексной переменной ζ. Площадь ее, как известно, выражается интегралом вида:

$$I = \int_0^R \int_0^{2\pi} f'(z)\overline{f'(z)}\, r\, dr\, d\varphi, \quad z = re^{i\varphi}. \tag{2}$$

После подстановки под знак интеграла вместо производной $f'(z)$ ее значения из (1) мы получим там сумму членов вида:

$$nk a_n \bar{a}_k r^{n+k-2} e^{i(n-k)\varphi}.$$

При интегрировании по φ могут представиться два случая:

если $n \neq k$, $\quad \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\varphi}\, d\varphi = 0,$

если же $n = k$, то интегрирование по φ дает просто 2π, и

$$I = \int_0^R \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^2 2\pi r^{2n-1}\, dr = \tag{3}$$

$$= \pi R^2 |a_1|^2 + \pi \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n|^2 R^{2n},$$

откуда получается следующий результат.

[1] Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXVIII, fas. I, 1914, L. Bieberbach, Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung.

При отображении круга радиуса R при помощи функции (1), регулярной внутри него и имеющей первую производную в центре равную a_1, площадь отображенной области всегда больше, нежели $\pi R^2 |a_1|^2$, и может совпадать с этим числом лишь в том случае, когда преобразование линейно: $\zeta = a_0 + a_1 z$.

Нас будет ниже особенно интересовать тот случай, когда $a_1 = 1$; здесь результат предыдущей теоремы говорит о том, что при таком преобразовании площадь увеличивается, если исключить случай параллельного переноса $\zeta = a_0 + z$.

Допустим теперь, что нам нужно найти конформное преобразование однолистной области B на круг так, чтобы заданная внутренняя точка ее, которую мы всегда можем принять за начало координат, переходила в центр круга и определенное направление в этой точке, принимаемое нами за положительное направление вещественной оси, совпадало бы с положительным направлением вещественной оси преобразованной области. Эти условия равносильны требованиям:

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = a_1 > 0.$$

Мы всегда можем добиться того, чтобы a_1 равнялось 1; для этого достаточно рассмотреть функцию $\frac{f(z)}{a_1}$, которая будет так же давать отображение B на круг, как и $f(z)$, но только может быть другого радиуса, что для нас не существенно. Поэтому мы всегда можем предположить:

$$f(0) = 0 \text{ и } f'(0) = 1. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь всевозможные конформные преобразования области B на некоторые другие области, даваемые функциями, удовлетворяющими тем же условиям (4). Можно без труда видеть, что из всех областей, в которые переходит B при помощи такого рода функций, круг будет обладать наименьшей площадью. Ибо, действительно, отображенное B на некоторую область B' можно вообразить выполненным при помощи следующих двух шагов: сначала B мы отображаем на круг и затем круг на B'. При этом функция, совершающая последнее преобразование, будет удовлетворять требованиям (4). В самом деле, пусть функция, преобразующая область B на круг, будет $\zeta = \varphi(z)$, и функция, преобразующая B на B', будет $t = f(z)$. Обе они удовлетворяют условиям (4). Обозначим наконец функцию, доставляющую преобразование круга на B' с сохранением начала координат, через $t = \psi(\zeta)$. Она удовлетворит первому требованию (4). Нам нужно кроме того установить равенство $\psi'(0) = 1$. Совершая упомянутое преобразование B на B' через круг, найдем $f(z) = \psi(\zeta)$. Продифференцировав это равенство по z и положив $z = 0$, найдем $f'(0) = \psi'(0)\,\varphi'(0)$, откуда и вытекает наше утверждение. Но, как мы только что видели, при таком преобразовании площадь круга может только увеличиться,

и потому площадь B' всегда больше, нежели площадь круга. Поэтому искомая функция дает минимум интегралу

$$I = \iint_B f'(z)\overline{f'(z)}\,dxdy, \tag{5}$$

выражающему площадь преобразованной области, по сравнению со всеми другими функциями, которые удовлетворяют требованиям (4).

Функцию, дающую требуемое конформное преобразование, можно искать, следовательно, как решение следующей вариационной задачи:

Среди функций, регулярных в области B и подчиненных условиям (4), найти ту, которая дает минимум интегралу (5).

В существовании и единственности решения поставленной экстремальной проблемы нас убеждает теорема Римана.

Само собой разумеется, мы можем искать не непосредственно $f(z)$, а $f'(z)$, так как под знак интеграла $f(z)$ не входит, и по найденной $f'(z)$ восстановить $f(z)$.

n° 2. Приложение метода Ритца. Формулированное только что свойство функции, преобразующей область на круг, позволяет применить к ее разысканию любой из многих приближенных методов решения вариационных задач. В названном нами выше мемуаре по этому вопросу Бибербах указывает на метод Ритца в частной его форме, разыскивая приближенно решение задачи в виде полинома. Мы не будем ограничивать себя с самого начала таким классом областей, для которых полиномы являются достаточными для приближенного представления искомой функции с любой степенью точности, ибо в практических задачах могут встретиться области, для которых полиномы являются явно недостаточными. О такого рода областях мы будем иметь случай говорить ниже. С другой стороны, может оказаться, что вычисления с полиномами не всегда удобны, или, наконец, заданная область будет неограниченной и тогда аппроксимация функции, ее преобразующей, при помощи полиномов становится невозможной, если следовать тому способу вычислений, который мы указываем здесь, так как интегралы, которые придется вычислять, тогда будут расходящимися. В последнем случае естественно, разумеется, прибегнуть к иного рода функциям, нежели полиномы; выбор их, конечно, будет связан с видом области, если мы хотим добиться наибольшей простоты вычислений.

Возьмем поэтому произвольную систему линейно независимых функции $u_0(z), u_1(z), \ldots$[1] регулярных в области B и таких, что для них интегралы $\iint_B u_i(z)\overline{u_k(z)}\,dxdy$ остаются конечными. Допустим кроме того, что одна из них, например первая $u_0(z)$, отлична от нуля в точке $z = 0$. Составим далее, как обычно, линейную комбинацию:

$$\varphi_n(z) = c_0 u_0(z) + c_1 u_1(z) + \ldots + c_n u_n(z), \tag{6}$$

[1] Линейная независимость системы нами понимается здесь обычно: какое бы конечное число функций $u_0(z), u_1(z), \ldots$ системы мы ни взяли, они оказываются линейно независимыми.

где коэфициенты c_k есть некоторые комплексные числа $c_k = \gamma_k + i\delta_k$, и подчиним ее требованию

$$c_0 u_0(0) + c_1 u_1(0) + \ldots + c_n u_n(0) = 1, \tag{7}$$

удовлетворить которому при нашем предположении $u_0(0) \neq 0$ всегда можно, и внесем $\varphi_n(z)$ под знак интеграла (5) вместо $f'(z)$. После выполнения всех необходимых квадратур мы получим интеграл как функцию величин $\gamma_0, \ldots, \gamma_n, \ldots, \delta_0, \ldots, \delta_n$:

$$I(\varphi_n) = \int_B \int \varphi_n \overline{\varphi}_n dxdy.$$

Численное значение его будет равно той площади, которую имеет изображение области B.

Выберем теперь числа c_k так, чтобы это значение было наименьшим по сравнению со значениями того же интеграла для всякой иной линейной комбинации ψ_n из функций $u_0(z), \ldots, u_n(z)$, значение которой в точке $z = 0$ равно единице.

Представим ее в виде:

$$\psi_n(z) = \varphi_n(z) + \varepsilon\eta_{1n}(z),$$

где $\eta_{1n}(z)$ есть линейная комбинация из $u_i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и ε некоторое комплексное число. Чтобы при всяких ε было $\psi_n(0) = 1$, нужно, очевидно, чтобы $\eta_{1n}(z)$ равнялось нулю в точке $z = 0$. Значение интеграла, вычисленного для ψ_n, будет:

$$I(\psi_n) = \int_B \int \varphi_n \overline{\varphi}_n dxdy + \bar{\varepsilon} \int_B \int \varphi_n \overline{\eta}_{1n} dxdy +$$

$$+ \varepsilon \int_B \int \overline{\varphi}_n \eta_{1n} dxdy + \varepsilon\bar{\varepsilon} \int_B \int \eta_{1n} \overline{\eta}_{1n} dxdy.$$

Знак разницы между ним и $I(\varphi_n)$ при малых ε будет зависеть от членов, содержащих линейно ε и $\bar{\varepsilon}$, ибо последний член будет величиной второго порядка малости, и чтобы $I(\psi_n) - I(\varphi_n)$ была не меньше нуля, нужно поэтому, чтобы

$$\int_B \int \varphi_n \overline{\eta}_{1n} dxdy = 0, \quad \int_B \int \overline{\varphi}_n \eta_{1n} dxdy = 0 \tag{8}$$

при всякой линейной комбинации η_{1n}, удовлетворяющей условию $\eta_{1n}(0) = 0$.

В противном случае выбором ε всегда можно распорядиться так, чтобы было $I(\psi_n) < I(\varphi_n)$, что противоречило бы минимальным свойствам $\varphi_n(z)$.

Одно из написанных выше равенств (8) является следствием другого, ибо в левых частях стоят сопряженные комплексные величины и мы можем по произволу пользоваться любым из них.

Наоборот, если $\varphi_n(z)$ удовлетворяет условию ортогональности (8) относительно всякой линейной комбинации $\eta_{1n}(z)$ при $\eta_{1n}(0) = 0$, то

$\varphi_n(z)$ даст интегралу $I(\varphi)$ минимальное значение по сравнению со всеми комбинациями $\psi_n(z)$ из того же числа функций $u_k(z)$, удовлетворяющих требованию $\psi_n(0) = 1$, ибо тогда

$$I(\psi_n) - I(\varphi_n) = \bar{\varepsilon}\varepsilon \int_B \int \eta_n \overline{\eta}_n dxdy.^1$$

Равенства (9) есть необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять функция $\varphi_n(z)$. Мы перепишем их в несколько иной эквивалентной форме, выбрав $\eta_n(z)$ частным образом. Очевидно каждая из следующих функций:

$$v_1 = u_1(z) - \frac{u_1(0)}{u_0(0)} u_0(z), \ldots, v_n(z) = u_n(z) - \frac{u_n(0)}{u_0(0)} u_0(z), \ldots \tag{9}$$

удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на $\eta_n(z)$, и потому из (8) вытекают такие равенства:

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_{kj} c_j = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n \qquad \alpha_{kj} = \int_B \int u_j \bar{v}_k dxdy. \tag{10}$$

Если присоединить еще условия:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(0)\, c_k = 1,$$

мы получим систему $n+1$ уравнений, из которой и должны быть найдены числа $c_0, \ldots, c_n$. Относительно возможности ее решения мы отсылем читателя к сноске на конце страницы.

При приближенном разыскании функции, дающей конформное преобразование по изложенному здесь способу, существенную роль играют с вычислительной точки зрения следующие два обстоятельства. Во-первых, нахождение интегралов $\int_B \int u_j \bar{v}_k dxdy$, являющихся коэфициентами при c_j в уравнениях системы (10), и, во-вторых, решение самой этой системы. И то и другое при мало-мальски сложной форме области B и большом n представляет нелегкую задачу, и потому важно бывает воспользоваться оставшимся у вычислителя произволом, чтобы заранее внести все возможные упрощения.

Неопределенной осталась еще система функций $u_k(z)$. Кроме линейной независимости их и, как мы увидим ниже, известному требованию полноты, они не подвергнуты никакому ограничению.

---

[1] Отсюда же видно, что $\varphi_n(z)$ будет единственна, если она существует, так как интеграл в правой части равенства может быть равен нулю лишь только в том случае, когда $\eta_n = 0$, т. е. $\psi_n = \varphi_n$. Что касается самого существования φ_n, то в нем можно убедиться на основании следующего простого замечания. Как видно из строения $I(\varphi_n)$, это — определенная квадратичная форма от вещественных γ_k и мнимых δ_k частей коэфициентов c_k, и мы имеем здесь задачу о минимуме упомянутой квадратичной формы при линейной связи; но такая задача, как известно, всегда имеет решение.

Нахождение написанных выше интегралов сразу же упростится, если заранее выбрать $v_k(z)$ так, чтобы все они, за исключением первой, обращались в нуль в точке $z=0$, первая же приводилась там к единице: $u_0(0)=1$ Тогда прежде всего $v_k(z)=u_k(z)$, затем интеграл $\int_B\int u_j\overline{v_k}\,dxdy$ привелся бы к $\int_B\int u_j\overline{u_k}dxdy$, наконец, уравнение связи $\sum_{k=0}^{n} c_k u_k(0)=1$ выродилось бы в $c_0=1$, и число неизвестных сразу же понизилось бы на единицу.

Далее, если система функций $u_0(z)$, $u_1(z)\ldots$ ортогональна в области B в том смысле, что

$$\int_B\int u_j\overline{u_k}\,dxdy=0 \qquad \text{при } k\neq j,$$

то

$$\int_B\int u_j\overline{v_k}dxdy=0 \qquad \text{для } j\neq 0 \text{ и } k\neq j, \text{ тогда как}$$

$$\int_B\int u_0\overline{v_k}dxdy=-\frac{\overline{u_k(0)}}{\overline{u_0(0)}}\int_B\int u_0\overline{u_0}dxdy$$

и $$\int_B\int u_k\overline{v_k}dxdy=\int_B\int u_k\overline{u_k}dxdy$$

уравнения системы значительно упростятся, приняв следующий вид:

$$c_k\int_B\int u_k\overline{u_k}dxdy-c_1\frac{\overline{u_k(0)}}{\overline{u_0(0)}}\int_B\int u_0\overline{u_0}dxdy=0.$$

Поэтому выгодно бывает исходить из ортогональной системы, если она известна, либо приводить, в некоторых случаях, взятую систему функций $u_k(z)$ к ортогональной путем известного процесса ее ортогонализации. Об этом подробнее мы будем говорить при изложении применения ортогональных в смысле Бохнера полиномов к конформному преобразованию.

n° 3. Минимизация при помощи полиномов. Приближенный метод составления системы. Остановимся более подробно на наиболее употребительной последовательности функций $u_n(z)$ — степенях z:

$$u_0(z)=1, \quad u_1(z)=z, \ldots, u_n(z)=z^n\ldots \tag{11}$$

$$\varphi_n(z)=1+c_1z+c_2z^2+\ldots c_nz^n \tag{12}$$

Система (10) для определения коэфициентов c_k здесь имеет форму:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{10}+\alpha_{11}c_1+\alpha_{12}c_2+\ldots+\alpha_{1n}c_n=0\\ \alpha_{20}+\alpha_{21}c_1+\alpha_{22}c_2+\ldots+\alpha_{2n}c_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n0}+\alpha_{n1}c_1+\alpha_{n2}c_2+\ldots+\alpha_{nn}c_n=0\\ \alpha_{kj}=\int_B\int \overline{z}^k z^j\,dxdy, \alpha_{kj}=\overline{\alpha}_{jk}\end{array}\right. \tag{13}$$

Точное вычисление коэфициентов α_{kj} даже для сравнительно простых случаев представляет значительные затруднения. Можно указать однако достаточно широкий класс областей, когда приближенное вычисление этих коэфициентов не представляет труда и может быть проведено по широко известным методам гармонического анализа.

Допустим, что область B звездообразна, т. е. контур ее пересекается каждым лучом, проведенным из начала, только в одной точке. Пусть уравнение контура будет $r=r(\varphi)$.

Преобразуем интеграл α_{kj} к полярным координатам, положив $z=re^{i\varphi}$.

$$\alpha_{kj}=\int_0^{2\pi}\int_0^{r(\varphi)} r^{j+k}e^{i(j-k)\varphi}\,rdrd\varphi= \tag{14}$$

$$=\frac{1}{k+j+2}\int_0^{2\pi} r^{k+j+2}(\varphi)e^{i(j-k)\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{k+j+2}\int_0^{2\pi} r^{k+j+2}(\varphi)\cos(j-k)\varphi d\varphi+$$

$$+\frac{i}{k+j+2}\int_0^{2\pi} r^{k+j+2}(\varphi)\sin(j-k)\varphi d\varphi.$$

Отсюда видно, что вещественная и мнимая части α_{kj} будут отличаться от коэфициентов Фурье разложения $r^{k+j+2}(\varphi)$ только лишь множителем $\frac{\pi}{k+j+2}$ и поэтому вычисление их может быть проведено обычными методами. Но сохранять распространенную схему вычислений приближенного гармонического анализа здесь вряд ли выгодно, ибо при разложении в ряд Фурье различных степеней $r(\varphi)$ нам нужно будет вычислять далеко не одинаковое количество коэфициентов.

Показатель степени у $r(\varphi)$, стоящей под знаком интеграла, на два больше суммы значков у α_{kj}. Наинизшая степень, которую нам при-

дется разлагать в ряд, будет третья; она входит в выражение для α_{01}:

$$\alpha_{01}=\frac{\pi}{3}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} r^3(\varphi)\,e^{i\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{3}\left[a_1^{(3)}+ib_1^{(3)}\right].$$

Нам поэтому достаточно будет вычислить только коэфициенты при $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ в разложении $r^3(\varphi)$.

Четвертая степень $r(\varphi)$ будет встречаться в α_{02} и α_{11}

$$\alpha_{02}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} r^4(\varphi)\,e^{2i\varphi}d\varphi=\frac{\pi}{4}\left[a_2^{(4)}+ib_2^{(4)}\right]$$

$$\alpha_{11}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} r^4(\varphi)\,d\varphi=\frac{\pi}{4}\,a_0^{(4)}.$$

Отсюда видно, что нам достаточно будет найти в разложении $r^4(\varphi)$ коэфициенты только при $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$ и свободный член и т. д.

Аналогичное будет происходить и при больших значениях показателя степени. Старшая степень $r(\varphi)$, входящая в вычисления, будет $2n+2$; она содержится под знаком интеграла для $\alpha_{n,\,n}$:

$$\alpha_{n,\,n}=\frac{\pi}{2n+2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} r^{2n+2}(\varphi)\,d\varphi=\frac{\pi}{2n+2}\,a_0^{(2n+2)}.$$

Поэтому нам нужно будет определить только свободный член разложения $r^{2n+2}(\varphi)$.

Ближайшая меньшая степень входит в $\alpha_{n-1,\,n}$ и $\alpha_{n,\,n-1}$:

$$\alpha_{n,\,n-1}=\frac{\pi}{2n+1}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} r^{2n+1}(\varphi)\,e^{-i\varphi}d\varphi.$$

Нам потребуется, следовательно, вычислять в ряду для $r^{2n+1}(\varphi)$ только коэфициенты при $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ и т. д.

Все эти обстоятельства позволяют значительно упростить схему вычисления коэфициентов Фурье для степеней $r(\varphi)$.

Вычисление значительно облегчается, если область B будет иметь несколько осей симметрии. Всегда можно предположить, что одна из них совпадает с вещественной осью плоскости z и центр симметрии расположен в начале координат.

Пусть область B имеет m осей симметрии. Производная от приближенно отображающего полинома тогда должна иметь вид:

$$\varphi_{nm}(z)=1+c_1z^m+c_2z^{2m}+\ldots+c_nz^{nm},$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — вещественные числа. Система уравнений (13), характеризующая выбор произвольных постоянных, в рассматриваемом случае не должна содержать интегралов от степеней z, не кратных m, и примет вид:

$$\gamma_{10}+\gamma_{11}c_1+\gamma_{12}c_2+\ldots+\gamma_{1n}c_n=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_{n0}+\gamma_{n1}c_1+\gamma_{n2}c_2+\ldots+\gamma_{nn}c_n=0,$$

причем:

$$\gamma_{kj}=\int_B\int z^{jm}\bar{z}^{km}\,dxdy.$$

Если кроме того область B звездообразна и ее контур задан уравнением $r=r(\varphi)$, вычисление предыдущих интегралов сведется к нахождению

$$\gamma_{kj}=\frac{1}{m(j+k)+2}\int_0^{2\pi} r^{m(j+k)+2}(\varphi)\,e^{i(j-k)m\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{m(j+k)+2}\int_0^{2\pi} r^{m(j+k)+2}\cos m(j-k)\varphi\,d\varphi,$$

так как интегралы с синусами пропадут в виду четности $r(\varphi)$.

Далее, $r(\varphi)$ в силу симметрии области будет иметь период, меньший чем 2π, именно $\frac{2\pi}{m}$, и интеграл по всему промежутку будет равен m раз взятому интегралу по промежутку от 0 до $\frac{2\pi}{m}$, так что

$$\gamma_{kj}=\frac{m}{m(j+k)+2}\int_0^{\frac{2\pi}{m}} r^{m(j+k)+2}\cos m(j-k)\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{m(j+k)+2}\int_0^{2\pi} r^{m(j+k)+2}\left(\frac{\varphi}{m}\right)\cos(j-k)\varphi\,d\varphi.$$

Для нахождения γ_{kj} нам, следовательно, нужно вычислить коэфициенты при $\cos(j-k)\varphi$ в разложении функции $r^{m(j+k)+2}\left(\frac{\varphi}{m}\right)$ в ряд Фурье. Это может быть проведено по обычной схеме. Заметим, что значения разлагаемой в ряд функции на концах промежутка интегрирования здесь могут быть не равны между собой, — и поэтому во всех формулах и таблицах мы должны будем вместо значения функции для $\varphi=0$ взять среднее арифметическое ее граничных значений:

$$\frac{1}{2}\left[r^{m(j+k)+2}(0)+r^{m(j+k)+2}\left(\frac{2\pi}{m}\right)\right].$$

n° 4. О сходимости последовательных приближений. Полнота системы координатных функций. Мы пытались построить функцию $f(z)$, дающую преобразование области B на круг путем минимизации интеграла $I(\varphi)=\iint_B \varphi\bar{\varphi}\,dxdy$ при условии $\varphi(0)=1$, строя последовательные приближения к искомой функции по методу Ритца. Для наших последующих рассуждений безразличен способ построения приближений. Пусть тем или иным путем нам удалось построить так называемую „минимизирующую последовательность" приближений $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z),\ldots$, т. е. такую, что соответствующие этим функциям значения интеграла I

$$I(\varphi_1),\ I(\varphi_2),\ldots$$

сходятся к наименьшему значению $I(\varphi)$:

$$\lim_{n\to\infty} I(\varphi_n)=I(\varphi).$$

Покажем сейчас, что из факта сходимости значений интеграла к минимуму вытекает сходимость минимизирующей последовательности к функции, совершающей требуемое преобразование.

Нам предварительно потребуется изучение некоторых свойств функции $\varphi(z)$.

Рассмотрим следующую допустимую в нашей вариационной задаче функцию

$$\Phi(z)=\varphi(z)+\varepsilon\omega(z),\quad \omega(0)=0,$$

где ε — произвольный параметр.

Важно отметить, что в такой форме может быть представлена любая допустимая функция $\psi(z)$, ибо в предыдущем равенстве для этого достаточно положить $\varepsilon=1$ и $\omega(z)=\psi(z)-\varphi(z)$.

$$I(\Phi)-I(\varphi)=\iint_B(\varphi+\varepsilon\omega)\,(\bar{\varphi}+\bar{\varepsilon}\bar{\omega})dxdy-\iint_B\varphi\bar{\varphi}dxdy=$$

$$=\bar{\varepsilon}\iint_B\varphi\bar{\omega}dxdy+\varepsilon\iint_B\bar{\varphi}\omega dxdy+\varepsilon\bar{\varepsilon}\iint_B\omega\bar{\omega}dxdy.$$

Знак правой части при малом ε определяется первыми членами, линейными относительно ε, и, так как рассматриваемая разность должна быть положительной для любых ε, мы приходим к заключению, что интегралы, стоящие множителями при ε и $\bar{\varepsilon}$, должны равняться нулю.

Таким образом функция $\varphi(z)$, решающая вариационную задачу, обладает тем свойством, что при всяких $\omega(z)$, регулярных в области B и обращающихся в нуль при $z=0$, интеграл

$$\iint_B\varphi(z)\,\overline{\omega(z)}\,dxdy=0.$$

В выражении разности $I(\Phi)-I(\varphi)$ сохранится лишь третий член. Если туда внести вместо $\varepsilon\omega(z)$ его значение $\Phi-\varphi$, получим следующее соотношение:

$$I(\Phi)-I(\varphi)=\iint_B(\Phi-\varphi)\,(\bar{\Phi}-\bar{\varphi})\,dxdy.$$

Докажем утверждение:

Всякая минимизирующая последовательность $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z),\ldots$ сходится во всей области B к производной $\varphi(z)$ от функции $f(z)$, совершающей конформное преобразование этой области на круг; сходимость будет равномерной в любой внутренней части области B.

В самом деле, возьмем любую внутреннюю часть B' области B. Выберем положительное число η, меньшее чем расстояние от точек B' до контура L области B так, чтобы окружность, описанная радиусом η около любой точки области B', лежала целиком внутри B.

Пусть теперь z — любая точка из B'. Опишем около нее окружность радиуса $r<\eta$ и обозначим ее через C_r. По теореме Коши

$$[\varphi_n(z)-\varphi(z)]^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{[\varphi_n(t)-\varphi(t)]^2}{t-z}\,dt.$$

Оценим интеграл. На окружности C_r переменная интегрирования будет: $t=z+re^{i\vartheta}$

$$|\varphi_n(z)-\varphi(z)|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi_n(t)-\varphi(t)|^2\,d\vartheta.$$

Умножив обе части на rdr и проинтегрировав в пределах от нуля до η, получим:

$$|\varphi_n(z)-\varphi(z)|^2\frac{\eta^2}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\eta}\int_0^{2\pi}(\varphi_n-\varphi)\,(\bar{\varphi}_n-\bar{\varphi})\,rdrd\vartheta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint_B(\varphi_n-\varphi)\,(\bar{\varphi}-\bar{\varphi})\,rdrd\vartheta.$$

Интеграл, взятый от квадрата модуля разности $\varphi_n-\varphi$ по всей области B, как нам известно, равен $I(\varphi_n)-I(\varphi)$. Поэтому имеем:

$$|\varphi_n(z)-\varphi(z)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\eta}\sqrt{I(\varphi_n)-I(\varphi)},$$

и так как $\varphi_1,\ \varphi_2\ldots$ по предположению есть минимизирующая последовательность, то $I(\varphi_n)\to I(\varphi)$ и, следовательно, $\varphi_n(z)$ будет равномерно сходиться к $\varphi(z)$.

Из факта равномерной сходимости $\varphi_n(z)$ к $\varphi(z)$ следует, разумеется, сходимость и приближений $f_n(z)=\int_0^z\varphi_n(z)\,dx$ к искомой преобразующей

функции $f(z)$, ибо

$$f_n(z) - f(z) = \int_0^z [\varphi_n(z) - \varphi(z)]\, dz.$$

Не входя в подробности, выходящие за рамки книги, сделаем ряд замечаний о сходимости процесса последовательных приближений, построенных по Ритцу. Пусть, исходя из заранее избранной системы координатных функций $u_0(z)$, $u_1(z)$, ... мы построили последовательность функций, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ ... Будут или не будут эти приближения образовывать минимизирующую последовательность, очевидно, зависит от того, какие координатные функции мы избрали и какова область B. Чтобы функции $\varphi_n(z)$ давали наверное минимизирующую последовательность, нужно, чтобы система функций $u_n(z)$ была бы достаточно полной для области B.

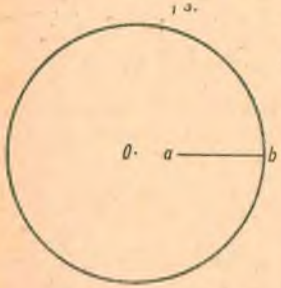


Рис. 18.

Приведем без доказательства наиболее важный и простой относящийся сюда результат. В своем уже цитированном мемуаре Л. Бибербах показал, что для всякой области B, граница L которой будет одновременно границей и внешней области, целые положительные степени z: $1, z, z^2, \ldots z^n, \ldots$ образуют полную систему функций. К такому классу областей будут принадлежать все области, ограниченные кривыми Жордана. Но если область B имеет входящие внутрь ее разрезы, как например, изображенный на рис. (18) круг с входящим внутрь его разрезом вдоль радиуса, степени независимой переменной перестают давать полную систему функций. Причина этого весьма проста. Если бы за координатные функции избрали в этом случае не только степени z, но и любые однозначные в плоскости комплексной переменной функции, то входящие в область разрезы на величины интегралов $\int\int_B u_k \bar{u}_j dxdy$,



Рис. 19.

которые участвуют в качестве коэфициентов в системе уравнений (10), не будут влиять, и поэтому все вычисления проходят так, как будто мы отображаем область без разрезов.

Мы остановились на случае входящих разрезов подробно по той причине, что этот случай представляет известный практический интерес. Поясним, чем должны быть здесь дополнены степени z, чтобы получить полную систему. Допустим ради простоты, что граница L области B состоит из простой кривой Γ и одного разреза, идущего из точки a внутри кривой Γ в точку b, лежащую на этой кривой. Введем вместо переменной z новую переменную $w = \sqrt{a - z}$. На плоскости w изображением области B будет некоторая область Δ, ограниченная контуром без кратных точек;

для нее степени w дают полную систему. Возвращаясь к прежней переменной z, мы видим, что полную систему для области B образуют степени переменной z и их произведения на корень $\sqrt{a - z}$.

n° 5. Внешние области. Метод Бибербаха может быть применен, разумеется, и к преобразованию внешности некоторой кривой на внутренность круга. В самом деле, пусть B — область, содержащая внутри себя бесконечно далекую точку. Рассмотрим функции, регулярные в ней и имеющие на бесконечности разложение вида:

$$t = f(z) = \frac{1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots \tag{15}$$

Они преобразуют B в некоторую область B', содержащую внутри себя начало координат, при этом нуль плоскости t будет соответствовать бесконечно далекой точке плоскости z. Среди этих функций будет заключаться и та, которая преобразует область B в круг с центром в начале координат. Обозначим ее через $\zeta = \varphi(z) = \frac{1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots$, обратную ей через $z = \psi(\zeta)$. Площадь изображения B' области B будет равна интегралу

$$\int\int_B f'(z)\, \overline{f'(z)}\, dxdy. \tag{16}$$

Покажем, что эта площадь больше, чем площадь круга G, на который преобразуется B функцией $\varphi(z)$, т. е. $\varphi(z)$ обладает тем же экстремальным свойством, что и для конечных областей.

Рассмотрим для этой цели функцию $t = \Phi(\zeta)$, преобразующую G в B' и составленную следующим образом. Сначала при помощи $z = \psi(\zeta)$ преобразуем G в B и затем посредством $t = f(z)$ область B в B'

$$t = \Phi(\zeta) = f[\psi(\zeta)].$$

Очевидно $\Phi(0) = 0$. Легко можно установить кроме того, что производная от $\Phi(\zeta)$ в начале координат равна единице. Действительно:

$$\Phi'(\zeta) = f'(z)\, \psi'(\zeta) = f'(z) \frac{1}{\varphi'(z)} = \frac{-\frac{1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \ldots}{-\frac{1}{z^2} - \frac{2b_2}{z^3} - \ldots} = 1 + \frac{c_1}{z} + \ldots$$

и при $z \to \infty$, что соответствует $\zeta \to 0$, $\Phi(\zeta) \to 1$.

Но если функция $\Phi(z)$, преобразующая G в B', имеет производную, равную единице при $\zeta = 0$, то, по доказанному раньше, площадь B' должна быть больше площади круга.

Задача о разыскании $\varphi(z)$ таким образом сводится к задаче о нахождении среди функций типа (15) той, которая дает минимум интегралу (16). Методы приближенного построения ее аналогичны методам, примененным в случае конечных областей, и мы на них останавливаться не будем.

§ 3. Метод конформного преобразования, аналогичный методу Бибербаха

n° 1. Экстремальное свойство преобразующей функции. Наряду с экстремальным свойством, характеризующим функцию, преобразующую конформно заданную область на круг, указанным Л. Бибербахом, можно дать еще одну экстремальную характеристику этой функции, приводящую при практических приложениях к вычислениям, аналогичным тем, которые приходится проводить при применении метода Бибербаха.

Пусть круг радиуса R плоскости ζ преобразуется при помощи голоморфной в круге функции

$$z = f(\zeta), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) \neq 0$$

на некоторую область B', природа которой нам сейчас безразлична. Назовем контур ее через L' и будем предполагать его спрямляемой кривой.

Получим основную для нас зависимость между его длиной S' и значением $f'(0)$. Применим к $f'(\zeta)$ формулу Коши

$$f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{f'(t)}{t-\zeta}\, dt.$$

Полагая здесь $\zeta = 0$ и имея в виду, что $t = Re^{i\theta}$, найдем:

$$|f'(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi R} \int_{|t|=R} |f'(t)|\,|dt| = \frac{1}{2\pi R} \int_{L'} |dz|.$$

Но интеграл, стоящий справа, дает длину S' контура L', и потому:

$$S' \geqslant 2\pi R\,|f'(0)|. \tag{1}$$

Знак равенства при этом может иметь место, как известно из теории функций комплексной переменной, только в том случае, когда $f'(\zeta) = \text{const}$, т. е. когда преобразование будет линейным вида $z = a\zeta$.

Допустим, что при преобразовании масштаб в начале координат не искажается, т. е. $|f'(0)| = 1$. Из неравенства (1) тогда следует, что длина L' во всяком случае не меньше длины $2\pi R$ окружности исходного круга и может ей равняться только в том случае, когда преобразование сводится к простому вращению круга около центра. Мы пришли таким образом к следующему основному для метода результату:

При преобразовании круга $|\zeta| < R$ с помощью регулярной функции

$$z = f(\zeta), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

длина контура отображаемой области увеличивается, если исключить тривиальный случай $f(\zeta) = \zeta$.

Рассмотрим теперь всевозможные конформные преобразования области B, совершаемые при помощи регулярных в B функций:

$$\zeta = f(z), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \tag{2}$$

Рассуждениями, совершенно подобными тем, которые мы проводили в n° 1 § 2 при изложении метода Бибербаха, можно без затруднения установить, что *среди них функция, дающая конформное преобразование области B на круг, обладает тем свойством, что она дает наименьшее значение интегралу*

$$I = \int_L |f'(z)|\, ds, \tag{3}$$

равному длине изображения контура L.

n° 2. Применение метода Ритца. При вычислениях удобнее искать приближения не непосредственно к $f'(z)$, в виду линейности подинтегрального выражения относительно $|f'(z)|$, а к $\sqrt{f'(z)}$. Допустимыми к конкуренции будут все функции $\varphi(z)$, обращающиеся в единицу в начале координат. Среди них мы будем искать ту, которая дает наименьшее значение интегралу:

$$I = \int_L |\varphi(z)|^2\, ds = \int_L \varphi(z)\,\overline{\varphi}(z)\, ds. \tag{4}$$

Если нам удастся разыскать решение нашей вариационной задачи, то функция, совершающая искомое преобразование, определится по формуле:

$$f(z) = \int_0^z \varphi^2(z)\, dz.$$

Рассуждения, связанные с применением метода Ритца по разысканию $\varphi(z)$, будут буквально те же, что и в методе Бибербаха; достаточно слово в слово повторить все, что говорилось нами по этому поводу в n° 2 § 2, заменив однако все фигурирующие там двойные интегралы по области B на криволинейные интегралы по контуру L. Мы не будем их воспроизводить вторично и обратим внимание читателя только на те части изложения, которые представят известные расхождения с прежними.

Система уравнений (10) n° 2, § 2, из которой должны быть определены коэфициенты c_k линейной комбинации $\varphi_n(z)$, являющейся наилучшим приближением при закрепленном n к $\varphi(z)$, значительно упрощается, если исходить из ортогональной системы функции $u_k(z)$; но здесь ортогональность нужно понимать не по области B, как раньше, а по контуру L в смысле равенства:

$$\int_L u_k(z)\,\overline{u_j(z)}\, ds = 0, \quad \text{при } k \neq j. \tag{5}$$

Как конкретно осуществляется построение ортогональной системы при выборе за координатные функции $u_k(z)$ целых положительных степеней z и полученные в результате ортогонализации полиномы применяются к конформному преобразованию, — мы увидим позже, когда будем го-

верить об исследованиях Сеге. Примененный там аппарат определителей остается, разумеется, при надлежащих видоизменениях, пригодным и для построения любой ортогональной системы функций.

Доказательство сходимости, которые мы приводили в п° 4 для метода Бибербаха, для излагаемого метода должно быть подвергнуто некоторым видоизменениям.

Пусть функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ ... образуют минимизирующую последовательность, т. е. соответствующие им значения интеграла (4) сходятся к минимуму:

$$\lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) = I(\varphi).$$

Покажем, что тогда $\varphi_n(z)$ будут равномерно сходиться во всякой внутренней части области B к функции $\varphi(z)$, решающей задачу.

В самом деле, так же как и в п° 4, § 2, можно показать, что разность между значением интеграла $I(\Phi)$ для любой допустимой функции Φ и его минимальным значением $I(\varphi)$ имеет следующее выражение:

$$I(\Phi) - I(\varphi) = \int_L (\Phi - \varphi)\ (\overline{\Phi} - \overline{\varphi})\, ds.$$

Возьмем любую внутреннюю часть B' области B. Пусть z есть точка из B' и t — точка на контуре L. Разность $t - z$ по модулю будет не меньше некоторого η.

По формуле Коши имеем:

$$\varphi_n(z) - \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_n(t) - \varphi(t)}{t - z}\, dt,$$

$$|\varphi_n(z) - \varphi(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi\eta}\int_L |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi\eta}\left\{\int_L 1^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_L |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{s}}{2\pi\eta}\sqrt{I(\varphi_n) - I(\varphi)}.$$

Так как $I(\varphi_n) \to I(\varphi)$ по предположению, мы видим, что $\varphi_n(z)$ сходится к $\varphi(z)$ равномерно в области B'.

Таким образом, если взятая система координатных функций $u_k(z)$ достаточно полна в том смысле, что построенные при помощи ее последовательные приближения $\varphi_n(z)$ образуют минимизирующую последовательность, мы можем быть уверенными в том, что при достаточно большом n подойдем к $\varphi(z)$ внутри B как угодно близко.

Свойства, которыми должны обладать координатные функции для того, чтобы построенные по методу Ритца приближения образовали

минимизирующую последовательность, будут зависеть от свойств контура L области B.

Для подавляющего большинства практически встречающихся контуров уже простейшие функции — целые степени z образуют полную систему. Так, результаты исследований В. И. Смирнова по теории ортогональных полиномов [1] показали, что если L — простая кривая и логарифм модуля производной от функции, преобразующей единичный круг на область B, представим интегралом Пуассона, то полиномы образуют полную систему на контуре L.

В частности это имеет место для всех простых кусочно-гладких контуров.

Наконец последнее замечание, касающееся вычислений для случая, когда за координатные функции взяты степени z.

$$\varphi_n(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n.$$

Коэфициенты c_k определяются из системы:

$$\alpha_{j0} + \alpha_{j1}c_1 + \alpha_{j2}c_2 + \ldots + \alpha_{jn}c_n = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

$$\alpha_{jk} = \int_L \bar{z}^j z^k ds = \int_L r^{k+j} e^{i(k-j)\vartheta} ds =$$

$$= \int_L r^{k+j}\frac{ds}{d\vartheta}\cos(k-j)\vartheta\, d\vartheta + i\int_L r^{k+j}\frac{ds}{d\vartheta}\sin(k-j)\vartheta\, d\vartheta.$$

Вычисление коэфициента системы приводит, следовательно, к определению коэфициентов Фурье для функций $r^{k+j}\frac{ds}{d\vartheta}$.

п° 3. Преобразование внешних областей. Пусть B — односвязная область, содержащая внутри себя бесконечно далекую точку и ограниченная спрямляемым контуром L.

Рассмотрим функции $\zeta = f(z)$, голоморфные в B и имеющие вблизи бесконечно далекой точки разложение вида:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z_n} + \ldots \tag{6}$$

Прямым следствием результата, полученного нами в п° 1, является следующее утверждение.

Среди функций вида (6) будет содержаться функция, дающая конформное преобразование области B на круг плоскости с центром в начале координат. От всех функций того же вида она будет отличаться тем, что дает минимальное значение интегралу

$$I = \int_L |f'(z)|\, ds.$$

[1] См. Smirnoff, Sur la théorie des polynomes orthogonaux..., журнал Ленинградского физико-математического общества, том. II, вып. I, 1928 г.

Аналогичное свойство имеет место и в случае преобразования внешних областей друг в друга. В самом деле, пусть $z=f(\zeta)$ есть функция, голоморфная вне круга $|\zeta|\leqslant R$ и имеющая разложение около бесконечно далекой точки вида:

$$f(\zeta)=c\zeta+c_0+\frac{c_1}{\zeta}+\ldots+\frac{c_n}{\zeta_n}+\ldots$$

Оценим длину S кривой, в которую преобразуется окружность $|\zeta|=R$ при помощи этой функции.

$$f'(\zeta)=c-\frac{c_1}{\zeta^2}-\frac{2c_2}{\zeta^3}-\ldots$$

Умножая это равенство на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta}{\zeta}$ и проинтегрировав по окружности $\zeta|=R$, имеем:

$$c=f'(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R} f'(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Отсюда путем оценки получаем:

$$|c|=|f'(\infty)|\leqslant\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|\zeta|=R}|f'(\zeta)||d\zeta|=\frac{S}{2\pi R}$$

$$S\geqslant 2\pi R|f'(\infty)|.$$

При этом знак равенства возможен только в случае, когда $f'(\zeta)=\text{const}$, т. е. когда преобразование будет движением плоскости как целого.

Если $f'(\infty)=1$, $S\geqslant 2\pi R$. Таким образом при такого рода преобразованиях длина изображения окружности будет больше самой окружности.

Тем же путем, что и прежде, отсюда получаем следующую теорему.

Среди всех функций, голоморфных в B и имеющих вблизи бесконечно далекой точки разложение вида

$$\zeta=f(z)=z+c_0+\frac{c_1}{z^2}+\frac{c^2}{z^2}+\ldots, \tag{7}$$

функция, доставляющая конформное преобразование области B на внешность окружности с центром в начале кординат плоскости ζ, отличается тем, что дает минимальное значение интегралу:

$$I=\int\limits_L|f'(z)|\,ds.$$

Мы ограничимся этими краткими указаниями на экстремальное свойство функции, доставляющей искомое конформное преобразование, ибо методы ее приближенного нахождения весьма сходны с теми, которые мы применяли для случая ограниченных областей, и читатель без труда сможет перенести их на разбираемый случай.

§ 4. Ортогональные полиномы и конформное преобразование

n° 1. Полиномы Сеге. Ряд Тейлора, являющийся универсальным орудием аналитического представления функций, голоморфных в некотором круге, становится однако совершенно недостаточным в случае, когда область не будет кругом, и поэтому возникает вопрос о создании аналитического аппарата, играющего такую же роль для заданной области, как и ряд Тейлора в круге. Более точно — нужно указать такую последовательность функций, которая зависела бы только от вида области, что всякую функцию, голоморфную в этой области, можно разложить в ряд по функциям последовательности. Само собой разумеется, к избираемым координатным функциям естественно предъявить условие их наибольшей простоты, требуя, например, чтобы за них были взяты некоторые специального вида полиномы или иного рода хорошо известные функции. В двадцатых годах текущего столетия берлинскими учеными — Сеге Бохнером и Бергман — были сделаны две интересные попытки построения такого аппарата. [1] Они имеют тесное соприкосновение с задачей конформного преобразования, и мы их изложим лишь в той мере, в какой это нужно для приближенного практического осуществления таких преобразований.

Мы начнем наше изложение с полиномов, ортогональных в смысле Сеге.

Пусть L — произвольная спрямляемая кривая длины l; нам нет пока необходимости предполагать ее замкнутой.

Построим систему полиномов:

$$P_0(z),\ P_1(z),\ \ldots,\ P_n(z),\ \ldots \tag{1}$$

обладающих следующими свойствами:

1) $P_n(z)$ — полином степени n от z;

2) коэфициент при z^n в $P_n(z)$ положителен;

3) полиномы $P_n(z)$ — ортогонально нормированы вдоль кривой L:

$$\frac{1}{l}\int\limits_L P_m(z)\,\overline{P_n(z)}\,ds=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq n\\ 1 & \text{при } n=m\end{cases}. \tag{2}$$

Такие полиномы могут быть последовательно найдены друг за другом по известному процессу ортогонализации Э. Шмидта. Мы предпочтем дать сразу же готовое выражение для них в форме определителей, которые легко могут быть вычислены, ибо все переменные величины в них сосредоточены в одной строке.

---

[1] Szegö. Ueber orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören, Mathem. Zeitschrift, Bd 9, 1921; Bochner, Ueber orthogonale Systeme analytischer Funktionen, Mathemat. Zeitschrift, Bd 14, 1921; Bergmann, Ueber die Entwickelung. Mafh. Ann. Bd 86, 1922; Smirnoff, Sur la théorie des polynomes orthogonaux, Журн. Ленинградск. Физ.-мат. об-ва, том II, вып. I, 1928.

Введем следующие обозначения:

$$h_{pq}=\frac{1}{l}\int_L \zeta^p\bar{\zeta}^q\,ds. \tag{3}$$

Очевидно:

$$h_{pq}=\overline{h}_{qp}.$$

Составим определители D_n из чисел h_{pq} следующим способом:

$$D_0=1,\quad D_n=\begin{vmatrix} h_{00}, & h_{10}, & \dots, & h_{n0}\\ h_{01}, & h_{11}, & \dots, & h_{n1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ h_{0n}, & h_{1n}, & \dots, & h_{nn}\end{vmatrix}.$$

Они будут определителями следующих определенных положительных квадратичных форм Эрмита:

$$H_n(t)=\sum_{p,q=0}^{n} h_{pq}t_p\bar{t}_q=\frac{1}{l}\int_L |t_0+t_1\zeta+\dots+t_n\zeta^n|^2\,ds,$$

и поэтому все наверное будут вещественными положительными числами:

$$D_n>0.$$

Мы утверждаем, что:

$$F_n(z)=\frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}\begin{vmatrix} h_{00}, & h_{10}, & \dots, & h_{n0}\\ h_{01}, & h_{11}, & \dots, & h_{n1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ h_{0,\,n-1}, & h_{1,\,n-1}, & \dots, & h_{n,\,n-1}\\ 1, & z, & \dots, & z^n\end{vmatrix} \tag{4}$$

В самом деле, если разложить определитель по элементам последней строки, то сразу же видно, что $P_n(z)$ — полином степени n, при этом коэфициентом при z^n будет $\sqrt{\dfrac{D_{n-1}}{D_n}}>0$.

Осталось проверить еще свойство 3. Умножим для этого $P_n(\zeta)$ на $\frac{1}{l}\bar{\zeta}^\nu ds$ и проинтегрируем по L:

$$\frac{1}{l}\int_L P_n(\zeta)\,\bar{\zeta}^\nu ds=\frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}\begin{vmatrix} h_{00}, & h_{10}, & \dots, & h_{n0}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ h_{0,\,n-1}, & h_{1,\,n-1}, & \dots, & h_{n,\,n-1}\\ h_{0\nu}, & h_{1\nu}, & \dots, & h_{n\nu}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{cases} 0 \text{ при } \nu<n\\ \dfrac{D_n}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}=\sqrt{\dfrac{D_n}{D_{n-1}}} \text{ при } \nu=n.\end{cases}$$

Поэтому $P_n(z)$ будет ортогональным ко всякому полиному степени ниже чем n; что касается нормированности $P_n(z)$, то она проверяется без затруднений:

$$\frac{1}{l}\int_L |P_n(\zeta)|^2\,ds=\frac{1}{l}\int_L P_n(\zeta)\,\overline{P_n(\zeta)}\,ds=$$

$$=\frac{1}{l}\int_L P_n(\zeta)\sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\,\bar{\zeta}^n ds=1.$$

Вопрос о разложении произвольной функции в ряд по ортогональным полиномам Сеге исследовал при очень ограничительных предположениях о виде контура L и о характере граничных значений разлагаемой функции, требуя их аналитичности. Несколько лет позже В. И. Смирнов в уже указанной нами работе весьма обстоятельно исследовал этот вопрос и дал общие критерии сходимости такого рода разложений. Для нас явится достаточным следующий результат, приводимый нами без доказательства.

Если L — кусочно-гладкая замкнутая простая кривая, функция $f(z)$ голоморфна внутри L, имеет почти везде предельные значения на L и представима через них при помощи интеграла Коши, то $f(z)$ можно разложить в ряд по ортогональным полиномам вида:

$$f(z)=A_0P_0(z)+A_1P_1(z)+\dots+A_nP_n(z)+\dots \tag{5}$$

сходящийся всюду внутри L, коэфициенты A_n которого определяются по формулам:

$$A_n=\frac{1}{l}\int_L f(z)\,\overline{P_n(z)}\,ds. \tag{6}$$

n° 2. Приложение к конформному преобразованию. В плоскости комплексной переменной z дана односвязная область B, ограниченная кусочно-гладким контуром L. Назовем через $\zeta=\gamma(z)$ функцию, кон-

формно преобразующую ее на круг с центром в начале координат, так, что точка a из B переходит в центр круга: $\gamma(a)=0$ и $\gamma'(a)=1$.

По доказанному в § 3 $\sqrt{\gamma'(z)}$ дает минимум интегралу

$$I=\frac{1}{l}\int_L |f(z)|^2 ds \tag{7}$$

по сравнению со всякими функциями $f(z)$, регулярными в B и нормированными в точке a:

$$f(a)=1.$$

Разложим $f(z)$ в ряд по ортогональным в смысле Сеге полиномам:

$$f(z)=t_0P_0(z)+t_1P_1(z)+\ldots+t_nP_n(z)+\ldots$$

В виду $f(a)=1$ коэфициенты разложения должны удовлетворять условию

$$t_0P_0(a)+t_1P_1(a)+\ldots+t_nP_n(a)+\ldots=1. \tag{8}$$

Подставив вместо $f(z)$ ее разложение под знак интеграла (7), получим:

$$\frac{1}{l}\int_L f(z)\overline{f(z)}\,ds=t_0\bar{t}_0+t_1\bar{t}_1+\ldots+t_n\bar{t}_n+\ldots \tag{9}$$

Система коэфициентов, отвечающая случаю $f(z)=\sqrt{\gamma'(z)}$, должна давать минимальное значение сумме (9) при условии (8). Обозначим эти коэфициенты через δ_ν и положим $t_\nu=\delta_\nu+\varepsilon\eta_\nu$. Числа η_ν, так как для δ_ν наверное соблюдено условие $\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu P_\nu(a)=1$, должны удовлетворять требованию

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\eta_\nu P_\nu(a)=0. \tag{10}$$

Подстановка вместо t_ν их значений в (9) дает

$$\frac{1}{l}\int_L f(z)\overline{f(z)}\,ds=\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu\bar{\delta}_\nu+\varepsilon\sum_{\nu=0}^{\infty}\eta_\nu\bar{\delta}_\nu+\bar{\varepsilon}\sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{\eta}_\nu\delta_\nu+\varepsilon\bar{\varepsilon}\sum_{\nu=0}^{\infty}\eta_\nu\bar{\eta}_\nu.$$

Чтобы написанное выражение было не меньше $\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu\bar{\delta}_\nu$, равной минимальному значению интеграла, при всяких ε, необходимо и достаточно, чтобы коэфициенты при ε и $\bar{\varepsilon}$ были равны нулю при всяких η_ν, подчиненных равенству (10):

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\eta_\nu\bar{\delta}_\nu=0,\quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{\eta}_\nu\delta_\nu=0.$$

Внесем в первое из них вместо η_{i0} его значение из (10)

$$\eta_{i0}=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_{i\nu}P_\nu(a),\quad \text{ибо}\quad P_0(z)=1$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_{i\nu}[\bar{\delta}_\nu-\bar{\delta}_0P_\nu(a)]=0.$$

В виду произвола $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots$ это равенство может иметь место лишь в том случае, когда:

$$\bar{\delta}_\nu=\bar{\delta}_0I_\nu(a).$$

Далее, подставляя вместо δ_ν найденные значения в условие

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu P_\nu(a)=1,$$

имеем:

$$\delta_0\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(a)\overline{P_\nu(a)}=1.$$

Следовательно, если положить

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\overline{P_\nu(a)}\,P_\nu(z)=K(a,z),$$

будем иметь:

$$\bar{\delta}_0=\delta_0=\frac{1}{K(a,a)}=\frac{\overline{P_0(a)}}{K(a,a)},$$

$$\delta_\nu=\frac{\overline{P_\nu(a)}}{K(a,a)},$$

$$\sqrt{\gamma'(z)}=\frac{1}{K(a,a)}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\overline{P_\nu(a)}\,P_\nu(z)=\frac{K(a,z)}{K(a,a)},$$

$$\gamma(z)=\frac{1}{K^2(a,a)}\int_a^z K^2(a,z)\,dz. \tag{11}$$

Это и есть искомое выражение для преобразующей функции $\gamma(z)$.

Отсюда легко получается приближенная формула. Если известны лишь n полиномов $P_\nu(z)$ и $K_n(a,z)=\sum_{\nu=0}^{n}\overline{P_\nu(a)}\,P_\nu(a)$, получим:

$$\gamma(z)\cong\frac{1}{K_n^2(a,a)}\int_a^z K_n^2(a,z)\,dz. \tag{12}$$

Можно просто вычислить радиус R круга, на который отражается область B. Длина окружности круга имеет следующее выражение:

$$2\pi R = \int_L |\gamma'(z)|\,ds = \frac{1}{K^2(a,a)} \int_L K(a,z)\,\overline{K(a,z)}\,ds =$$

$$= \frac{l}{K^2(a,a)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{P_\nu(a)}\,P_\nu(a) = \frac{l}{K(a,a)},$$

откуда:

$$R = \frac{l}{2\pi} \frac{1}{K(a,a)}.$$

Чтобы получить функцию $\gamma^*(z)$, дающую преобразование B на единичный круг, достаточно разделить $\gamma(z)$ на R

$$\gamma^*(z) = \frac{2\pi}{l} \frac{1}{K(a,a)} \int_a^z K^2(a,z)\,dz. \tag{13}$$

Ортогональные полиномы могут быть использованы для построения функции, преобразующей внешность контура L на внешность единичного круга. Сеге было установлено следующее предложение, которое мы приводим без доказательства: [1]

Функция $\zeta = f(z)$, преобразующая внешность кривой L плоскости z на внешность единичного круга плоскости ζ так, что точки $z=\infty$ и $\zeta=\infty$ переходят друг в друга, и кроме того $f'(\infty)$ равна вещественному числу, выражается через ортогональные полиномы следующим образом:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)}.$$

n° 3. Полиномы Бохнера — Бегмана. Обратимся к изложению теории ортогональных полиномов по области. Мы отступим от общей точки зрения, которой придерживался Бохнер, развивая теорию ортогональных в заданной области функций, и изложим ее применительно к многочленам.

Пусть B — односвязная область плоскости комплексной переменной z, ограниченная кривой Жордана. Построим систему полиномов

$$\Pi_0(z),\ \Pi_1(z),\ \ldots.\ \Pi_n(z),\ \ldots$$

удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $\Pi_n(z)$ есть полином степени n;

2) коэфициент при z^n в $\Pi_n(z)$ есть положительное число;

[1] Mathematische Zeitschrift, Bd 9, 1912.

3) полиномы $\Pi_n(z)$ ортогональны и нормированы в области B:

$$\frac{1}{S} \iint_B \Pi_m(z) \cdot \overline{\Pi_n(z)}\,dxdy = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ при } m \neq n \\ 1 \text{ при } m = n \end{array} \right\}, \tag{14}$$

где S — площадь области B.

Как и полиномы Сеге, полиномы Бохнера — Бергмана могут быть представлены в форме определителей. Разница будет заключаться только в том, что в образовании их вместо интегралов по контуру будут участвовать интегралы по области.

Введем постоянные:

$$\gamma_{pq} = \frac{1}{S} \iint_B z^p \bar{z}^q\,dxdy \tag{15}$$

и составим из них определители Δ_n, аналогичные D_n из n° 1.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \gamma_{00}, & \gamma_{10}, & \ldots, & \gamma_{n0} \\ \gamma_{01}, & \gamma_{11}, & \ldots, & \gamma_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{0n}, & \gamma_{1n}, & \ldots, & \gamma_{nn} \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Полиномы $\Pi_n(z)$ имеют форму

$$\Pi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1} \cdot \Delta_n}} \begin{vmatrix} \gamma_{00}, & \gamma_{10}, & \ldots, & \gamma_{n0} \\ \gamma_{01}, & \gamma_{11}, & \ldots, & \gamma_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{0,n-1}, & \gamma_{1,n-1}, & \ldots, & \gamma_{n,n-1} \\ 1, & z, & \ldots, & z^n \end{vmatrix} \tag{17}$$

Бибербаху принадлежит доказательство теоремы о том, что построенные таким способом полиномы образуют для рассматриваемых нами областей полную замкнутую систему и всякая функция $f(z)$, голоморфная в B, для которой интеграл

$$\iint_B f(z)\,\overline{f}(z)\,dxdy$$

имеет конечное значение, разложима единственным способом в ряд по полиномам $\Pi_n(z)$:

$$f(z) = A_0\Pi_0(z) + A_1\Pi_1(z) + \ldots + A_n\Pi_n(z) + \ldots \tag{18}$$

коэфициенты A_n которого определяются равенствами:

$$A_n = \frac{1}{S} \iint_B f(z)\,\overline{\Pi_n(z)}\,dxdy. \tag{19}$$

n° 4. Приложение к конформному преобразованию. Из § 2 нам известно, что функция $\zeta = \gamma(z)$, доставляющая конформное преобразование области B на круг с центром в начале координат так, что точка a переходит в центр и $\gamma'(a) = 1$, дает минимальное значение интегралу

$$I = \int\int_B f'(z)\overline{f'(z)}\,dxdy$$

по отношению всяких функций $f(z)$, голоморфных в B и удовлетворяющих условиям

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 1.$$

Совершенно аналогично тому, как мы это делали в n° 2, можно установить, что $\gamma(z)$ выражается через полиномы $\Pi_n(z)$ следующим образом:

$$\gamma(z) = \frac{1}{\varkappa(a, a)} \int_a^z \varkappa(a, z)\,dz \tag{20}$$

$$\varkappa(a, z) = \overline{\Pi_0(a)}\,\Pi_0(z) + \overline{\Pi_1(a)}\,\Pi_1(z) + \dots$$

Площадь круга, являющегося изображением области B, будет:

$$\pi R^2 = \int\int_B \gamma'(z)\overline{\gamma'(z)}\,dxdy = \frac{S}{\varkappa^2(a, a)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\Pi_\nu(a)}\,\Pi_\nu(a) = \frac{S}{\varkappa(a, a)},$$

следовательно:

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi\varkappa(a, a)}}.$$

Функция $\gamma^*(z)$, преобразующая область B на единичный круг, поэтому имеет вид:

$$\gamma^*(z) = \sqrt{\frac{\pi}{S\varkappa(a, a)}} \int_a^z \varkappa(a, z)\,dz.$$

§ 5. Разложение в ряд по степеням малого параметра в случае преобразования области в круг

n° 1. Приведение к системам уравнений. В своих исследованиях по теории конформного преобразования Л. Бибербах пытается построить такой полином, который по возможности мало бы отличался от функции, дающей конформное преобразование области на круг; степень же приближения полинома к этой функции им оценивается по тому, насколько площадь преобразованной области отличается от минимального значения площади изображения, соответствующего преобразованию области на круг. Можно пытаться приближаться к искомой функции, принимая за меру отклонения каждого приближения от решения задачи иные признаки,

чем это делал Бибербах. Например, можно бы было в области B рассматривать полиномы $P_n(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ и выбрать коэфициенты a_k, так, чтобы модуль $P_n(z)$ отклонялся бы от некоторой постоянной величины ρ, измеряющей радиус той окружности, на которую мы хотим совершить отображение, наименьшим образом, когда точка z пробегает контур области. При выбранной системе коэфициентов $a_1 \dots a_n$ величина отклонения измеряется экстремальным значением разности $|P_n(z)| - \rho$ и дело аналитически сводилось бы к тому, чтобы найти такую систему коэфициентов, которой соответствовало бы наименьшее абсолютное значение упомянутого экстремума. Такую же задачу можно бы было поставить относительно наименьшего среднего отклонения того или иного вида, например среднего квадратического, а не наименьшего экстремального отклонения, и т. д.

Как пример такого типа приближений мы рассмотрим сейчас один простой прием, позволяющий в некоторых случаях сравнительно просто найти приближенно отображающую функцию. Он основан на следующих элементарных соображениях.

Пусть t есть параметр, определяющий положение точки на контуре, и

$$z = z(t)$$

есть уравнение контура.

Если в функцию $f(z)$, определенную в области B и на ее границе, подставить вместо z его выражение через t, мы получим предельные значения $f(z)$ на контуре в функции от параметра t. Допустим простоты ради, что интервал изменения параметра есть $(0, 2\pi)$; $f[z(t)]$ будет периодической функцией периода 2π.

Разложим $|f[z(t)]|^2$ в тригонометрический ряд по кратным дугам t:

$$|f[z(t)]|^2 = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nt + c_n' \sin nt). \tag{1}$$

Среди всех функций, удовлетворяющих требованиям

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f'(z) \neq 0 \text{ в } B,$$

функция, совершающая конформное преобразование области на круг, будет единственной, для которой квадрат модуля сохраняет постоянное значение, когда z меняется на границе области B, и ряд (1) для нее приводится лишь к первому числу

$$|f[z(t)]|^2 = c_0 = \rho^2. \tag{2}$$

Мы воспользуемся этим обстоятельством для приближенного построения искомой функции. Будем исходить из некоторой системы функций:

$$u_1(z), \quad u_2(z), \dots, u_n(z), \dots \tag{3}$$

голоморфных в области B и удовлетворяющих там требованиям:

$$u_n(0) = 0, \quad n = 1, 2 \dots$$

$$u_1'(0) = 1, \quad u_n'(0) = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

Составим линейную комбинацию из n первых функций $u_n(z)$

$$U_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k(z), \qquad \alpha_1 = 1, \tag{4}$$

и рассмотрим квадрат модуля U_n на границе области B. Коэфициенты разложения его в тригонометрический ряд по t будут квадратными функциями от α_k. Будем теперь выбирать эти числа α_k так, чтобы разложение для $|U_n|^2$ в тригонометрический ряд на границе наилучшим образом удовлетворило бы равенству (2) в том смысле, что наибольшее возможное число первых членов этого ряда обращалось бы в нуль. Приравнивая нулю коэфициенты при $\cos t$, $\sin t, \ldots$ в ряду, получим систему алгебраических уравнений относительно α_k.

Вид ее будет зависеть от контура L области B и от того, какую систему функций $u_n(z)$ мы берем.

Чтобы иметь в виду что-либо определенное, мы рассмотрим наиболее удобный в практических приложениях случай, когда

$$u_1(z) = z, \quad u_2(z) = z^2 \ldots \quad u_n(z) = z^n, \ldots$$

и $U_n(z)$ есть полином:

$$U_n(z) = P_n(z) = z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n.$$

Мы будем дальше предполагать, что контур L области есть кривая, близкая к кругу, определенная уравнением

$$z(t) = e^{it}[1 + \lambda F(e^{it}, \lambda)], \tag{5}$$

где $F(\tau, \lambda)$ есть аналитическая функция своих аргументов при $|\tau|$ близком к единице, и λ близком к нулю. Ее мы можем разложить в ряд Лорана по $\tau = e^{it}$, коэфициенты $\widetilde{\beta}_\nu$ которого будут аналитическими функциями от λ:

$$z(t) = e^{it}\left[1 + \lambda \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \widetilde{\beta}_\nu(\lambda)\, e^{it\nu}\right]. \tag{6}$$

Для упрощения обозначений ряд (6) мы ниже будем писать в форме:

$$z(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \beta_\nu^{(1)}(\lambda)\, e^{it\nu}, \tag{7}$$

где положено

$$\lambda\widetilde{\beta}_{\nu+1} = \beta_\nu^{(1)}(\lambda) \quad \text{при} \quad \nu \neq 1 \quad \text{и} \quad \beta_1^{(1)}(\lambda) = 1 + \lambda\widetilde{\beta}_0\lambda). \tag{7'}$$

Нам потребуются дальше еще степени $z(t)$. После возведения $z(t)$ в степень k мы получим ряд Лорана вида

$$z^k(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \beta_\nu^{(k)}(\lambda)\, e^{i\nu t},$$

коэфициенты которого легко могут быть выражены через $\beta_\nu^{(1)}(\lambda)$. Относительно их можно утверждать следующее:

Так как при $\lambda = 0$, $z(t) = e^{it}$ и $z^k(t) = e^{itk}$, все $\beta_\nu^{(k)}(\lambda)$ обращаются в нуль при $\lambda = 0$, если $\nu \neq k$ и $\beta_k^{(k)}(\lambda)$ обращается в единицу:

$$\beta_\nu^{(k)}(0) = 0, \quad \nu \neq k \quad \text{и} \quad \beta_k^{(k)}(0) = 1.$$

Рассмотрим теперь квадрат модуля полинома:

$$P_n(z)\,\overline{P_n(z)} = \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k\bar{\alpha}_j \cdot z^\nu\bar{z}^j, \quad \alpha_1 = 1,$$

Подставляя сюда вместо z его значение на контуре области B, получаем:

$$P_n(z)\,\overline{P_n(z)} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k\bar{\alpha}_j \sum_{p,q=-\infty;\ p-q=\nu}^{+\infty} \beta_p^{(k)}(\lambda)\,\bar{\beta}_q^{(j)}(\lambda)\, e^{i\nu t}.$$

В правой части равенства стоит тригонометрический ряд, коэфициенты которого зависят от α_k; приравняв в этом выражении свободный член ρ^2, получим приближенное равенство для определения радиуса круга, на который отображается наша область:

$$\rho^2 = \sum_{k,\,j=1}^{n} \alpha_k\bar{\alpha}_j \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_p^{(k)}\bar{\beta}_p^{(j)}. \tag{8}$$

Числа $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ выбираем так, чтобы обращались в нуль коэфициенты при $e^{it}, e^{2it}, \ldots e^{(n-1)it}$:

$$\sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k\bar{\alpha}_j \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_p^{(k)}\beta_{p-m}^{(j)} = 0, \quad m = 1, \ldots n-1. \tag{9}$$

Коэфициенты при $e^{-it}, e^{-2it}, \ldots, e^{-(n-1)it}$ очевидно также обратятся в нуль, ибо они являются величинами, сопряженными со взятыми нами коэфициентами.

Изучим более подробно эту систему.

Свободный член уравнения, не зависящий от $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, соответствует случаю $k = 1$, $j = 1$ и имеет следующее строение:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_p^{(1)}\bar{\beta}_{p-m}^{(1)}.$$

Отсюда видно, что разложение его по степеням λ не содержит членов, свободных от λ, так как разложения всех коэфициентов $\beta_p^{(1)}(\lambda)$, за исключением $\beta_1^{(1)}(\lambda)$, не содержат свободных членов; произведение же $\beta_1^{(1)}(\lambda)\,\bar{\beta}_1^{(1)}(\lambda)$ наверное не содержится в написанной сумме ни при каком m.

Представляет интерес отметить один частный случай, полезный нам для последующего.

Пусть контур области будет таким, что соответствующее ему уравнение имеет форму

$$(10)\qquad z(t)=e^{it}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|\nu|}\delta_\nu^{(1)}(\lambda)\,e^{i\nu t}=$$

$$=e^{it}\left\{\delta_0^{(1)}(\lambda)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda^\nu\left[\delta_\nu^{(1)}(\lambda)\,e^{i\nu t}+\delta_{-\nu}^{(1)}(\lambda)\,e^{-i\nu t}\right]\right.,$$

где $\delta_\nu^{(1)}(\lambda)$ голоморфные функции от λ при $|\lambda|$ близком к нулю и $\delta_0^{(1)}(0)=1$.

Позже нам придется иметь дело со степенями этого ряда. Чтобы не возвращаться к нему вторично, проделаем необходимые выкладки сейчас.

Для выяснения строения рядов Лорана для $z^k(t)$ мы сделаем следующее элементарное замечание. Установим, что произведение двух рядов

$$S'=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\lambda^{|\nu|}\delta_\nu'\,e^{i\nu t}$$

и

$$S''=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|\nu|}\delta_\nu''\,e^{i\nu t},$$

где δ_ν' и δ_ν'' — голоморфные функции λ вблизи $\lambda=0$, будет рядом того же типа. Действительно:

$$S'S''=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\sum_{p+q=\nu}\lambda^{|p|+|q|}\delta_p'\delta_q''\,e^{i\nu t}.$$

Рассмотрим коэфициент при $e^{i\nu t}$. Так как

$$|p|+|q|\geqslant|p+q|,$$

то этот коэфициент будет содержать множителем по крайней мере $\lambda^{|\nu|}$ и полученный ряд наверное будет иметь требуемое строение:

$$S'S''=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|\nu|}\delta_\nu\,e^{i\nu t}.$$

Применяя эти соображения несколько раз, найдем, что $z^k(t)$ в исследуемом случае имеет форму:

$$z^k(t)=e^{ikt}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|\nu|}\delta_\nu^{(k)}(\lambda)\,e^{i\nu t},$$

где $\delta_\nu^{(k)}(\lambda)$, — голоморфные функции от λ и $\delta_0^{(k)}(0)=1$.

Если вернуться к прежним обозначениям, то

$$\beta_\nu^{(k)}(\lambda)=\lambda^{|\nu-k|}\delta^{(k)}{}_{\nu-k}(\lambda).$$

Перейдем к изучению свободного от $\alpha_2\ldots\alpha_h$ члена уравнения (9). Он имеет вид:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\beta_p^{(1)}\beta^{(1)}{}_{p-m}=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|p-1|+|p-m-1|}\delta^{(1)}{}_{p-1}\delta^{(1)}{}_{p-m-1}.$$

Так как $|p-1|+|p-m-1|$ ни для каких p не меньше нежели m,[1] свободный член будет, наверное содержать множитель λ не ниже чем в степени m. Этот факт нам будет важен в последующих рассуждениях.

Члены уравнения (9), содержащие искомые коэфициенты линейно, получаются либо при $j=1$, либо при $k=1$. В первом случае мы получаем a_k с коэфициентом

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\beta_p^{(k)}\bar\beta^{(1)}{}_{p-m}.$$

Выясним, в каком случае разложение в ряд по степеням λ написанного выражения будет иметь члены, свободные от λ. Чтобы это было так, нужно, чтобы $\beta^{(1)}{}_{p-m}$ совпадало с $\beta_1^{(1)}$, т. е. $p=m+1$. Но $\beta_{m+1}^{(k)}$ не обращается в нуль при $\lambda=0$ лишь при $k=m+1$, причем $\beta_{m+1}^{(m+1)}(0)=1$.

Во втором случае, когда $k=1$, получаем $\bar a_j$ с коэфициентом

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\beta_p^{(1)}\bar\beta^{(j)}{}_{p-m}.$$

В написанном выражении, очевидно, не может быть одновременно $p=1$ и $j=p-m=1-m$ ни при каких $j\geqslant1$, так как $m\geqslant1$.

Выделим в левой части (9) слагаемое, соответствующее $k=m+1$, $j=1$. Оно имеет вид:

$$\alpha_{m+1}[1+\lambda Q^{(\lambda)}{}_{n,\,m+1}].$$

Поэтому уравнение (9) можно переписать в форме:

$$(11)\qquad \alpha_{m+1}=-\alpha_{m+1}\lambda Q^{(\lambda)}{}_{n,\,m+1}-\sum_{k,\,j=1}^{n}{}'\alpha_k\bar\alpha_j\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\beta_p^{(k)}\bar\beta^{(j)}{}_{p-m}.$$

[1] В самом деле, если $p\geqslant m+1$, написанная сумма равна $p-1+p-m-1\geqslant2(m+1)-m-2=m$; если же $1\leqslant p\leqslant m$, то она есть $p-1+m+1-p=m$ и, наконец, если $p\leqslant0$, будет $1-p+m+1-p\geqslant m+2$.

Знак $'$ у суммы $\sum'_{k,j=1}^{n}$ указывает на то, что в ней должно быть выпущено слагаемое $k=m+1,\ j=1$.

К решению системы (10) может быть применен метод последовательных приближений. Приняв за исходные приближения $a_2^{(0)}=a_3^{(0)}=\ldots=a_n^{(0)}=0$, подставим их в правые части системы (11); они приведутся к свободным членам, о которых говорилось выше. Найденные таким способом выражения принимаем за первые приближения $a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}\ldots$, подставляем их вновь в правые части, находим вторые приближения и т. д.

Само собой разумеется, при разыскании первых приближений мы можем все вычисления вести лишь с точностью до первой степени λ. При нахождении вторых приближений отбрасывать все степени λ выше второй и т. д. В результате мы получаем разложения коэфициентов $a_2, a_3, \ldots, a_n$ в ряды по степеням λ.

Займемся более подробно частным случаем, который мы отметили раньше, когда контур L задан уравнением (10). Как мы уже говорили, свободный член уравнения (11) будет содержать тогда множителем λ^m, и стало быть первое приближение для a_{m+1} будет содержать степени λ не ниже m.

Можно установить без особых затруднений, что всякое приближение для a_{m+1} тогда будет содержать степени λ не ниже чем m. Нам достаточно показать, что если это верно для s-го приближения, то оно будет верно и для следующего, так как оно справедливо для первого.

Рассмотрим для этого правую часть равенства (11) и подставим туда, вместо a_k, a_j, s-ые приближения к ним. Первый член правой части будет содержать, как видно из его строения, λ не ниже чем в степени $m+1$. Выясним низшую степень λ, входящую в сумму $\sum_{k,j=1}^{n}$ правой части. Произведение $a_k\overline{a_j}$ содержит λ по предположению множителем в степени не ниже чем $k+j-2$. Нам осталось только установить, какую степень λ содержит множителем произведение $\beta_p^{(k)}\beta'^{(j)}_{p-m}$.

В нашем случае, как мы отмечали раньше: $\beta_p^{(k)}$ и $\beta'^{(j)}_{p-m}$ имеют строение:

$$\beta_p^{(k)}=\lambda^{|p-k|}\beta_{p-k}^{(k)} \quad \text{и} \quad \beta'^{(j)}_{p-m}=\lambda^{|p-m-j|}\beta'^{(j)}_{p-m-j},$$

и поэтому в рассматриваемое произведение λ входит множителем по меньшей мере в степени $|p-k|+|p-m-j|$.

В общий член суммы $\sum'_{k,j=1}^{n}$ параметр λ войдет множителем по меньшей мере в степени $k+j-2+|p-k|+|p-m-j|=N$. Оценим теперь эту величину. Чтобы иметь в виду что-либо определенное, положим $k\leqslant m+j$. Тогда могут представиться 3 случая:

1) $p\geqslant m+j\geqslant k$; здесь

$$N=2p-m-2\geqslant 2(m+1)-m-2=m;$$

2) $m+j>p\geqslant k$; при таком предположении $N=2j+m-2\geqslant 2+m-2=m$ и, наконец,

3) $m+j\geqslant k>p$;

$$N=2k+2j+m-2p-2>m.$$

Аналогично и в случае $k>m+j$.

Этим наше утверждение доказано вполне.

Следует думать, что при увеличении n разница между искомой функцией и полиномом, который мы построили по нашему способу, будет стремиться к нулю.

Относительно вопроса о сходимости процесса мы будем иметь случай говорить ниже, сейчас же дадим ряд примеров, иллюстрирующих развиваемые здесь идеи.

Пример 1. Найдем функцию, дающую конформное преобразование внутренности эллипса

$$x=(1+\lambda^2)\cos t;\quad y=(1-\lambda^2)\sin t$$

на круг.

Уравнение эллипса в комплексной форме

$$z=e^{it}(1+\lambda^2 e^{-2it})$$

будет как раз того типа, о котором мы только что говорили. Поставим перед собой задачу разыскать преобразующую функцию с точностью до десятых степеней λ. Согласно сказанному, последний коэфициент, который мы принимаем во внимание, будет a_{11}, так как все a_k с большими номерами будут содержать λ только в степенях больших, нежели десятая. В виду того что эллипс имеет две оси симметрии, все a_k будут вещественными и a_k с четными номерами равны нулю:

$$P(z)=z+a_3z^3+a_5z^5+a_7z^7+a_9z^9+a_{11}z^{11}$$

$$\begin{aligned}P(z)\,\overline{P'(z)}=z\bar z&+a_3(z^3\bar z+\bar z^3z)+[a_5(z^5\bar z+\bar z^5z)+a_3^2z^3\bar z^3]+\\&+[a_7(z^7\bar z+\bar z^7z)+a_5a_3\,(z^5\bar z^3+\bar z^5z^3)]+\\&+[a_9(z^9\bar z+\bar z^9z)+a_7a_3(z^7\bar z^3+\bar z^7z^3)+a_5^2z^5\bar z^5]+\\&+[a_{11}(z^{11}\bar z+\bar z^{11}z)+a_9a_3(z^9\bar z^3+\bar z^9z^3)+a_7a_5(z^7\bar z^5+\bar z^7z^5)].\end{aligned}$$

Будем теперь составлять комбинации $z^k\bar z^j+\bar z^kz^j$, входящие в квадрат модуля полинома. a_3 наверное содержит множителем λ^2, и потому мы при вычислении $z^3\bar z+\bar z^3z$ можем принимать во внимание степени λ лишь до восьмой. В нашем случае z^3 будет содержать λ не выше, чем в шестой степени:

$$z^3=e^{3it}+3\lambda^2e^{it}+3\lambda^4e^{-it}+\lambda^6e^{-3it}.$$

a_5 содержит λ не ниже чем в четвертой степени, и поэтому мы в z^5 сохраняем степени λ только до шестой:

$$z^5 = e^{5it} + 5\lambda^2 e^{3it} + 10\lambda^4 e^{it} + 10\lambda^6 e^{-it};$$

при вычислении комбинации $a_3^2 z^3 \bar{z}^3$ мы сохраняем в произведении $z^3 z^3$ степени не выше шестой, ибо a_3^2 содержит множителем λ^4 и т. д.

Если принять во внимание все подобного рода упрощающие обстоятельства, мы для наших комбинаций получим следующие выражения:

$$z\bar{z} = 1 + \lambda^2 + 2\lambda^2 \cos 2t,$$

$$z^3\bar{z} + \bar{z}^3 z = 2\left[(\lambda^6 + \lambda^2)\cos 4t + (\lambda^4 + 6\lambda^4 + 1)\cos 2t + (3\lambda^6 + 3\lambda^2)\right],$$

$$z^5\bar{z} + \bar{z}^5 z = 2\left[\lambda^2 \cos 6t + (5\lambda^4 + 1)\cos 4t + (20\lambda^6 + 5\lambda^2)\cos 2t + 10\lambda^4\right],$$

$$z^3\bar{z}^3 = 2\left[\lambda^6 \cos 6t + 3\lambda^4 \cos 4t + (9\lambda^6 + 3\lambda^2)\cos 2t + \frac{1}{2}(9\lambda^4 + 1)\right],$$

$$z^7\bar{z} + \bar{z}^7 z = 2\left[\lambda^2 \cos 8t + (7\lambda^4 + 1)\cos 6t + 7\lambda^2 \cos 4t + 21\lambda^4 \cos 2t\right],$$

$$z^5\bar{z}^3 + \bar{z}^5 z^3 = 2\left[3\lambda^4 \cos 6t + 3\lambda^2 \cos 4t + (25\lambda^4 + 1)\cos 2t + 5\lambda^2\right],$$

$$z^9\bar{z} + \bar{z}^9 z = 2\left[\lambda^2 \cos 10t + \cos 8t + 9\lambda^2 \cos 6t\right],$$

$$z^7\bar{z}^3 + \bar{z}^7 z^3 = 2\left[3\lambda^2 \cos 6t + \cos 4t + 7\lambda^2 \cos 2t\right],$$

$$z^5\bar{z}^5 = 2\left[5\lambda^2 \cos 2t + \frac{1}{2}\right],$$

$$z^{11}\bar{z} + \bar{z}^{11} z = 2\cos 10t,$$

$$z^9\bar{z}^3 + \bar{z}^9 z^3 = 2\cos 6t,$$

$$z^7\bar{z}^5 + \bar{z}^7 z^5 = 2\cos 2t.$$

Подставляя полученные выражения в $P(z)\,\overline{P(z)}$ и приравнивая свободный член ρ^2, а коэфициенты при различных косинусах нулю, получим следующую систему уравнений:

$$1 + \lambda^4 + 2a_3(3\lambda^6 + 3\lambda^2) + 2a_5 10\lambda^4 + a_3^2(9\lambda^4 + 1) + 2a_3a_5 5\lambda^2 + a_5^2 = \rho^2,$$

$$\lambda^2 + a_3(1 + 6\lambda^4 + \lambda^8) + a_5(5\lambda^2 + 20\lambda^6) + a_3^2(3\lambda^2 + 9\lambda^6) +$$
$$+ a_7 21\lambda^4 + a_3a_5(1 + 25\lambda^4) + a_3a_7 7\lambda^2 + a_5^2 5\lambda^2 + a_5a_7 = 0,$$

$$a_3(\lambda^2 + \lambda^6) + a_5(1 + 5\lambda^4) + a_3^2 3\lambda^4 + a_7 7\lambda^2 + a_3a_5 3\lambda^2 + a_3a_7 = 0,$$

$$a_5\lambda^2 + a_3^2\lambda^6 + a_7(1 + 7\lambda^2) + a_3a_5 3\lambda^4 + a_9 9\lambda^2 + a_3a_7 3\lambda^2 + a_3a_9 = 0,$$

$$a_7\lambda^2 + a_9 = 0,$$

$$a_9\lambda^2 + a_{11} = 0.$$

Перенося в уравнениях этой системы последовательно $a_3, a_5, \ldots$ в другую часть равенства, получим:

$$(*)\quad \begin{cases} a_3 = -[\lambda^2 + a_3(6\lambda^4 + \lambda^8) + a_5(5\lambda^2 + 20\lambda^6) + a_3^2(3\lambda^2 + 9\lambda^6) + \\ \quad + a_7 21\lambda^4 + a_3a_5(1 + 25\lambda^4) + a_3a_7 7\lambda^2 + a_5^2 5\lambda^2 + a_5a_7] \\ a_5 = -[a_3(\lambda^2 + \lambda^6) + a_5 5\lambda^4 + a_3^2 3\lambda^4 + a_7 7\lambda^2 + a_3a_5 3\lambda^2 + a_3a_7] \\ a_7 = -[a_5\lambda^2 + a_3^2\lambda^6 + a_7 7\lambda^4 + a_3a_5 3\lambda^4 + a_9 9\lambda^2 + \\ \quad + a_3a_7 3\lambda^2 + a_3a_9] \\ a_9 = -a_7\lambda^2 \\ a_{11} = -a_9\lambda^2 \end{cases}$$

При решении этой системы, как и всегда, исходим из нулевого приближения; первое же приближение, поскольку система содержит только четные степени λ, вычисляем с точностью до λ^2, второе приближение с точностью до λ^4 и т. д.

Результаты вычислений сведены нами в следующей таблице:

Коэф.	Исходное значение	Первое прибл.	Второе прибл.	Третье прибл.	Четвертое прибл.	Пятое прибл.
a_3	0	$-\lambda^2$	$-\lambda^2$	$-\lambda^2 - \lambda^6$	$-\lambda^2 - \lambda^6$	$-\lambda^2 - \lambda^6 - 7\lambda^{10}$
a_5	0	0	λ^4	λ^4	$\lambda^4 + 3\lambda^8$	$\lambda^4 + 3\lambda^8$
a_7	0	0	0	$-\lambda^6$	$-\lambda^6$	$-\lambda^6 - 5\lambda^{10}$
a_9	0	0	0	0	λ^8	λ^8
a_{11}	0	0	0	0	0	$-\lambda^{10}$

Таким образом с точностью до λ^{10} мы имеем:

$$P(z) = z - (\lambda^2 + \lambda^6 + 7\lambda^{10})z^3 +$$
$$+ (\lambda^4 + 3\lambda^8)z^5 - (\lambda^6 + 5\lambda^{10})z^7 + \lambda^8 z^9 - \lambda^{10} z^{11}.$$

Что же касается приближенного значения для ρ^2, то его мы получим, подставив в найденное нами раньше выражение для свободного члена $P(z)\,\overline{P(z)}$ вместо $a_3, a_5, \ldots$, их значения. Простые вычисления показывают, что

$$\rho^2 = 1 - 4\lambda^4 + 10\lambda^8.$$

Укажем на один способ проверки вычисления. Если в $P(z)$ вместо z подставить его значение для контура области и затем положить t равным какому-либо значению, например $t = 0$, мы должны получить число, модуль которого с точностью до λ^{10} должен совпадать с ρ.

В нашем случае при $t = 0$ имеем

$$z = 1 + \lambda^2$$

и

$$P(1+\lambda^2) = 1 - 2\lambda^4 + 3\lambda^8,$$

что вполне совпадает с

$$\rho = (1 - 4\lambda^4 + 10\lambda^8)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2\lambda^4 + 3\lambda^8.$$

Пример 2. Мы остановимся сейчас еще на одной задаче. Пусть контур L области имеет уравнение:

$$z = e^{it}[1 + \mu^4(e^{4it} + e^{-4it})],$$

где μ — малый параметр.
Уравнение имеет опять рассмотренный частный вид. Обозначая параметр μ^4 ради упрощения записи просто через λ, будем иметь:

$$z = e^{it}[1 + \lambda(e^{4it} + e^{-4it})].$$

Взятая область имеет четыре оси симметрии, и в разложении преобразующей функции поэтому сохраняются только первая, пятая, девятая и т. д. степени z.

Ограничиваясь при приближенном решении четвертыми степенями λ, полагаем:

$$P(z) = z + a_5 z^5 + a_9 z^9 + a_{13} z^{13} + a_{17} z^{17},$$

где $a_5 \ldots a_{17}$ — вещественные числа;

$$P(z)\,\overline{P(z)} = \bar{z}z + a_5(z^5\bar{z} + \bar{z}^5 z) + [a_9(\bar{z}^9 z + z^9\bar{z}) + a_5^2 z^5\bar{z}^5] + [a_{13}(z^{13}\bar{z} + \bar{z}^{13}z) + a_5 a_9(z^9\bar{z}^5 + \bar{z}^9 z^5)] + [a_{17}(z^{17}\bar{z} + \bar{z}^{17}z) + a_{13}a_5(z^{13}\bar{z}^5 + \bar{z}^{13}z^5) + a_9^2 z^9\bar{z}^9].$$

Так как $a_5 \ldots a_{17}$ будут содержать λ в степенях не ниже соответственно $\lambda, \lambda^2, \ldots \lambda^4$, при вычислении комбинаций, стоящих множителями при них, мы ограничиваемся опять только такими степенями λ, чтобы в наше выражение вошли бы степени не выше четвертой:

$$z^5 = e^{5it}[10\lambda^3 e^{12it} + 10\lambda^2 e^{8it} + (5\lambda + 30\lambda^3)e^{4it} + (1 + 20\lambda^2) + (5\lambda + 30\lambda^2)e^{-4it} + 10\lambda^2 e^{-8it} + 10\lambda^3 e^{-12it}],$$

$$z^9 = e^{9it}[36\lambda^2 e^{8it} + 9\lambda e^{4it} + (1 + 72\lambda^2) + 9\lambda e^{-4it} + 36\lambda^2 e^{-8it}],$$

$$z^{13} = e^{13it}[13\lambda e^{4it} + 1 + 13\lambda e^{-4it}],$$

$$z^{17} = e^{17it}.$$

откуда получаем:

$$z\bar{z} = 2\left[\lambda^2\cos 8t + 2\lambda\cos 4t + \frac{1}{2}(1 + 2\lambda^2)\right],$$

$$z^5\bar{z} + \bar{z}^5 z = 2[20\lambda^3\cos 16t + 15\lambda^2\cos 12t + (6\lambda + 80\lambda^3)\cos 8t + (1 + 45\lambda^2)\cos 4t + (6\lambda + 60\lambda^3)],$$

$$z^9\bar{z} + \bar{z}^9 z = 2[45\lambda^2\cos 16t + 10\lambda\cos 12t + (1 + 90\lambda^2)\cos 8t + 10\lambda\cos 4t + 45\lambda^2],$$

$$z^5\bar{z}^5 = 2\left[45\lambda^2\cos 8t + 10\lambda\cos 4t + \frac{1}{2}(1 + 90\lambda^2)\right],$$

$$z^{13}\bar{z} + \bar{z}^{13}z = 2[14\lambda\cos 16t + \cos 12t + 14\lambda\cos 8t],$$

$$z^9\bar{z}^5 + \bar{z}^9 z^5 = 2[14\lambda\cos 8t + \cos 4t + 14\lambda],$$

$$z^{17}\bar{z} + \bar{z}^{17}z = 2\cos 16t,$$

$$z^{13}\bar{z}^5 + \bar{z}^{13}z^5 = 2\cos 8t,$$

$$z^9\bar{z}^9 = 1.$$

Подставляя найденные выражения в уравнение $P(z)\,\overline{P(z)} = \rho^2$ и сравнивая коэфициенты при косинусах одинаковых углов, получим следующую систему уравнений:

$$1 + 2\lambda^2 + a_5(12\lambda + 120\lambda^3) + a_9 90\lambda^2 + a_5^2(1 + 90\lambda^2) + a_5 a_9 28\lambda + a_9^2 = \rho^2,$$
$$2\lambda + a_5(1 + 45\lambda^2) + a_9 10\lambda + a_5^2 10\lambda + a_5 a_9 = 0,$$
$$\lambda^2 + a_5(6\lambda + 80\lambda^3) + a_9(1 + 90\lambda^2) + a_5^2 45\lambda^2 + a_5 a_9 14\lambda + a_{13} 14\lambda + a_5 a_{13} = 0,$$
$$a_5 15\lambda^2 + a_9 10\lambda + a_{13} = 0,$$
$$a_5 20\lambda^3 + a_9 45\lambda^2 + a_{13} 14\lambda + a_{17} = 0,$$

или, решая их, начиная со второго, последовательно относительно a_5, a_9, a_{13}, a_{17}, будем иметь:

$$a_5 = -[2\lambda + a_5 45\lambda^2 + a_9 10\lambda + a_5^2 10\lambda + a_5 a_9],$$
$$a_9 = -[\lambda^2 + a_5(6\lambda + 80\lambda^3) + a_9 90\lambda^2 + a_5^2 45\lambda^2 + a_5 a_9 14\lambda + a_{13} 14\lambda + a_5 a_{13}],$$
$$a_{13} = -[a_5 15\lambda^2 + a_9 10\lambda],$$
$$a_{17} = -[a_5 20\lambda^3 + a_9 45\lambda^2 + a_{13} 14\lambda].$$

Результат решения их по методу последовательных приближений дает таблицу:

Коэф.	Исходное прибл.	Первое прибл.	Второе прибл.	Третье прибл.	Четвертое прибл.
a_5	0	-2λ	-2λ	$-2\lambda-38\lambda^3$	$-2\lambda-38\lambda^3$
a_9	0	0	$11\lambda^2$	$11\lambda^2$	$11\lambda^2+486\lambda^4$
a_{13}	0	0	0	$-80\lambda^3$	$-80\lambda^3$
a_{17}	0	0	0	0	$665\lambda^4$

С точностью до четвертой степени λ отображающая функция будет:

$$P(z)=z-(2\lambda+38\lambda^3)z^5+(11\lambda^2+486\lambda^4)z^9+80\lambda^3+665\lambda^4z^{17}.$$

Подстановка значений коэфициентов a_k в выражение для ρ^2 дает следующее приближенное значение для квадрата радиуса круга:

$$\rho^2=1-18\lambda^2+311\lambda^4,$$

откуда

$$\rho=1-9\lambda^2+115\lambda^4.$$

Для проверки результата мы положим в уравнении контура области $t=0$ и подставим соответствующее значение $z=1+2\lambda$ в полином $P(z)$. Результат подстановки, очевидно, должен совпадать с точностью до четвертых степеней λ с найденным ρ. Простые вычисления показывают, что

$$P(1+2\lambda)=1-9\lambda^2+115\lambda^4.$$

Если уравнение контура задано с численным значением параметра λ, то часто бывает проще решать систему уравнений для коэфициентов a_k прямо численным путем, не вводя буквенного параметра, избегая таким образом затруднений, связанных с алгебраическим характером выкладки при неопределенном параметре λ.

Поясним это на примере. Возвратимся к задаче об отображении эллипса. Пусть дело идет об эллипсе с отношением полуосей 2:3

$$x=\frac{6}{5}\cos t, \qquad y=\frac{4}{5}\sin t.$$

Это случится при $\lambda^2=\frac{1}{5}$. Подставляем значение λ в систему (*); она примет вид:

$$a_3=-[0{,}2+0{,}248a_3+1{,}16a_5+0{,}672a_3^2+0{,}84a_7+2a_3a_5+1{,}4a_3a_7+a_5^2+a_5a_7]$$
$$a_5=-[0{,}208a_3+0{,}2a_5+0{,}12a_3^2+1{,}4a_7+0{,}6a_3a_5+a_9a_7],$$
$$a_7=-[0{,}2a_5+0{,}008a_3^2+1{,}4a_7+0{,}12a_3a_5+1{,}8a_9+0{,}6a_9a_7+a_3a_9]$$
$$a_9=-0{,}2a_7,$$
$$a_{11}=-0{,}2a_9.$$

Отправляясь, как обычно, от $a_3=a_5=\ldots=0$, применяем метод последовательных приближений.

Коэфиц.	Исходное значение	Первое прибл.	Второе прибл.	Третье прибл.	Четвертое прибл.
a_3	0	$-0{,}2$	$-0{,}177$	$-0{,}208$	$-0{,}201$
a_5	0	0	0,037	0,030	0,044
a_7	0	0	0	$-0{,}007$	$-0{,}010$
a_9	0	0	0	0	0,001
a_{11}	0	0	0	0	0

$$P(z)=z-0{,}201z^3+0{,}044z^5-0{,}010z^7+0{,}001z^9.$$

n° 2. Метод последовательных приближений. При исследованиях настоящего параграфа мы будем предполагать, что контур области задан уравнением вида:

$$z=e^{it}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|\nu|}\delta_\nu(\lambda)e^{i\nu t}, \tag{12}$$

где $\delta_\nu(\lambda)$ голоморфные функции от λ в области $\lambda=0$ и $\delta_0(0)=1$. Допустим, что ряд $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|\nu|}\delta_\nu(\lambda)\zeta^\nu$ есть голоморфная функция от λ и ζ вблизи $\lambda=0$ и $|\zeta|=1$.

Функцию, совершающую конформное преобразование области на круг, будем искать в форме ряда

$$\zeta=P_1(z)+\lambda P_2(z)+\lambda^2P_3(z)+\ldots+\lambda^nP_{n+1}(z)+\ldots, \tag{13}$$

где $P_n(z)$ регулярные функции от z, подлежащие определению. Мы будем считать, что начало координат плоскости z переходит в начало

координат плоскости ζ. Соответственно этому должно быть $P_n(0)=0$. Составим

$$(14)\quad |\zeta|^2 = P_1(z)\,\overline{P_1(z)} + \lambda\,[P_2(z)\,\overline{P_1(z)} + \overline{P_2(z)}\,P_1(z)] + \ldots$$
$$\ldots + \lambda^n\,[P_{n+1}(z)\,\overline{P_1(z)} + P_n(z)\cdot\overline{P_2(z)} + \ldots + P_1(z)\,\overline{P_{n+1}(z)}] + \ldots$$

Если сюда вместо z подставить его значение (12) для контура области, мы должны будем для функции, совершающей искомое конформное преобразование, получить постоянную величину, равную радиусу того круга, на который отображается область.

Если степенной ряд (13) имеет по λ радиус сходимости, отличный от нуля, то результат подстановки будет вообще говоря голоморфной функцией от λ вблизи $\lambda=0$, разложение которой в ряд Тейлора по степеням λ мы получим, собирая в выражении (14) члены с одинаковыми степенями λ.

Будем считать, чтобы иметь в виду что-либо определенное, радиус круга равным единице. Приравнивая в выражении (14), куда вместо z внесено его значение (12), член, свободный от λ, единице, получим следующее равенство:

$$P_1(e^{it})\,\overline{P_1(e^{it})} = 1.$$

Функция $P_1(z)$ соответствует конформному преобразованию круга радиуса 1 около начала координат, получающегося из области, ограниченной контуром (12), при $\lambda=0$, на такой же круг плоскости ζ. Отбрасывая бесполезное вращение круга в плоскости ζ, положим

$$(15)\quad P_1(z) = z.$$

Приравняв теперь нулю коэфициент при первой степени λ в (14), будем иметь:

$$P_2(e^{it})\,e^{-it} + \overline{P_2(e^{it})}\,e^{-it} + \left\{\frac{d}{d\lambda}\,z\bar{z}\right\}_{\lambda=0} = 0.$$

Из (13) видно, что

$$\left\{\frac{d}{d\lambda}\,z\bar{z}\right\}_{\lambda=0} = [\delta_1(0)\,e^{it} + \delta_0'(0) + \delta_{-1}(0)\,e^{-it}] +$$
$$+ [\overline{\delta_1(0)}\,e^{-it} + \overline{\delta_0'(0)} + \overline{\delta_{-1}(0)}\,e^{it}] = -Q_1$$

есть линейный многочлен от e^{it} и e^{-it}:

$$2R[P_2(e^{it})\,e^{-it}] = Q_1.$$

Чтобы облегчить дальнейшую запись, условимся в следующих обозначениях и терминах: два тригонометрических ряда

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nt - b_n\sin nt)$$

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n\sin nt + a_n\cos nt)$$

будем называть сопряженными и обозначать это следующим образом:

$$\psi(t) = \widetilde{\varphi(t)}.$$

Задание одного из них, например $\varphi(t)$, определяет другой с точностью до постоянного слагаемого, в нашем примере b_0. Как уже отмечалось выше, все функции $P_n(z)$ должны обращаться в нуль при $z=0$. Поэтому $\dfrac{1}{z}P_2(z)$ должна быть голоморфной функцией. На границе же единичного круга, при $z=e^{it}$, удвоенная вещественная часть ее представляется тригонометрическим полиномом вида $Q_1 = a_0 + a_1\cos t - b_1\sin t$. Перейдя к сопряженному полиному, мы найдем мнимую часть с точностью до постоянного слагаемого

$$2I[P_2(e^{it})\,e^{-it}] = \widetilde{Q_1},$$

$$(16)\quad P_2(e^{it})\,e^{-it} = \frac{1}{2}(Q_1 + i\widetilde{Q_1}).$$

Отсюда просто найдется функция $P_2(e^{it})$ в форме полинома второй степени от z. Мы будем предполагать, что при всяком λ направление вещественной оси в начале координат плоскости z переходит в направление вещественной оси начала координат плоскости ζ. Коэфициенты при первой степени z в разложениях всех функций $P_n(z)$ должны быть вещественными. Поэтому постоянную, с точностью до которой найдется $\widetilde{Q_1}$ по известному Q_1, мы отбросим, так как она должна быть равна нулю.

Пусть, приравнивая нулю коэфициенты при $\lambda, \lambda^2 \ldots \lambda^{n-1}$ в выражении, которое мы получим после подстановки в (14) вместо z его значения (12), мы нашли $P_1(z), P_2(z) \ldots P_n(z)$ в форме полиномов от z степеней не выше соответственно $1, 2 \ldots n$ без свободных членов. Покажем сейчас, что при сравнении с нулем коэфициента при λ^n функция $P_{n+1}(z)$ определится как полином степени $n+1$ от z без свободного члена. Действительно, этот коэфициент имеет вид:

$$\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\sum_{p=0}^{n}\lambda^p\,P_{p+1}(z)\sum_{q=0}^{n}\lambda^q\,\overline{P_{q+1}(z)}\right\}_{\lambda=0},$$

откуда следует, что

$$(17)\quad P_{n+1}(e^{it})\,e^{-it} + \overline{P_{n+1}(e^{it})}\,e^{it} = 2R[P_{n+1}(e^{it})\,e^{-it}] =$$
$$= -\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\sum_{p=0}^{n-1}\lambda^p\,P_{p+1}(z)\cdot\sum_{q=0}^{n-1}\lambda^q\,\overline{P_{q+1}(z)}\right\}_{\lambda=0} = Q_n.$$

Определим старшие степени e^{it} и e^{-it}, входящие в правую часть. При вычислении ее мы должны будем брать n-ю производную по λ от выражений вида $\lambda^{p+q}z^k\bar{z}^l$, где

$$p, q \leqslant n-1;\ 1 \leqslant k \leqslant p+1\quad 1 \leqslant l \leqslant q+1$$

и в результате дифференцирования положить $\lambda=0$.

Перестроим ряд (12) по степеням λ. В результате мы получим ряд Тейлора

$$z(t) = e^{it} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Pi_\nu^{(1)}(e^{it}, e^{-it})\,\lambda^\nu,$$

где $\Pi_\nu(e^{it}, e^{-it})$ будет, очевидно, полиномом степени не выше ν от e^{it} и e^{-it}. Отсюда следует, что $z^k(t) = e^{ikt} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Pi_\nu^{(k)}(e^{it}, e^{-it})\,\lambda^\nu$, где $\Pi_\nu^{(k)}$ также полиномы степени не выше ν своих аргументов. В силу этого

$$\lambda^{p+q} z^k \bar{z}^l = e^{i(k-l)t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\nu} \Pi_m^{(k)} \Pi_{\nu-m}^{(l)} \lambda^{\nu+p+q};$$

коэфициентом при λ^n будет:

$$e^{i(k-l)t} \sum_{m=0}^{n-p-q} \Pi_m^{(k)} \bar{\Pi}^{(l)}{}_{n-p-q-m}.$$

И так как произведение $\Pi_m^{(k)} \cdot \bar{\Pi}^{(l)}{}_{n-p-q-m}$ содержит e^{it}, e^{-it} в степенях не выше, чем $n-p-q$, что следует из строения этих функций, то и весь коэфициент будет содержать эти величины в степени не выше, чем $k-l+n-p-q \leqslant p+1-1+n-p-q \leqslant n$.

Таким образом Q_n должно быть тригонометрическим полиномом, содержащим дуги кратности не выше n.

Перейдя в равенстве (17) к сопряженным функциям и отбрасывая произвольную постоянную, входящую в состав $\widetilde{Q_n}$, имеем:

$$2I\,[P_{n+1}(e^{it})\,e^{-it}] = \widetilde{Q_n},$$

откуда

$$P_{n+1}(e^{it}) = \frac{e^{it}}{2}(Q_n + i\widetilde{Q_n}). \tag{18}$$

$P_{n+1}(z)$ будет, следовательно, полиномом степени не выше, чем $n+1$. Приведем пример такого расчета. Возьмем эллипс, рассмотренный нами в предыдущем $n°$

$$z(t) = e^{it}(1 + \lambda^2 e^{-2it}).$$

В виду того что в уравнение контура входит лишь λ^2, полагаем:

$$\zeta = z + \lambda^2 P_3(z) + \lambda^4 P_5(z) + \lambda^6 P_7(z) + \lambda^8 P_9(z) + \ldots$$

$$\zeta\bar{\zeta} = z\bar{z} + \lambda^2[P_3 \cdot \bar{z} + \overline{P_3} \cdot z] + \lambda^4[P_5\bar{z} + P_3\overline{P_3} + \overline{P_5}z] + \ldots$$

Будем искать приближенно преобразующую функцию, ограничиваясь восьмой степенью λ. Сообразно с этим во всех вычислениях мы будем отбрасывать все степени λ выше восьмой. Так как на контуре

$$z\bar{z} = 1 + \lambda^4 + 2\lambda^2 \cos 2t,$$

сравнение с нулем коэфициента при λ^2 дает

$$P_3(e^{it})\,e^{-it} + \overline{P_3(e^{it})}\,e^{it} = -2\cos 2t,$$

откуда

$$P_3(e^{it})\,e^{-it} = -e^{2it} \quad \text{и} \quad P_3(z) = -z^2.$$

Будем искать $P_5(z)$. На контуре

$$z^3 = e^{3it}(1 + 3\lambda^2 e^{-2it} + 3\lambda^4 e^{-4it} + \lambda^6 e^{-6it}),$$

поэтому, если отбросить степени выше шестой:

$$P_3(z)\,\bar{z} + \overline{P_3(z)}\,z = -2[3\lambda^2 + 3\lambda^6 + (1 + 6\lambda^4)\cos 2t + (\lambda^2 + \lambda^6)\cos 4t]$$

При вычислении $P_3(z)\,\overline{P_3(z)}$ нам достаточно ограничиться лишь четвертой степенью λ, ибо результат мы должны будем умножить на λ^4. Аналогичное замечание имеет место для всех последующих вычислений, и мы не будем его повторять, отбрасывая просто лишние степени λ.

$$P_3(z)\,\overline{P_3(z)} = 1 + 9\lambda^4 + 6\lambda^2\cos 2t + 6\lambda^4\cos 4t.$$

Собирая подобные члены и приравнивая нулю коэфициент при λ^4, получаем уравнение для нахождения $P_5(z)$:

$$P_5\,e^{-it} + \overline{P_5}\,e^{it} = 4 + 2\cos 4t, \quad P_5(z) = 2z + z^5.$$

Перейдем к $P_7(z)$. На границе области

$$z^5 = e^{5it}[1 + 5\lambda^2 e^{-2it} + 10\lambda^4 e^{-4it}]$$

$$P_5\,e^{-it} + \overline{P_5}\,e^{it} = 2[2 + 12\lambda^4 + 9\lambda^2\cos 2t + (1 + 5\lambda^4)\cos 4t + \lambda^2\cos 6t]$$

$$P_5\overline{P_3} + \overline{P_5}P_3 = -2[11\lambda^2 + 3\cos 2t + 5\lambda^2\cos 4t].$$

Собрав коэфициенты при λ^6 и приравняв результат нулю, имеем уравнение для P_7:

$$P_7\,e^{-it} + \overline{P_7}\,e^{it} = -6\cos 2t - 2\cos 6t,$$

$$P_7(z) = -(3z^3 + z^7).$$

Наконец $P_9(z)$.

$$P_7\,e^{-it} + \overline{P_7}\,e^{it} = -2[9\lambda^2 + 3\cos 2t + 10\lambda^2\cos 4t + \cos 6t + \lambda^2\cos 8t]$$

$$P_7\overline{P_3} + \overline{P_7}P_3 = 6 + 2\cos 4t$$

$$P_5\overline{P_5} = 5 + 4\cos 4t,$$

откуда для P_9 получаем такое уравнение:

$$P_9\,e^{-it} + \overline{P_9}\,e^{it} = 2 + 10\cos 2t + 2\cos 8t,$$

$$P_9(z) = z + 5z^5 + z^9.$$

Для построенного по методу последовательных приближений разложения должна быть доказана его сходимость. Исследование этого во-

проса мы не будем проводить сейчас и отложим его до п° 8 § 6. Однако отметим здесь, что сходимость разложения может быть гарантирована наверное лишь для малых значений параметра λ.

п° 3. Конформное преобразование внешних областей. Вернемся вновь к контурам, определенным равенством (5) или (7), и будем искать функцию, конформно преобразующую внешность этого контура на внешность или внутренность некоторой окружности. При этом мы будем предполагать, что бесконечно далекая точка плоскости z переходит в бесконечно далекую точку или нуль плоскости ζ. Отображающая функция будет иметь разложение около бесконечности в случае отображения на внешность окружности:

$$\zeta = z + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{z} + \frac{\alpha_4}{z_2} + \dots \tag{19}$$

Равенства единице коэфициента при первой степени z, как это указано в формуле (19), мы можем всегда достигнуть, выбирая надлежащим образом радиус окружности и устанавливая соответствие между направлениями вещественных осей плоскостей z и ζ в бесконечно далеких точках.

Если мы имеем в виду преобразование внешности контура на внутренность окружности, то преобразующей функции можно придать, по соображениям, аналогичным изложенным выше, следующий вид:

$$\zeta = \frac{1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \frac{\alpha_3}{z^3} + \dots \tag{20}$$

В обоих случаях для приближенного построения функции, совершающей конформное преобразование, может быть применен тот же прием, что и раньше.

Рассуждения и выкладки при отображении на внешность и внутренность окружности сходны между собой и аналогичны исследованному случаю преобразования внутренних областей; поэтому мы ограничимся во всем последующем изложении, например, первым случаем. Как раньше, будем искать приближенно требуемую нам функцию, взяв n первых членов разложения (19):

$$\zeta = z + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{z} + \dots + \frac{\alpha_n}{z^{n-2}}. \tag{21}$$

Для нахождения квадрата модуля функции ζ на контуре (5) нам потребуется вычисление $\frac{1}{z}$. Эта величина на контуре может быть разложена в ряд типа (7):

$$\frac{1}{z} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \beta_\nu^{(-1)}(\lambda) e^{i\nu t}, \tag{22}$$

коэфициенты которого $\beta^{(-1)}$ суть регулярные функции параметра λ. Они, очевидно, должны удовлетворять следующим равенствам:

$$\beta_\nu^{(-1)}(0) = 0 \quad \text{при} \quad \nu \neq -1, \quad \beta_{-1}^{(-1)}(0) = 1.$$

Составим теперь $|\zeta|^2$. Если подставить в него вместо z и $\frac{1}{z}$ их выражения (7) и (22), мы получим некоторый тригонометрический ряд. Приравняем в нем постоянной ρ^2 свободный член и положим коэфициенты при первых n членах ряда равными нулю; получим систему уравнений, совершенно подобную той, о которой мы подробно говорили в п° 1. На изучении системы мы поэтому останавливаться не будем. Скажем еще несколько слов относительно того случая, когда контур области задан уравнением (10). Покажем, что, как и прежде, разложения в ряды по степеням λ коэфициентов $\alpha_2, \alpha_3, \dots$, в этом случае будут начинаться соответственно с первой, второй и т. д. степеней λ.

Действительно, если $z = e^{it} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|\nu|} \delta_\nu^{(1)} e^{i\nu t}$, то $\frac{1}{z}$ будет представляться рядом того же вида:

$$\frac{1}{z} = e^{-it} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|\nu|} \delta_\nu^{(-1)} e^{i\nu t}, \tag{23}$$

где $\delta_\nu^{(-1)}$ так же как и $\delta_\nu^{(1)}$ — голоморфные функции от λ. В самом деле, после перестройки ряда для z по степеням λ получим:

$$z = e^{it} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Pi_\nu^{(1)} \lambda^\nu,$$

причем $\Pi_\nu^{(1)}$ суть полиномы степени не выше ν относительно e^{it} и e^{-it}.

Будем искать теперь последовательно коэфициенты разложения $\frac{1}{z}$ по степеням λ. Положим

$$\frac{1}{z} = e^{-it} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Pi_\nu^{(-1)} \lambda^\nu;$$

$$e^{-it} \Pi_0^{(-1)} = \left\{\frac{1}{z}\right\}_{\lambda=0} = \frac{1}{e^{it}}, \quad \Pi_0^{(-1)} = 1,$$

$$e^{-it} \Pi_1^{(-1)} = \left\{\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{z}\right\}_{\lambda=0} = -\frac{\Pi_1^{(1)}}{e^{it}},$$

откуда:

$$\Pi_1^{(-1)} = -\Pi_1^{(1)}.$$

$\Pi_1^{(-1)}$ есть наверное полином первой степени от e^{it} и e^{-it}. Далее

$$e^{-it}\Pi_2^{(-1)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\frac{1}{z}\right\}_{\lambda=0} = e^{-it}(\Pi_1^{(1)2} - \Pi_2^{(1)}).$$

Отсюда следует, что $\Pi_2^{(-1)}$ есть полином не выше второй степени от e^{it} и e^{-it} и т. д. Перестроив теперь разложение по степеням λ для $\frac{1}{z}$ в разложение Лорана по степеням e^{it}, получим требуемый результат (23). Таким образом для любых целых k будет:

$$z^k(t) = e^{ikt}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|\nu|}\delta_\nu^{(k)}(\lambda)\,e^{i\nu t},$$

при голоморфных $\delta_\nu^{(k)}(\lambda)$.

$$\zeta\bar{\zeta} = \sum_{k,j=-1}^{n-2}\frac{\alpha_{k+2}\bar{\alpha}_{j+2}}{z^k\bar{z}^j} =$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\sum_{k,j=-1}^{n-2}\alpha_{k+2}\bar{\alpha}_{j+2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|p|+|p-\nu|}\delta_p^{(-k)}\bar{\delta}_{p-\nu}^{(-j)}e^{i(\nu-k+j)t}.$$

Приравняв постоянному ρ^2 свободный от e^{it} член правой части, получаем приближенное уравнение для определения радиуса окружности, на внешность которой отображается область

$$\sum_{k,j=-1}^{n-2}\alpha_{k+2}\bar{\alpha}_{j+2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|p|+|p-k+j|}\delta_p^{(-k)}\bar{\delta}_{p-k+j}^{(-j)} = \rho^2.$$

Если же приравнять нулю коэфициенты при $e^{-it}, e^{-2it}, \ldots, e^{-(n-1)it}$, получим систему уравнений для определения чисел $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$:

$$\sum_{k,j=-1}^{n-2}\alpha_{k+2}\bar{\alpha}_{j+2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|p|+|p+m+j-k|}\delta_p^{(-k)}\bar{\delta}_{p+m+j-k}^{(-j)} = 0,$$

$$m = 1, \ldots n-1,$$

которая после простых преобразований может быть приведена к виду:

$$\alpha_{m+1} = -\alpha_{m+1}\lambda q_{m,m+1}(\lambda) - \sum_{k,j=-1}^{n-2}{}'\alpha_{k+2}\bar{\alpha}_{j+2}\cdot$$

$$\cdot\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|p|+|p+m+j-k|}\delta_p^{(-k)}\bar{\delta}_{p+m+j-k}^{(-j)}.$$

Решаем эту систему последовательными приближениями, начиная с $\alpha_2^{(0)} = \alpha_3^{(0)} = \ldots = \alpha_n^{(0)} = 0$. Нам достаточно установить, что если

предыдущее приближение будет иметь требуемое строение, т. е. $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ будут содержать множителями соответственно $\lambda, \lambda^2, \ldots \lambda^{n-1}$, то то же строение будет иметь и последующее приближение. Ибо в самом деле, если $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ в правой части удовлетворяют нашим условиям, то первый член содержит наверное множитель не ниже λ^{m+1}. В общий же член суммы λ будет входить в степени не ниже, чем $k+1+j+1+|p|+|p+m+j-k|$, относительно которой легко можно установить, что она ни для каких k, j, p не меньше, чем m; поэтому следующее приближение для α_{m+1} будет содержать множителем λ не меньше, чем в степени m. Наше утверждение доказано таким образом вполне.

Пример. Для иллюстрации изложенного приема мы рассмотрим преобразование внешности контура

$$z(t) = e^{it}(1+\lambda^2 e^{2it})$$

на внешность круга.

В силу симметрии области относительно координатных осей, разложение преобразующей функции в области бесконечно далекой точки будет:

$$\zeta = z + \frac{a_3}{z} + \frac{a_5}{z^3} + \ldots$$

Будем искать преобразующую функцию с точностью до λ^8. Сообразно этому ζ мы берем в форме полинома вида:

$$\zeta = z + \frac{a_3}{z} + \frac{a_5}{z^3} + \frac{a_7}{z^5} + \frac{a_9}{z^7}.$$

Квадрат модуля ζ будет:

$$\zeta\bar{\zeta} = z\bar{z} + a_3\left(\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right) + \left[a_5\left(\frac{z}{\bar{z}^3} + \frac{\bar{z}}{z^3}\right) + a_3^2\frac{1}{z\bar{z}}\right] +$$

$$+\left[a_7\left(\frac{z}{\bar{z}^5} + \frac{\bar{z}}{z^5}\right) + a_3a_5\left(\frac{1}{z^3\bar{z}} + \frac{1}{\bar{z}^3 z}\right)\right] +$$

$$+\left[a_9\left(\frac{z}{\bar{z}^7} + \frac{\bar{z}}{z^7}\right) + a_3a_7\left(\frac{1}{z\bar{z}^5} + \frac{1}{z^5\bar{z}}\right) + a_5^2\frac{1}{z^3\bar{z}^3}\right].$$

Если при вычислении членов написанного выражения иметь в виду, что $a_3, \ldots$ содержат множителями $\lambda^2, \lambda^4, \ldots$ и отбросить слагаемые,

дающие λ выше, чем в восьмой степени, получим:

$$z\bar{z} = 2\lambda^2 \cos 2t + 1 + \lambda^4,$$

$$\frac{\bar{z}}{z} + \frac{z}{\bar{z}} = 2[(\lambda^2 - \lambda^6)\cos 4t + \cos 2t - (\lambda^2 - \lambda^6)],$$

$$\frac{z}{\bar{z}^3} + \frac{\bar{z}}{z^3} = 2[\lambda^2 \cos 6t + (1 - 3\lambda^4)\cos 4t - 3\lambda^2 \cos 2t + 6\lambda^4],$$

$$\frac{1}{z\bar{z}} = 2\left[\lambda^4 \cos 4t - \lambda^2 \cos 2t + \frac{1}{2}(1 + \lambda^4)\right],$$

$$\frac{z}{\bar{z}^5} + \frac{\bar{z}}{z^5} = 2\ [\lambda^2 \cos 8t + \cos\ 6t - 5\lambda^2\ \cos\ 4t],$$

$$\frac{1}{z^3\bar{z}} + \frac{1}{z^3 z} = 2[-\lambda^2 \cos 4t + \cos 2t - 3\lambda^2],$$

$$\frac{z}{\bar{z}^7} + \frac{\bar{z}}{z^7} = 2\cos 8t,$$

$$\frac{1}{z\bar{z}^5} + \frac{1}{\bar{z}z^5} = 2\cos 4t, \qquad \frac{1}{z^3\bar{z}^3} = 1.$$

Внося полученные значения в $\zeta\bar{\zeta}$ и приравнивая ρ^2 член, не зависящий от e^{it}, и нулю коэфициенты при косинусах, получим следующую систему уравнений:

$$1 + \lambda^4 - 2(\lambda^2 - \lambda^6)a_3 + 12\lambda^4 a_5 + (1 + \lambda^4)a_3^2 - 6\lambda^2 a_3 a_5 + a_5^2 = \rho^2,$$
$$\lambda^2 + a_3 - 3\lambda^2 a_5 - \lambda^2 a_3^2 + a_3 a_5 = 0,$$
$$(\lambda^2 - \lambda^6)a_3 + (1 - 3\lambda^4)a_5 + \lambda^4 a_3^2 - 5\lambda^2 a_7 - \lambda^2 a_3 a_5 + a_3 a_7 = 0,$$
$$\lambda^2 a_5 + a_7 = 0,$$
$$\lambda^2 a_7 + a_9 = 0.$$

Перепишем последние четыре уравнения в виде:

$$a_3 = -\lambda^2 + 3\lambda^2 a_5 + \lambda^2 a_3^2 - a_3 a_5,$$
$$a_5 = 3\lambda^4 a_5 - (\lambda^2 - \lambda^6)a_3 - \lambda^4 a_3^2 + 5\lambda^2 a_7 + \lambda^2 a_3 a_5 - a_3 a_7,$$
$$a_7 = -\lambda^2 a_5,$$
$$a_9 = -\lambda^2 a_7,$$

и применим к ним метод последовательных приближений:

Коэфиц.	Исходное значение	Первое приближ.	Второе приближ.	Третье приближ.	Четвертое приближ.
a_3	0	$-\lambda^2$	$-\lambda^2$	$-\lambda^2 + 5\lambda^6$	$-\lambda^2 + 5\lambda^6$
a_5	0	0	λ^4	λ^4	$\lambda^4 - 11\lambda^8$
a_7	0	0	0	$-\lambda^6$	$-\lambda^6$
a_9	0	0	0	0	λ^8

$$\zeta = z - \frac{\lambda^2 - 5\lambda^6}{z} + \frac{\lambda^4 - 11\lambda^8}{z^3} - \frac{\lambda^6}{z^5} + \frac{\lambda^8}{z^7}.$$

Подстановка найденных значений в уравнение для ρ^2 дает

$$\rho^2 = 1 + 4\lambda^4 - 2\lambda^8, \qquad \rho = 1 + 2\lambda^4 - 3\lambda^8.$$

Для контроля вычислений подставляем z в построенный приближенный полином для ζ и полагаем там $t = 0$. После упрощений получаем для ρ значение:

$$\rho = 1 + 2\lambda^4 - 3\lambda^8,$$

что вполне согласуется с прежним.

К решению той же задачи может быть применен и метод последовательных приближений. Будем, как и в п° 2, пытаться искать функцию, совершающую конформное преобразование, в форме ряда, расположенного по степеням λ. Положим, что контур L области имеет уравнение типа (12):

$$\zeta = z + \lambda P_0(z) + \lambda^2 P_1(z) + \ldots + \lambda^{n+1} P_n(z) + \ldots,$$

где $P_n(z)$ есть функция, голоморфная вне контура L и на нем самом, имеющая полюс первого порядка на бесконечности:

$$P_n(z) = \alpha_{n,-1} z + \alpha_{n0} + \frac{\alpha_{n1}}{z} + \ldots = \sum_{\nu=-1}^{\infty} \frac{\alpha_{n,\nu}}{z^\nu}.$$

Мы будем дальше предполагать, что направлению вещественной оси на бесконечности плоскости z соответствует также направление вещественной оси на бесконечности плоскости ζ. Поэтому коэфициенты $\alpha_{n,-1}$ при z в функциях $P_n(z)$ должны быть вещественными.

$$\zeta\bar{\zeta} = z\bar{z} + \lambda[P_0\bar{z} + \bar{P}_0 z] + \ldots + \lambda^n[P_{n-1}\quad \bar{z} + \ldots + \bar{P}_{n-1} z] + \ldots$$

Подставим сюда вместо z его значение (12) на контуре L и приравняем нулю коэфициенты при $\lambda, \lambda^2, \ldots$

$$P_0 e^{-it} + \overline{P}_0 e^{it} + \left\{\frac{d}{d\lambda} z\bar{z}\right\}_{\lambda=0} = 0.$$

Отсюда

$$2R[P_0(e^{it})\, e^{-it}] = -[\delta_0'(0) + \overline{\delta_0'}(0) + \delta_1(0) e^{it} + \overline{\delta_1}(0)\, e^{-it} + \\ + \delta_{-1}(0)\, e^{-it} + \overline{\delta}_{-1}(0) e^{it}] = Q_0.$$

Но $P_0(e^{it})\, e^{-it}$ есть предельное значение функции $\frac{P_0(z)}{z}$ на окружности единичного круга. Вещественная часть ее есть линейный тригонометрический многочлен, как видно из предыдущего равенства. С другой стороны, эта функция имеет в своем разложении около бесконечно далекой точки только отрицательные степени z:

$$\frac{P_0(z)}{z} = \alpha_{0,-1} + \frac{\alpha_{0,0}}{z} + \ldots$$

Поэтому мнимая часть функции $\frac{P_0(z)}{z}$ на единичном круге будет равна взятому с обратным знаком тригонометрическому полиному, сопряженному с Q_0. [1]

$$2I[P_0(e^{it})\, e^{-it}] = -\widetilde{Q_0}$$

Произвольную постоянную, с точностью до которой определяется $\widetilde{Q_0}$ по известному полиному Q_0, мы отбрасываем, помня, что свободный член функции $\frac{P_0(z)}{z}$ должен быть вещественным:

$$P_0(e^{it}) = \frac{e^{it}}{2}(Q_0 - i\widetilde{Q_0}) = \alpha_{0,-1} e^{it} + \alpha_{0,0}.$$

Сравнение с нулем коэфициента при λ^2 дает:

$$R[P_1(e^{it})\, e^{-it}] = Q_1,$$

где Q_1 есть полином второй степени от e^{it} и e^{-it}, откуда

$$P_1(e^{it}) = \frac{e^{it}}{2}(Q_1 - i\widetilde{Q_1})$$

---

[1] Пусть в самом деле функция $\Phi = \frac{a+ib}{z^n}$; на границе единичного круга

$$\Phi = a\cos nt + b\sin nt + i(b\cos nt - a\sin nt),$$

и потому

$$I[\Phi] = b\cos nt - a\sin nt = -\widetilde{R}[\widetilde{\Phi}].$$

и стало быть

$$P_1(e^{it}) = \alpha_{1,-1} e^{it} + \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} e^{-it}$$

и т. д.

Идя таким путем, мы определим функцию $P_n(e^{it})$ как полином, линейный относительно e^{it} и n-ой степени относительно e^{-it}:

$$P_n(e^{it}) = \alpha_{n,-1} e^{it} + \alpha_{n,0} + \frac{\alpha_{n,1}}{e^{it}} + \ldots + \frac{\alpha_{n,n}}{e^{int}}.$$

Пример. Будем искать функцию, совершающую преобразование внешней области контура $z(t) = e^{it}(1 - \lambda e^{it})$.

Положим, что нам нужно определить требуемую функцию до четвертых степеней параметра λ включительно. Согласно с этим полагаем:

$$\zeta = z + \lambda P_0(z) + \lambda^2 P_1(z) + \lambda^3 P_2(z) + \lambda^4 P_3(z).$$

Во всех последующих выкладках мы отбрасываем без оговорок все члены, которые либо сами содержат λ выше чем в четвертой степени или такие, которые после требуемого по ходу рассуждений умножения их на некоторые выражения дают вновь степень λ выше четвертой.

Составим $|\zeta|^2$:

$$\zeta\bar{\zeta} = z\bar{z} + \lambda[P_0\bar{z} + z\overline{P_0}] + \lambda^2[P_1\bar{z} + P_0\overline{P_0} + z\overline{P_1}] + \\ + \lambda^3[P_2\bar{z} + P_1\overline{P_0} + P_0\overline{P_1} + z\overline{P_2}] + \lambda^4[P_3\bar{z} + P_2\overline{P_0} + P_1\overline{P_1} + \\ + P_0\overline{P_2} + z\overline{P_3}].$$

Подставляем сюда вместо z его значение, собираем члены при λ в первой степени и коэфициент приравниваем нулю. Так как $z\bar{z} = 1 - 2\lambda\cos t + \lambda^2$, то коэфициент при λ будет:

$$2R[P_0(e^{it})\, e^{-it}] - 2\cos t = 0,$$

откуда

$$P_0(e^{it})\, e^{-it} = e^{-it}.$$

Следовательно:

$$P_0(z) = 1,$$

$$P_0\bar{z} + z\overline{P_0} = 2[\cos t - \lambda\cos 2t]; \quad P_0\overline{P_0} = 1.$$

Соберем теперь коэфициент при λ^2:

$$P_1(e^{it})\, e^{-it} + e^{it}\overline{P_1(e^{it})} + 1 - 2\cos 2t + 1 = 0.$$

Поэтому

$$P_1(e^{it})\, e^{-it} = e^{-2it} - 1; \quad P_1(z) = \frac{1}{z} - z.$$

Далее:

$$P_1\overline{z}+z\overline{P}_1+P_0\overline{P}_0=-1+6\lambda\cos t+2(1-\lambda^2)\cos 2t-2\lambda\cos 3t;$$

$$P_1\overline{P}_0+P_0\overline{P}_1=2(\lambda+\lambda\cos 2t).$$

Приравняем теперь нулю коэфициент при λ^3; это даст:

$$P_2(e^{it})\,e^{-t}+e^{it}\,\overline{P_2(e^{it})}+6\cos t-2\cos 3t=0,$$

$$P_2(e^{it})\,e^{-it}=e^{-3it}-3e^{-it};\qquad P_2(z)=\frac{1}{z^2}-3.$$

Стало быть

$$P_2\overline{z}+P_1\overline{P}_0+P_0\overline{P}_1+z\overline{P}_2=$$
$$=2[\lambda-3\lambda\cos t+6\lambda\cos 2t+\cos 3t-\lambda\cos 4t]$$

$$P_2\overline{P}_0+P_0\overline{P}_2=-4$$

$$P_1\overline{P}_1=2(1-\cos t).$$

Сравняв с нулем коэфициент при λ^4, найдем:

$$P_3(e^{it})\,e^{-it}+e^{it}\,\overline{P_3(e^{it})}-4+$$
$$+2[1+6\cos 2t-\cos 4t]-2\cos 2t=0$$

$$P_3(e^{it})\,e^{-it}=1-5e^{-2it}+e^{-4it}$$

$$P_3(z)=\frac{1}{z^3}-\frac{5}{z}+z.$$

Следовательно отображающая функция с точностью до четвертых степеней λ есть

$$\zeta=z+\lambda+\lambda^2\left(\frac{1}{z}-z\right)+\lambda^3\left(\frac{1}{z^2}-3\right)+\lambda^4\left(\frac{1}{z^3}-\frac{5}{z}+z\right)=$$
$$=(1-\lambda^2+\lambda^4)z+(\lambda-3\lambda^3)+(\lambda^2-5\lambda^4)\frac{1}{z}+\frac{\lambda^3}{z^2}+\frac{\lambda^4}{z^3}.$$

§ 6. Разложение в ряд по степеням малого параметра в случае преобразования круга на область

№ 1. Нормальное представление контура. Изложенные нами до настоящего времени методы относились к построению функции, совершающей конформное преобразование заданной наперед области на круг. При решении же многих задач теории упругости, теории электричества и т. д. [1] бывает полезно знать, наоборот, функцию, преобразующую круг на заданную область.

[1] См. напр., N. Mouschelischvili, Appliquations des intégrales analogues à celles de Couchy à quelques problèmes de la Physique mathématique, Tiflis 1922, или его работу в Mathematische Annalen, стр. 282—312, Bd. 107, Heft 2.

Если известна функция, совершающая преобразование области на круг, то новая задача, разумеется, решалась бы простым обращением ее. Однако, в большинстве случаев итти таким путем бесполезно, ибо новая задача представляется, как мы узнаем ниже, вообще говоря, более простой, чем прежняя. Она в своей общей постановке мало привлекала до последнего времени внимание математиков и рассматривалась преимущественно для частных областей (линейные и круговые многоугольники), главным образом по той причине, что функция, совершающая преобразование круга на область, не обладает такими простыми экстремальными свойствами, как обратная ей, и решалась в теории обычно именно как задача об обращении. [1] И лишь в последние годы были даны практически удобные методы непосредственного решения этой задачи.

Мы остановимся сначала на методе, принадлежащем Л. В. Канторовичу. Исходным пунктом его является следующее простое соображение. Будем отображать круг единичного радиуса на область B, ограниченную простым замкнутым контуром L. Функция, совершающая требуемое преобразование, регулярна в единичном круге и может быть представлена там рядом Тейлора

$$(1)\qquad z=x+iy=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\zeta^n=\alpha_0+\alpha_1\zeta+\alpha_2\zeta^2+\cdots$$
$$\alpha_n=a_n+ib_n,\qquad |\zeta|<1.$$

Почти для всех встречающихся в практических вопросах областей B написанный степенной ряд будет сходиться и на окружности круга, т. е. когда $|\zeta|=1$. [2] Соответствующая такому ζ точка z должна лежать на контуре L. Поэтому, положив в равенстве (1) $\zeta=e^{i\vartheta}$, мы должны получить уравнение контура L в комплексной форме в виде ряда:

$$(2)\qquad z=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e^{in\vartheta}.$$

Или, если отделить здесь вещественную часть от мнимой, мы получим x и y в форме двух так называемых сопряженных тригонометрических рядов:

$$(3)\qquad x=\varphi(\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\vartheta-b_n\sin n\vartheta);$$

$$y=\psi(\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}(b_n\cos n\vartheta+a_n\sin n\vartheta).$$

[1] См. метод Бибербаха, изложенный в настоящем трудe, или его трактат „Funktionentheorie" Bd. II, стр. 5—9.

[2] В теории функции комплексной переменной доказывается, например, что такое обстоятельство будет иметь место для областей, ограниченных кривыми Жордана.

Факт сопряженности рядов $\varphi(\vartheta)$ и $\psi(\vartheta)$ мы условились раньше обозначать следующим знакоположением:

$$\psi(\vartheta) = \widetilde{\varphi(\vartheta)}.$$

Когда ϑ изменяется от 0 до 2π, точка с координатами x, y обегает один раз контур L.

Параметрическое представление контура L в виде (2) или (3) мы будем ниже называть нормальным.

Наоборот, если нам известно нормальное представление контура L, то аналитическую функцию, совершающую искомое конформное преобразование единичного круга на область, мы находим сразу же либо в виде ряда

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n)\zeta^n, \tag{4}$$

либо в виде интеграла Коши

$$z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\vartheta) + i\psi(\vartheta)}{e^{i\vartheta} - \zeta}\, e^{i\vartheta}\, d\vartheta. \tag{5}$$

Задача конформного преобразования круга на область, следовательно, эквивалентна, при надлежащих условиях сходимости рядов (3) и (4), отысканию специального параметрического представления контура L области — его нормального представления.

Для решения же последней проблемы мы разовьем здесь два метода, отличающихся друг от друга лишь формой, в которой проводятся вычисления, и приводящих к одному и тому же результату — метод бесконечных систем уравнений и метод последовательных приближений.

n° 2. Метод бесконечных систем. К нему можно притти, например, когда кривая L задана неявным уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{6}$$

где $F(x, y)$ есть аналитическая функция своих аргументов для значений x и y, лежащих на контуре L, если искать представление (3) кривой L по методу неопределенных коэфициентов. Именно, подставив в (6) вместо x и y их значения (3) и располагая результат по cos и sin кратных дуг, найдем:

$$F(x, y) = F[\varphi(\vartheta), \psi(\vartheta)] =$$

$$= F_0(a_j, b_j) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(a_j, b_j)\cos n\vartheta + F_n^*(a_j, b_j)\sin n\vartheta. \tag{7}$$ [1]

Отсюда, приравнивая нулю коэфициент при $\cos n\vartheta$ и $\sin n\vartheta$, получим бесконечную систему уравнений относительно коэфициентов a_j и b_j:

$$F_n(a_j, b_j) = 0 \qquad F_n^*(a_j, b_j) = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

[1] Символом $F_n(a_j, b_j)$ мы обозначаем тот факт, что функция F_n зависит от чисел $a_0, b_0, a_1 b_1 \ldots$

Аналогично для случая, когда кривая задана в неявном виде, но в комплексной форме

$$\Phi(z, \bar{z}) = 0. \tag{6'}$$

Подставив в (6′) вместо z ряд (2) и расположив все по положительным и отрицательным степеням $e^{i\vartheta}$, получим

$$\Phi\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{in\vartheta}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\alpha}_n e^{-in\vartheta}\Big) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n(a_j, b_j)\, e^{in\vartheta}, \tag{7'}$$

откуда, вместо системы (8), будем иметь:

$$\Phi_n(a_j, b_j) = 0 \qquad n = \ldots -1, 0, 1, \ldots \tag{8'}$$

Для решения поставленной задачи о нормальном представлении контура L достаточно нахождение такой системы чисел $a_0, b_0, a_1, b_1 \ldots$, которая удовлетворяла бы уравнениям (8) или (8′) и для которой все ряды, которыми мы были вынуждены пользоваться, сходились бы, и кроме того производная от ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n$ не обращалась бы в нуль в круге.

Особенно простой будут системы (8) и (8′) для частного случая областей B, близких к кругу, т. е. таких, для которых контур имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + \lambda P(x, y) = 1 \tag{9}$$

или

$$z\bar{z} + \lambda\Pi(z, \bar{z}) = 1, \tag{9'}$$

где λ — есть некоторый „малый“ параметр, а $P(x, y)$ и $\Pi(z, z)$ удовлетворяют тем же условиям, что $F(x, y)$ и $\Phi(z, z)$. Оба эти уравнения эквивалентны и одно из них переходит в другое, если z заменить через $x + iy$ или, наоборот, x и y заменить через $\frac{z+\bar{z}}{2}$ и $\frac{z-\bar{z}}{2i}$.

Поэтому нам безразлично, для какого из этих уравнений проводить вычисления. Система уравнений вида (8), которую мы найдем, проделывая выкладки для (9), получится, если в уравнениях вида (8′), найденных для (9′), отделить вещественную и мнимую части.

Рассмотрим, например, уравнение в комплексной форме. Очевидно

$$\bar{z}z = \ldots + e^{-i\vartheta}(\alpha_0\bar{\alpha}_1 + \alpha_1\bar{\alpha}_2 + \ldots) + (\alpha_0\bar{\alpha}_0 + \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \ldots) +$$
$$+ e^{i\vartheta}(\alpha_1\bar{\alpha}_0 + \alpha_2\bar{\alpha}_1 + \ldots) + \ldots$$

В разложении функции $\Pi(z, \bar{z})$ в ряд по степеням $e^{i\vartheta}$ коэфициенты при сопряженных величинах $e^{i\vartheta}$ и $e^{-i\vartheta}$ должны быть также сопряженными, так как числа a_j, b_j и параметр λ вещественны, и из равенства (9′) видно, что $\Pi(z, \bar{z})$ должно быть вещественным. Таким обра-

зом $\Pi(z, \bar{z})$ будем иметь после подстановки вместо z и $\bar{z}$ их значений (2) форму:

$$\Pi(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n(a_j, b_j)\, e^{in\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\tau_n(a_j, b_j)}\, e^{-in\vartheta}$$

$$\tau_n(a_j, b_j) = t_n(a_j, b_j) + it_n^*(a_j, b_j); \qquad t_0^*(a_j, b_j) = 0.$$

Сравнив в уравнении (9′) коэфициенты при положительных степенях $e^{i\vartheta}$, имеем систему:

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha_0\bar{\alpha}_0 + \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2 + \ldots + \lambda t_0(a_j, b_j) = 1 \\ \alpha_1\bar{\alpha}_0 + \alpha_2\bar{\alpha}_1 + \alpha_3\bar{\alpha}_2 + \ldots + \lambda\tau_1(a_j, b_j) = 0 \\ \alpha_2\bar{\alpha}_0 + \alpha_3\bar{\alpha}_1 + \alpha_1\bar{\alpha}_2 + \ldots + \lambda\tau_2(a_j, b_j) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Уравнения, которые мы получим приравнивая коэфициенты при отрицательных степенях $e^{i\vartheta}$, будут сопряженными с уравнениями (10) и ничего нового по сравнению с ними не дадут.

Систему (10) можно записать в форме:

$$(11)\quad \begin{cases} \alpha_1\bar{\alpha}_1 = 1 - \alpha_0\bar{\alpha}_0 - \alpha_2\bar{\alpha}_2 - \ldots - \lambda t_0(a_j, b_j) \\ \alpha_2 = -\dfrac{\alpha_1\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_1} - \dfrac{\alpha_3\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1} - \ldots - \dfrac{\lambda}{\bar{\alpha}_1}\tau_1(a_j, b_j) \\ \alpha_3 = -\dfrac{\alpha_2\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_1} - \dfrac{\alpha_1\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1} - \ldots - \dfrac{\lambda}{\bar{\alpha}_1}\tau_2(a_j, b_j) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

К решению ее может быть применен метод последовательных приближений. Зададим произвольно α_0, однако, таким образом, чтобы соответствующая этому комплексному числу точка лежала внутри контура L, что, геометрически говоря, равносильно определению той точки, в которую должен перейти центр круга при отображении. Далее, зададим произвольно аргумент μ α_1, что равносильно заданию направления, соответствующего вещественной оси плоскости ζ в точке α_0 внутри области B; пусть $\arg\alpha_1 = \mu$:

$$\alpha_1 = |\alpha_1| e^{i\mu}.$$

За исходную систему значений для α_j в нашем примере естественно принять ту, которая соответствует случаю $\lambda = 0$. Тогда кривая L будет окружностью единичного радиуса и дело идет, следовательно, об отображении единичной окружности самой на себя так, чтобы центр ее перешел в точку α_0. Такого рода отображение, как известно из теории конформного преобразования, дается элементарной функцией

$$z = \frac{\alpha_0 + e^{i\mu}\zeta}{1 + \bar{\alpha}_0 e^{i\mu}\zeta} = \alpha_0 + e^{i\mu}(1 - \alpha_0\bar{\alpha}_0)(\zeta - e^{i\mu}\bar{\alpha}_0\zeta^2 + \ldots).$$

Поэтому можно в вычислениях отправляться от следующих начальных значений α_j:

$$\alpha_1^{(0)} = (1 - \alpha_0\bar{\alpha}_0)\, e^{i\mu}; \qquad \alpha_2^{(0)} = -e^{2i\mu}(1 - \alpha_0\bar{\alpha}_0)\,\bar{\alpha}_0 \ldots$$

Эти величины удовлетворяют системе (11) для $\lambda = 0$, т. е. при подстановке их в правой части вместо α_j в уравнения

$$\alpha_1\bar{\alpha}_1 = 1 - \alpha_0\bar{\alpha}_0 - \ldots$$

$$\alpha_2 = -\frac{\alpha_1\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_1} - \frac{\alpha_3\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1} - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

мы в них будем последовательно получать $\bar{\alpha}_1\alpha_1$, α_2, ..., что следует из предшествующих соображений и в чем можно убедиться простой проверкой.

Подставив их в правую часть системы (11), мы получим первые приближения для α_j, которые будут отличаться от исходных первой поправкой порядка λ, ибо при подстановке нам придется вычислять прежде всего члены, стоящие до $-\dfrac{\lambda}{\bar{\alpha}_1}\tau_{n-1}$, которые, по только что сказанному, восстановят нам $\alpha_n^{(0)}$, и поправка получится от подстановки $\alpha_j^{(0)}$ в $-\dfrac{\lambda}{\bar{\alpha}_1}\tau_{n-1}$. Известную особенность будет представлять первое уравнение, из которого мы сможем найти лишь модуль α_1. Приписав ему множитель $e^{i\mu}$, получим приближенное значение α_1. Первое приближение вновь подставляем в правую часть и вычисляем 2-е приближение, в котором сохраняем лишь поправки до порядка λ^2. Продолжая этот процесс дальше, найдем k-ое приближение в форме:

$$\alpha_j = \alpha_j^{(0)} + \lambda\alpha_j^{(1)} + \ldots + \lambda^k\alpha_j^{(k)}.$$

При практических вычислениях едва ли целесообразно итти тем общим путем, который мы изложили сейчас. Достаточно построить функцию, совершающую какое-нибудь отображение частного вида. Преобразовав после этого единичный круг $|\zeta| \leqslant 1$ сам в себя, т. е. совершив дробно-линейное преобразование аргумента в построенной функции, мы, как известно из теории, сможем достигнуть самого общего преобразования круга на область. В большинстве случаев наибольшее упрощение выкладок достигается, если положить $\alpha_0 = 0$, т. е. если начало переводить в начало и μ выбрать сообразуясь с симметрией области B. Например, если ось x является осью симметрии кривой L, естественно считать $\mu = 0$. Система уравнений (11) тогда принимает вид:

$$(12)\quad \begin{cases} \alpha_1\bar{\alpha}_1 = 1 - \alpha_2\bar{\alpha}_2 - \ldots - \lambda t_0(a_j, b_j) \\ \alpha_2 = -\dfrac{\alpha_2\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1} - \dfrac{\alpha_1\bar{\alpha}_3}{\bar{\alpha}_1} - \ldots - \dfrac{\lambda}{\bar{\alpha}_1}\tau_1(a_j, b_j) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

и исходные значения для a_j будут:

$$a_1^{(0)} = 1, \quad a_2^{(0)} = a_3^{(0)} = \ldots = 0.$$

Относительно сходимости этого процесса можно показать, как мы увидим немного ниже, что она будет иметь место по крайней мере для малых значений параметра λ.

n° 3. *Примеры.* Проиллюстрируем теперь наши рассуждения на некоторых примерах. Будем искать функцию, отображающую единичный круг на внутренность эллипса:

$$x^2 + y^2 - \lambda(x^2 - y^2) = 1,$$

полуоси которого суть $(1-\lambda)^{-\frac{1}{2}}$ и $(1+\lambda)^{-\frac{1}{2}}$, так, чтобы центр переходил в центр и вещественная ось — в вещественную ось:

$$a_0 = 0, \quad \mu = 0.$$

В силу того, что ось x есть ось симметрии эллипса, все α_j будут вещественными числами:

$$b_1 = b_2 = \ldots = 0.$$

Наконец, так как ось y есть также ось симметрии, все α_j с четными нумерами должны равняться нулю:

$$a_2 = a_4 = \ldots = 0.$$

Уравнение эллипса в комплексной форме есть:

$$z\bar{z} - \lambda\frac{z^2 + \bar{z}^2}{2} = 1.$$

$$\Pi(z, \bar{z}) = -\frac{z^2 + \bar{z}^2}{2},$$

и так как на контуре

$$z^2 = (a_1 e^{i\vartheta} + a_3 e^{3i\vartheta} + \ldots)^2 =$$
$$a_1^2 e^{2i\vartheta} + 2a_1 a_3 e^{4i\vartheta} + (2a_1 a_5 + a_3^2) e^{6i\vartheta} + (2a_1 a_7 + 2a_3 a_5) e^{8i\vartheta} +$$
$$+ (2a_1 a_9 + 2a_3 a_7 + a_5^2) e^{10i\vartheta} + \ldots,$$

функции τ_j определятся равенством:

$$\tau_0 = \tau_1 = \tau_3 = \tau_5 = \ldots = 0$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{2} a_1^2; \quad \tau_4 = -a_1 a_3; \quad \tau_6 = (a_1 a_5 + \frac{1}{2} a_3^2); \quad \tau_8 = (a_1 a_7 + a_2 a_5) \ldots$$

Система (12) поэтому будет

$$a_1^2 = 1 - a_3^2 - a_5^2 - a_7^2 - a_9^2 - a_{11}^2 - \ldots$$

$$a_3 = -\frac{1}{a_1}\left(a_5 a_3 + a_7 a_5 + a_9 a_7 + a_{11} a_9 \ldots - \frac{\lambda}{2} a_1^2\right)$$

$$a_5 = -\frac{1}{a_1}(a_7 a_3 + a_9 a_5 + a_{11} a_7 + \ldots - \lambda a_1 a_3)$$

$$a_7 = -\frac{1}{a_1}\left[a_9 a_3 + a_{11} a_5 + \ldots - \lambda\left(a_1 a_5 + \frac{1}{2} a_3^2\right)\right]$$

$$a_9 = -\frac{1}{a_1}[a_{11} a_3 + \ldots - \lambda(a_1 a_7 + a_3 a_5)]$$

$$a_{11} = -\frac{1}{a_1}\left[a_{13} a_3 + \ldots - \lambda\left(a_1 a_9 + a_3 a_7 + \frac{1}{2} a_5^2\right)\right].$$

. . . . . .

Введем новые неизвестные

$$\rho_0 = a_1, \quad \rho_1 = \frac{a_3}{a_1}, \quad \rho_2 = \frac{a_5}{a_1}, \quad \rho_3 = \frac{a_7}{a_1} \ldots$$

Для них система принимает вид:

$$\rho_0 = (1 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2 + \rho_5^2 + \ldots)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\lambda - \rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_3 - \rho_3\rho_4 - \rho_4\rho_5 - \ldots$$

$$\rho_2 = \lambda\rho_1 - \rho_1\rho_3 - \rho_2\rho_4 - \rho_3\rho_5 - \ldots$$

$$\rho_3 = \lambda\left(\rho_2 + \frac{1}{2}\rho_1^2\right) - \rho_1\rho_4 - \rho_2\rho_5 - \ldots$$

$$\rho_4 = \lambda(\rho_3 + \rho_1\rho_2) - \rho_1\rho_5 - \ldots$$

$$\rho_5 = \lambda\left(\rho_4 + \rho_1\rho_3 + \frac{1}{2}\rho_2^2\right) - \ldots$$

. . . . . .

Оставив пока неопределенным ρ_0 и отбросив первое уравнение системы, из остальных будем находить последовательными приближениями $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ приняв за начальные:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \ldots = 0$$

Результаты вычислений нами сведены в таблицу:

Величины	Начальн. значен.	Первое приближ.	Второе приближ.	Третье приближ.	Четвертое приближ.	Пятое приближ.
ρ_1	0	$\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{4}\lambda^3$	$\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{4}\lambda^3$	$\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{4}\lambda^3+\frac{3}{32}\lambda^5$
ρ_2	0	0	$\frac{1}{2}\lambda^2$	$\frac{1}{2}\lambda^2$	$\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{9}{16}\lambda^4$	$\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{9}{16}\lambda^4$
ρ_3	0	0	0	$\frac{5}{8}\lambda^3$	$\frac{5}{8}\lambda^3$	$\frac{5}{8}\lambda^3-\frac{9}{8}\lambda^5$
ρ_4	0	0	0	0	$\frac{7}{8}\lambda^4$	$\frac{7}{8}\lambda^4$
ρ_5	0	0	0	0	0	$\frac{21}{16}\lambda^5$

Пользуясь этими значениями $\rho_1, \rho_2, \ldots$, из первого уравнения найдем ρ_0 с точностью до пятых степеней λ:

$$\rho_0 = 1-\frac{1}{2}(\rho_1^2+\rho_2^2+\ldots)+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2}(\rho_1^2+\rho_2^2+\ldots)^2+\ldots$$

$$=1-\frac{1}{8}\lambda^2+\frac{3}{128}\lambda^4.$$

Отображающая функция будет с точностью до λ^5:

$$z=\rho_0\zeta(1+\rho_1\zeta^2+\rho_2\zeta^4+\ldots)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{8}\lambda^2+\frac{3}{128}\lambda^4\right)\left[\zeta+\left(\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{4}\lambda^3+\frac{3}{32}\lambda^5\right)\zeta^3+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{9}{16}\lambda^4\right)\zeta^5+\left(\frac{5}{8}\lambda^3-\frac{9}{8}\lambda^5\right)\zeta^7+\frac{7}{8}\lambda^4\zeta^9+\frac{21\lambda^5}{16}\zeta^{11}\right].$$

В частном случае для эллипса

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=\frac{1}{4}$$

найдем $\lambda=\frac{1}{4}$, благодаря чему отображающая функция, если ограничиться двумя десятичными знаками в коэфициентах, будет:

$$z=0{,}99\,[\zeta+0{,}12\zeta^3+0{,}03\zeta^5+0{,}01\zeta^7].$$

Более точные подсчеты показывают, что кривая, являющаяся изображением круга, отходит от эллипса на величину, не большую, чем 0,02.

Пример 11. Развиваемый нами метод нахождения отображающей функции может быть применен во многих случаях, когда контур, ограничивающий область, составлен из кусков нескольких алгебраических кривых. В качестве подобного примера решим задачу об отображении круга на квадрат. Мы будем иметь в виду квадрат со сторонами длины 2, параллельными осям координат.

Допускаем опять переход центра в центр:

$$\alpha_0=0$$

и сохранение вещественных осей:

$$\mu=0.$$

Уравнение сторон квадрата будет:

$$(x^2-1)(y^2-1)=0$$

или

$$x^2+y^2-x^2y^2=1.$$

В комплексной же форме

$$z\bar{z}+\left(\frac{z^2-\bar{z}^2}{4}\right)^2=1.$$

Вводя параметр λ, рассмотрим семейство кривых, для которых квадрат получается при $\lambda=1$:

$$z\bar{z}+\lambda\left(\frac{z^2-\bar{z}^2}{4}\right)^2=1.$$

Осями симметрии здесь будут не только координатные оси, но и биссектрисы координатных углов; поэтому кроме равенств $b_1=b_2=b_3=\ldots=0$ и $a_2=a_4=a_6=\ldots=0$ будут еще выполнены $a_3=a_7=a_{11}=\ldots=0$. Нормальное представление (2) для z поэтому ищем в виде:

$$z=a_1e^{i\vartheta}+a_5e^{5i\vartheta}+a_9e^{9i\vartheta}+a_{13}e^{13i\vartheta}+\ldots$$

$$\Pi(z,\bar{z})=\left(\frac{z^2-\bar{z}^2}{4}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{16}\left[a_1^2e^{2i\vartheta}+2a_1a_5e^{6i\vartheta}+(2a_1a_9+a_5^2)e^{10i\vartheta}+\ldots-a_1^2e^{-2i\vartheta}-\right.$$

$$\left.-2a_1a_5e^{-6i\vartheta}-(2a_1a_9+a_5^2)e^{-10i\vartheta}+\ldots\right]^2$$

откуда видно, что

$$\tau_0(a_j, b_j) = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1^2}{2}\right)^2 + (a_1a_5)^2 + \left(a_1a_9 + \frac{1}{2}a_5^2\right)^2 + (a_1a_{13} + a_5a_9)^2 + \dots\right],$$

$$\tau_4(a_j, b_j) = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{2}\right)^2 + (a_1a_5)\frac{a_1^2}{2} + \left(a_1a_9 + \frac{1}{2}a_5^2\right)(a_1a_5) + \dots\right],$$

$$\tau_8(a_j, b_j) = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}a_1^2(a_1a_5) + \left(a_1a_9 + \frac{1}{2}a_5^2\right)\frac{a_1^2}{2} + (a_1a_{13} + a_5a_9)(a_1a_5) + \dots\right]$$

$$\tau_{12}(a_j, b_j) = -\frac{1}{2}\left[-\frac{a_1^2}{2}\left(a_1a_9 + \frac{1}{2}a_5^2\right) - \frac{1}{2}(a_1a_5)^2 + (a_1a_{13} + a_5a_9)\frac{a_1^2}{2} + \dots\right].$$

Система уравнений (12) для определения a_j принимает вид:

$$a_1^2 = 1 - a_5^2 - a_9^2 - a_{13}^2 - \dots + \frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{a_1^2}{2}\right)^2 + (a_1a_5)^2 + \left(a_1a_9 + \frac{1}{2}a_5^2\right)^2 + (a_1a_{13} + a_5a_9)^2 + \dots\right],$$

$$a_5 = -\frac{a_5a_9}{a_1} - \frac{a_9a_{13}}{a_1} - \dots + \frac{\lambda}{2a_1}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{2}\right)^2 + a_1a_5\frac{a_1^2}{2} + \left(a_1a_9 + \frac{1}{2}a_5^2\right)a_1a_5 + (a_1a_{13} + a_5a_9)\left(a_1a_9 + \frac{1}{2}a_5^2\right) + \dots\right]$$

$$a_9 = -\frac{a_5a_{13}}{a_1} - \dots + \frac{\lambda}{2a_1}\left[-\frac{a_1^2}{2}(a_1a_5) + \left(a_1a_9 + \frac{1}{2}a_5^2\right)\frac{1}{2}a_1^2 + (a_1a_{13} + a_5a_9)a_1a_5 + \dots\right]$$

$$a_{13} = -\frac{a_5a_{17}}{a_1} - \dots + \frac{\lambda}{2a_1}\left[-\frac{a_1^2}{2}\left(a_1a_9 + \frac{1}{2}a_5^2\right) - \frac{1}{2}(a_1a_5)^2 + (a_1a_{13} + a_5a_9)\frac{a_1^2}{2} + \dots\right].$$

Результат решения ее по методу последовательных приближений, если принять за начальные значения:

$$a_1 = 1,\ a_5 = a_9 = \dots = 0$$

и ограничиться тремя приближениями, сведен в следующую таблицу:

Величины	Начальн. значение	Первое приближ.	Второе приближ.	Третье приближение
a_1	1	$1+\frac{1}{16}\lambda$	$1+\frac{1}{16}\lambda+\frac{3}{256}\lambda^2$	$1+\frac{1}{16}\lambda+\frac{3}{256}\lambda^2+\frac{3}{1024}\lambda^3$
a_5	0	$-\frac{1}{16}\lambda$	$-\frac{1}{16}\lambda-\frac{7}{256}\lambda^2$	$-\frac{1}{16}\lambda-\frac{7}{256}\lambda^2-\frac{11}{1024}\lambda^3$
a_9	0	0	$\frac{1}{64}\lambda^2$	$\frac{1}{64}\lambda^2+\frac{27}{2048}\lambda^3$
a_{13}	0	0	0	$-\frac{11}{2048}\lambda^3$

откуда видно, что приближенно отображающая функция будет:

$$z = \left(1 + \frac{\lambda}{16} + \frac{3\lambda^2}{256} + \frac{3\lambda^3}{1024}\right)\zeta - \left(\frac{\lambda}{16} + \frac{7\lambda^2}{256} + \frac{11\lambda^3}{1024}\right)\zeta^5 + \left(\frac{\lambda^2}{64} + \frac{27\lambda^3}{2048}\right)\zeta^9 - \frac{11\lambda^3}{2048}\zeta^{13}.$$

Полагая в частности $\lambda = 1$, найдем приближенно функцию, отображающую единичный круг на рассматриваемый квадрат:

$$z = 1\frac{79}{1024}\zeta - \frac{103}{1024}\zeta^5 + \frac{59}{2048}\zeta^9 - \frac{11}{2048}\zeta^{13}.$$

Можно показать, что точное решение задачи дается следующим эллиптическим интегралом:

$$z = \frac{\int_0^\zeta (1+t^4)^{-\frac{1}{2}}\,dt}{\int_0^1 (1+t^4)^{-\frac{1}{2}}\,dt} = 1{,}080\left(\zeta - \frac{1}{10}\zeta^5 + \frac{1}{24}\zeta^9 - \frac{5}{208}\zeta^{13} + \dots\right).$$

[1] См., напр., Смирнов, Курс высшей математики, том III, стр. 353.

Сравнение его с предшествующим показывает, что приближенное значение первого коэфициента отличается от точного не более чем на 0,003 и второго не более чем на 0,01.

n° 4. Замечание о вычислениях. Примеры. В большинстве практических задач параметр λ бывает задан численно. Введение его в качестве неопределенного и затем разыскание разложений коэфициентов по степеням λ представляется не совсем удобным, так как нахождение этих разложений требует значительных алгебраических выкладок. Чтобы избежать этого неудобства, можно избрать несколько иной путь. Именно, сразу подставить вместо λ нужное в данной задаче его численное значение и затем, начав с определенной системы первых приближений искомых коэфициентов, подставлять их в правую часть системы, находить вторые приближения, опять подставлять их в правую часть, находить третьи приближения и т. д. до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность вычислений коэфициентов.

Пример 1. Применим этот способ для решения системы уравнений примера II предыдущего n°, подставив туда значение $\lambda = 1$ и производя вычисления с точностью до 0,0001. Результаты вычислений сведены нами в следующую таблицу:

Величины	Начальное значение	Первое приближение	Второе приближение	Третье приближение	Четвертое приближение	Пятое приближение
a_1	1	1,0607	1,0748	1,0785	1,0795	1,0807
a_5	0	−0,0625	−0,0922	−0,1014	−0,1069	−0,1061
a_9	0	0	0,0181	0,0319	0,0402	0,0450
a_{13}	0	0	−0,0022	−0,0074	−0,0167	−0,0242
a_{17}	0	0	0	0,0021	0,0050	0,0174
a_{21}	0	0	0	−0,0003	−0,0013	−0,0126

Пример II. По тому же способу найдем функцию, отображающую единичный круг на область, ограниченную кривой:

$$(y^2 - 1 - x)(y^2 - 1 + x) = 0,$$

состоящей из двух параболических дуг. Ее уравнение в комплексной форме есть:

$$z\bar{z} - 1 - \frac{1}{16}\left[4(z-\bar{z})^2 + (z-\bar{z})^4\right] = 0.$$

В силу симметрии области B относительно осей координат, $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0$; $a_2 = a_4 = \ldots = 0$. Нормальное представление ищем в форме:

$$z = a_1 e^{i\theta} + a_3 e^{3i\theta} + a_5 e^{5i\theta} + \cdots$$

Система (12) в этом случае, как легко проверить вычислениями, приводится к виду:

$$a_1^2 = 1 - a_3^2 - a_5^2 - \ldots + \frac{1}{2}\left(1 - \delta_0 + \frac{\delta_0^2}{2} + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots\right),$$

$$a_3 = -\frac{1}{a_1}\left[a_3 a_5 + a_5 a_7 + \ldots - \frac{1}{2}(-\delta_1 + \delta_0\delta_1 + \delta_1\delta_2 + \ldots)\right],$$

$$a_5 = -\frac{1}{a_1}\left[a_3 a_7 + a_5 a_9 + \ldots - \frac{1}{2}\left(-\delta_2 + \frac{\delta_1^2}{2} + \delta_0\delta_2 + \delta_1\delta_3 + \ldots\right)\right],$$

$$a_7 = -\frac{1}{a_1}\left[a_3 a_9 + a_5 a_{11} + \ldots - \frac{1}{2}(-\delta_3 + \delta_1\delta_2 + \delta_0\delta_3 + \delta_1\delta_4 + \ldots)\right],$$

. . . . . .

где для краткости положено:

$$\delta_0 = a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \ldots$$

$$\delta_1 = -\frac{a_1^2}{2} + a_1 a_3 + a_3 a_5 + \ldots$$

$$\delta_2 = -a_1 a_3 + a_1 a_5 + a_3 a_7 + \ldots$$

$$\delta_3 = -a_1 a_5 - \frac{1}{2}a_3^2 + a_1 a_7 + a_3 a_9 + \ldots$$

$$\delta_4 = -a_1 a_7 - a_3 a_5 + a_1 a_9 + a_3 a_{11} + \ldots$$

. . . . . .

Определяя все $a_1, a_3, a_5, \ldots$, по способу последовательных приближений в том же виде, как в предыдущем примере, получим для искомых неизвестных следующую таблицу значений:

Величины	Начальное значение	Первое приближение	Второе приближение	Третье приближение	Четвертое приближение	Пятое приближение
a_1	1	0,936	0,922	0,916	0,914	0,914
a_3	0	0	0,013	0,019	0,024	0,025
a_5	0	0,062	0,064	0,058	0,054	0,053
a_7	0	0	−0,010	−0,010	−0,008	−0,008
a_9	0	0	0,014	0,017	0,016	0,015
a_{11}	0	0	−0,002	−0,006	−0,004	−0,003

Если удовлетвориться результатом, даваемым пятым приближением, то отображающая функция будет:

$$z = 0{,}914\,\zeta + 0{,}025\,\zeta^3 + 0{,}053\,\zeta^5 - 0{,}008\,\zeta^7 + 0{,}015\,\zeta^9 - 0{,}003\,\zeta^{11}.$$

n° 5. Метод последовательных приближений для областей, близких к кругу, контур которых задан неявным уравнением. Мы изложим метод последовательных приближений сначала в его простейшей форме применительно к областям, близким к кругу. Обобщение этого метода для областей иного вида мы дадим в следующих n° n°. Пусть контур L_λ, ограничивающий область B_λ, зависит от параметра λ и имеет своим уравнением

$$x^2 + y^2 + \lambda P(x, y) = 1 \tag{13}$$

или в комплексной форме

$$z\bar{z} + \lambda \Pi(z, \bar{z}) = 1; \qquad \Pi(x + iy, x - iy) = P(x, y). \tag{13'}$$

$P(x, y)$ и $\Pi(z, \bar{z})$, как и раньше, суть аналитические функции от x и y вблизи точек окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Будем искать функцию, совершающую конформное преобразование единичного круга на область B_λ. Для этого достаточно, как мы знаем, найти нормальное представление кривой L_λ, т. е. такое ее параметрическое представление

$$x = x(\vartheta, \lambda), \quad y = y(\vartheta, \lambda), \tag{14}$$

что $x(\vartheta, \lambda)$ и $y(\vartheta, \lambda)$ суть сопряженные функции от ϑ.

Для отыскания требуемого представления применим метод последовательных приближений, но не для вычисления отдельных коэфициентов разложений этих функций в тригонометрические ряды по ϑ, а для нахождения разложений в ряды по степеням параметра λ самих функций $x(\vartheta, \lambda)$, $y(\vartheta, \lambda)$ или $z(\vartheta, \lambda) = x(\vartheta, \lambda) + iy(\vartheta, \lambda)$.

Положим для этой цели

$$\begin{aligned} x(\vartheta, \lambda) &= x_0(\vartheta) + \lambda x_1(\vartheta) + \ldots + \lambda^n x_n(\vartheta) + \ldots, \\ y(\vartheta, \lambda) &= y_0(\vartheta) + \lambda y_1(\vartheta) + \ldots + \lambda^n y_n(\vartheta) + \ldots, \\ z(\vartheta, \lambda) &= z_0(\vartheta) + \lambda z_1(\vartheta) + \ldots + \lambda^n z_n(\vartheta) + \ldots, \end{aligned} \tag{15}$$

где $x_n(\vartheta)$ и $y_n(\vartheta)$ суть сопряженные функции:

$$y_n(\vartheta) = \widetilde{x_n(\vartheta)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

и $x_0(\vartheta) + iy_0(\vartheta) = z_0(\vartheta)$ — функция, с помощью которой дается нормальное представление кривой L_λ при $\lambda = 0$, т. е. окружности единичного радиуса. Вид этой функции будет зависеть от того, какое из преобразований единичного круга самого на себя мы избираем. Чтобы упростить все выкладки, мы остановимся сразу же на простейшем из таких преобразований — тождественном преобразовании $z = \zeta$; с преобразованиями общего вида мы встретимся в следующем n°.

Тогда

$$x_0(\vartheta) = \cos\vartheta; \; y_0(\vartheta) = \sin\vartheta \text{ и } z_0(\vartheta) = e^{i\vartheta}.$$

Далее, ради простоты мы будем предполагать, что при всяком λ начало координат $\zeta = 0$ переходит в начало координат плоскости z. Все функции $z_n(\vartheta)$ будут тогда граничными значениями функций, регулярных в единичном круге и обращающихся в нуль при $\zeta = 0$. Поэтому разложение $z_n(\vartheta)$ в тригонометрический ряд не должно содержать свободного члена.

Будем искать теперь функции $x_n(\vartheta)$, $y_n(\vartheta)$ и $z_n(\vartheta)$ последовательными приближениями. Так как формулы для определения $x_n(\vartheta)$ и $y_n(\vartheta)$ получатся из соответствующих формул для $z_n(\vartheta)$ путем отделения в них вещественной и мнимой частей, нам достаточно провести все вычисления для $z_n(\vartheta)$.

Подставим в уравнение (13') разложение для $z(\vartheta, \lambda)$ и сравним коэфициенты при λ:

$$\begin{aligned} &(z_0 + \lambda z_1 + \ldots)(\bar{z}_0 + \lambda \bar{z}_1 + \ldots) + \\ &+ \lambda \Pi(z_0 + \lambda z_1 + \ldots, \bar{z}_0 + \lambda \bar{z}_1 + \ldots) = 1 \\ &\bar{z}_0 z_1 + \bar{z}_1 z_0 = -\Pi(z_0, \bar{z}_0) = -\tau_1. \end{aligned}$$

В левой части равенства стоит сумма двух сопряженных чисел и оно, следовательно, может быть переписано в форме

$$2R[\bar{z}_0 z_1] = -\tau_1.$$

Для построения числа $\bar{z}_0 z_1$ нам осталось лишь указать его мнимую часть. Но сделать это очень легко, так как каждое из z_k должно иметь вид $z_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} e^{in\vartheta}$, произведение любого z_k на $\bar{z}_0 = e^{-i\vartheta}$ не будет содержать отрицательных степеней $e^{i\vartheta}$ и поэтому для построения $I(\bar{z}_0 z_1)$ нам достаточно взять лишь функцию $-\widetilde{\tau}$, [1] сопряженную в нашем смысле слова с $-\tau_1$

$$2I(\bar{z}_0 z_1) = -\widetilde{\tau}.$$

Следовательно

$$2\bar{z}_0 z_1 = -(\tau_1 + i\widetilde{\tau}_1)$$

и

$$z_1 = -\frac{1}{2} e^{i\vartheta}(\tau_1 + i\widetilde{\tau}_1). \tag{17}$$

[1] Функция $\widetilde{\tau}_1$ будет заключать в себе одну произвольную величину, а именно — свободный член в своем ряде Фурье. То же можно сказать и относительно всех других величин τ_n, которые будут нам встречаться ниже. Однако, все эти постоянные равны нулю в силу соответствия $\zeta = 0$ и $z = 0$.

Тем же путем, каким мы нашли z_1, можно по известным $z, z_2, \ldots, z_{n-1}$ найти z_n. Для этой цели сравниваем коэфициенты при λ^n в равенстве (13′), после того как внесем в него вместо z ряд (15).

Мы получим равенство вида:

$$\bar{z}_0 z_n + \bar{z}_n z_0 = -\tau_n,$$

где через τ_n обозначено

$$\tau_n = (\bar{z}_1 z_{n-1} + \ldots + \bar{z}_{n-1} z_1) + \frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\Pi(z_0 + \lambda z_1 + \ldots + \lambda^{n-1} z_{n-1}, \bar{z}_0 + \lambda\bar{z}_1 + \ldots + \lambda^{n-1}\bar{z}_{n-1})\right\}_{\lambda=0}.$$

По прежним соображениям

$$2R[\bar{z}_0 z_n] = -\tau_n,$$

$$2I[\bar{z}_0 z_n] = -\tilde{\tau}_n, \tag{18}$$

$$z_n = -\frac{1}{2} e^{i\vartheta}(\tau_n + i\tilde{\tau}_n).$$

Укажем теперь формулы, следуя которым можно вычислять $x_n(\vartheta)$ и $y_n(\vartheta)$. Для этого разделим вещественную и мнимую части в (17) и (18).

Так как $P(x, y) = \Pi(z, \bar{z})$, то

$$\tau_1 = \Pi(z_0, \bar{z}_0) = P(x_0, y_0) = T_1$$

. . . . . .

$$\tau_n = \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[(\lambda x_1 + \ldots + \lambda^{n-1} x_{n-1})^2 + (\lambda y_1 + \ldots \lambda^{n-1} y_{n-1})^2 + \lambda P(x_0 + \ldots + \lambda^{n-1} x_{n-1}, y_0 + \ldots + \lambda^{n-1} y_{n-1})\right]\right\}_{\lambda=0} = T_n.$$

Поэтому формулы (17) и (18) дадут для $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$:

$$x_1 = -\frac{T_1\cos\vartheta - \tilde{T}_1\sin\vartheta}{2}; \quad y_1 = -\frac{T_1\sin\vartheta + \tilde{T}_1\cos\vartheta}{2} \tag{17′}$$

. . . . . .

$$x_n = -\frac{T_n\cos\vartheta - \tilde{T}_n\sin\vartheta}{2}; \quad y_n = -\frac{T_n\sin\vartheta + \tilde{T}_n\cos\vartheta}{2}. \tag{18′}$$

Пример. Решим по методу последовательных приближений задачу об отображении круга на эллипс, рассматривавшуюся уже нами

раньше (см. n° 3):

$$z\bar{z} - \frac{\lambda}{2}(z^2 + \bar{z}^2) = 1$$

$$z_0 = e^{i\vartheta}$$

$$\tau_1 = -\frac{1}{2}(e^{2i\vartheta} + e^{-2i\vartheta}) = -\cos 2\vartheta.$$

Мы будем отбрасывать, как условились, все постоянные слагаемые, входящие в $\tilde{\tau}_n$:

$$\tilde{\tau}_1 = -\sin 2\vartheta = -\frac{1}{2i}(e^{2i\vartheta} - e^{-2i\vartheta})$$

$$\tau_1 + i\tilde{\tau}_1 = -e^{2i\vartheta}$$

$$z_1 = \frac{1}{2} e^{3i\vartheta}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\left(e^{i\vartheta} + \frac{\lambda}{2}e^{3i\vartheta}\right)\left(e^{-i\vartheta} + \frac{\lambda}{2}e^{-3i\vartheta}\right) - \frac{\lambda}{2}\left(e^{i\vartheta} + \frac{\lambda}{2}e^{3i\vartheta}\right)^2 - \frac{\lambda}{2}\left(e^{-i\vartheta} + \frac{\lambda}{2}e^{-3i\vartheta}\right)^2\right]\right\}_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{4i\vartheta} - \frac{1}{2}e^{-4i\vartheta} = \frac{1}{4} - \cos 4\vartheta$$

$$\tilde{\tau}_2 = -\sin 4\vartheta, \quad \tau_2 + i\tilde{\tau}_2 = \frac{1}{4} - e^{4i\vartheta}$$

$$z_2 = -\frac{1}{8}e^{i\vartheta} + \frac{1}{2}e^{5i\vartheta}.$$

Продолжая таким же способом дальше, найдем:

$$z = \zeta + \frac{\lambda}{2}\zeta^3 + \lambda^2\left(-\frac{1}{8}\zeta + \frac{1}{2}\zeta^5\right) + \lambda^3\left(-\frac{5}{16}\zeta^3 + \frac{5}{8}\zeta^7\right) + \lambda^4\left(-\frac{1}{32}\zeta - \frac{5}{8}\zeta^5 - \frac{7}{8}\zeta^9\right) + \ldots,$$

что совершенно совпадает с полученным раньше результатом.

n° 6. Метод последовательных приближений для областей, близких к таким, конформное преобразование круга на которые — известно. Пусть

$$F(x, y, \lambda) = 0, \tag{19}$$

или в комплексной форме

$$\Phi(z, \bar{z}, \lambda) = 0 \tag{19′}$$

есть уравнение контура L_λ, ограничивающего конечную область

B_λ, зависящую от параметра λ. При $\lambda = 0$ кривая (19) обращается в кривую L_0:

$$F(x, y, 0) = 0, \tag{20}$$

ограничивающую область B_0. Будем предполагать, что L_0 — простая замкнутая кривая без особых точек, т. е. такая, что

$$[F_x(x, y, 0)]^2 + [F_y(x, y, 0)]^2 \neq 0,$$

если точка (x, y) лежит на L_0.

Допустим далее, что нам известна функция $\chi(\zeta)$, совершающая конформное преобразование единичного круга на область B_0. Тогда мы сможем указать нормальное параметрическое представление контура L_0:

$$x = x_0(\vartheta),\ y = y_0(\vartheta),\ \text{где}\ y_0(\vartheta) = \widetilde{x_0(\vartheta)} \tag{21}$$

или

$$z = z(\vartheta).$$

Сделаем еще предположение о том, что $F(x, y, \lambda)$ есть аналитическая функция своих аргументов вблизи значений $\lambda = 0$ и x и y, лежащих на кривой L_0. В теории функций комплексной переменной для контуров вида L_0 доказывается, что производная от функции, совершающей конформное преобразование окружности на них, будет иметь отличный от нуля модуль не только внутри окружности, но и на ней самой, т. е. что

$$|z'_0|^2 = x_0'^2(\vartheta) + y_0'^2(\vartheta) > 0.^1 \tag{22}$$

Будем искать теперь функцию, совершающую конформное преобразование круга на область B_λ. Для нахождения нормального параметрического представления контура ее L_λ мы полагаем, следуя методу предыдущего п°:

$$\begin{aligned} x(\vartheta, \lambda) &= x_0(\vartheta) + \lambda x_1(\vartheta) + \ldots + \lambda^n x_n(\vartheta) + \ldots \\ y(\vartheta, \lambda) &= y_0(\vartheta) + \lambda y_1(\vartheta) + \ldots + \lambda^n y_n(\vartheta) + \ldots \end{aligned} \tag{22'}$$

или

$$z(\vartheta, \lambda) = z_0(\vartheta) + \lambda z_1(\vartheta) + \ldots + \lambda^n z_n(\vartheta) + \ldots \tag{22''}$$

Функции $x_0(\vartheta)$, $y_0(\vartheta)$, $z_0(\vartheta)$ соответствуют случаю $\lambda = 0$ и совпадают с указанными в равенстве (21).

Будем находить теперь последовательно $x_n(\vartheta)$, $y_n(\vartheta)$, $z_n(\vartheta)$. Вновь достаточно построить лишь формулы для определения $z_n(\vartheta)$, так как

---

[1] Здесь и всюду ниже в этом § мы под z'_0 подразумеваем предельные значения на единичной окружности производной $\frac{dz_0}{d\zeta}$ от функции $z_0 = \chi(\zeta)$, дающей преобразование единичного круга на L_0:

$$z'_0 = \frac{dz_0}{d\zeta} = \frac{dz_0}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{d\zeta} = -ie^{-i\vartheta}\frac{dz_0}{d\vartheta} = -ie^{-i\vartheta}\left(x'_0(\vartheta) + iy'_0(\vartheta)\right)$$

соответствующие равенства для $x_n(\vartheta)$ и $y_n(\vartheta)$ получатся путем разделения в них вещественных и мнимых частей.

Для упрощения вычислений будем считать, что точка $z = 0$ лежит внутри B_λ и начало координат плоскости ζ переходит в точку $z = 0$. Сообразно с этим в разложениях $z_n(\vartheta)$ по степеням $e^{i\vartheta}$ будут отсутствовать свободные члены.

Подставим сначала в равенство (19′) вместо z два первых члена разложения (22″) и приравняем нулю коэфициенты при первой степени λ

$$\left\{\frac{d}{d\lambda}\Phi(z_0 + \lambda z_1, \bar{z}_0 + \lambda\bar{z}_1, \lambda)\right\}_{\lambda=0} = 0$$

$$\Phi_z(z_0, \bar{z}_0, 0)z_1 + \Phi_{\bar{z}}(z_0, \bar{z}_0, 0)\bar{z}_1 + \Phi_\lambda(z_0, \bar{z}_0, 0) = 0.$$

Обозначив ради краткости

$$\Phi_z(z_0, \bar{z}_0, 0) = \Psi;\ \Phi_{\bar{z}}(z_0, \bar{z}_0, 0) = \theta;\ \Phi_\lambda(z_0, \bar{z}_0, 0) = \tau_1, \tag{23}$$

будем иметь

$$\Psi z_1 + \theta\bar{z}_1 = -\tau_1. \tag{24}$$

С другой стороны, подставляя вместо z и $\bar{z}$ в уравнение кривой L_0 z_0 и $\bar{z}_0$: $\Phi(z_0, \bar{z}_0, 0) = 0$, дифференцируя результат по ϑ и умножая на $-i$, получим:

$$\Psi z'_0 e^{i\vartheta} - \theta\bar{z}'_0 e^{-i\vartheta} = 0,$$

где z'_0 есть граничное значение производной $\frac{dz}{d\zeta}$.

Пользуясь этим равенством, мы можем уравнение (24) переписать в форме:

$$\frac{z_1}{z'_0 e^{i\vartheta}} + \frac{z_1}{\bar{z}'_0 e^{-i\vartheta}} = -\frac{\tau_1}{\Psi z'_0 e^{i\vartheta}} = -\frac{\tau_1}{\theta\bar{z}'_0 e^{-i\vartheta}} = \Lambda_1$$

или

$$2R\left(\frac{z_1}{z'_0 e^{i\vartheta}}\right) = \Lambda_1.$$

Функция z'_0, в силу конформности преобразования, будет граничным значением функции, отличной от нуля всюду в единичном круге. Поэтому частное $\frac{z_1}{z'_0 e^{i\vartheta}}$ будет представлять собой граничное значение регулярной функции

$$I\left[\frac{z_1}{z'_0 e^{i\vartheta}}\right] = \frac{1}{2}\widetilde{\Lambda_1}.$$

Поэтому

$$z_1 = \frac{z'_0 e^{i\vartheta}}{2}\left(\Lambda_1 + i\widetilde{\Lambda_1}\right). \tag{25}$$

Совершенно так же мы поступаем, если хотим определить $z_n(\theta)$. Подставив в (19′) вместо z ряд (22″) и приравняв нулю коэфициент при λ^n в полученном выражении, найдем:

$$\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\Phi(z_0+\lambda z_1+\ldots+\lambda^n z_n;\ \bar{z}_0+\lambda\bar{z}_1+\ldots+\lambda^n\bar{z}_n,\lambda)\right\}_{\lambda=0}=$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\Phi(z_0+\ldots+\lambda^{n-1}z_{n-1};\bar{z}_0+\ldots+\lambda^{n-1}z_{n-1},\lambda)+\right.\right.$$

$$+\Phi_z(z_0+\ldots+\lambda^{n-1}z_{n-1},\bar{z}_0+\ldots+\lambda^{n-1}z_{n-1},\lambda)\lambda^n z_n+$$

$$\left.+\Phi_{\bar{z}}(z_0+\ldots+\lambda^{n-1}z_{n-1},\bar{z}_0+\ldots+\lambda^{n-1}\bar{z}_{n-1},\lambda)\lambda^n\bar{z}_n+\right.$$

$$\left.\left.+\Phi_{z\bar{z}}(z_0+\ldots+\lambda^{n-1}z_{n-1},\bar{z}_0+\ldots+\lambda^{n-1}\bar{z}_{n-1},\lambda)(\lambda^n z_n)^2+\ldots\right]\right\}_{\lambda=0}=$$

$$=\Phi_z(z_0,\bar{z}_0,0)z_n+\Phi_{\bar{z}}(z_0,\bar{z}_0,0)\bar{z}_n+$$

$$+\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\Phi(z_0+\ldots+\lambda^{n-1}z_{n-1},\bar{z}_0+\ldots+\lambda^{n-1}\bar{z}_{n-1},\lambda)\right\}_{\lambda=0}$$

или, если обозначить

$$\tau_n=\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\Phi(z_0+\ldots+\lambda^{n-1}z_{n-1},\bar{z}_0+\ldots+\lambda^{n-1}\bar{z}_{n-1},\lambda)\right\}_{\lambda=0},$$

$$\Psi z_n+\theta\bar{z}_n=-\tau_n.$$

Использовав опять уравнение $\Psi z_0' e^{i\vartheta}+\theta\bar{z}_0' e^{-i\vartheta}=0$, будем иметь следующую, не нуждающуюся в пояснениях, цепь равенств:

$$\frac{z_n}{z_0' e^{i\vartheta}}+\frac{z_n}{z_0' e^{-i\vartheta}}=-\frac{\tau_n}{\Psi z_0' e^{i\vartheta}}=-\frac{\tau_n}{\theta\bar{z}_0' e^{-i\vartheta}}=\Lambda_n$$

$$2R\left[\frac{z_n}{z_0' e^{i\vartheta}}\right]=\Lambda_n,\qquad I\left[\frac{z_n}{z_0' e^{i\vartheta}}\right]=\tfrac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_n$$

и окончательно получим:

$$z_n=\frac{z_0' e^{i\vartheta}}{2}(\Lambda_n+i\widetilde{\Lambda}_n). \tag{26}$$

Такими будут формулы, позволяющие последовательно вычислять z_1, $z_2\ldots$ Для нахождения соответствующих формул для x_1, $y_1,\ldots x_n$, $y_n\ldots$ разделим в них вещественную и мнимую части.

Так как $\Phi(z,\bar{z},\lambda)=F(x,y,\lambda)$,

$$\tau_n=\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\Phi(z_0+\ldots+\lambda^{n-1}z_{n-1},\bar{z}_0+\ldots+\lambda^{n-1}\bar{z}_{n-1},\lambda)\right\}_{\lambda=0}=$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}F(x_0+\ldots+\lambda^{n-1}x_{n-1},y_0+\ldots+\lambda^{n-1}y_{n-1},\lambda)\right\}_{\lambda=0}=T_n$$

и в силу очевидных равенств

$$F_x=\Phi_z\frac{\partial z}{\partial x}+\Phi_{\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}=\Phi_z+\Phi_{\bar{z}},$$

$$F_y=\Phi_z\frac{\partial z}{\partial y}+\Phi_{\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial y}=i\Phi_z-i\Phi_{\bar{z}},$$

если ввести обозначения $F_x(x_0,y_0,0)=u$, $F_y(x_0,y_0,0)=v$, будем иметь

$$\Psi=\Phi_z(z_0,\bar{z}_0,0)=\frac{1}{2}(u-iv);\quad\theta=\frac{1}{2}(u+iv);$$

$$\Lambda_n=\frac{T_n}{\frac{i}{2}(u-iv)(x_0'+iy_0')}=-\frac{T_n}{\frac{i}{2}(u+iv)(x_0'-iy_0')};$$

но

$$\frac{y_0'}{x_0'}=-\frac{F_x(x_0,y_0,0)}{F_y(x_0,y_0,0)}=-\frac{u}{v},$$

и поэтому

$$\Lambda_n=2\frac{T_n x_0'}{v(x_0'^2+y_0'^2)}=2S_n.$$

Равенства (25) и (26) тогда дают:

$$x_1=R\left[\frac{z_0' e^{i\vartheta}}{2}(2S_1+2i\widetilde{S_1})\right]=x_0'\widetilde{S_1}+y_0' S_1; \tag{25′}$$

$$y_1=-x_0' S_1+y_0'\widetilde{S_1}$$

$$x_n=x_0'\widetilde{S_n}+y_0' S_n;\quad y_n=-x_0' S_n+y_0'\widetilde{S_n}. \tag{26′}$$

n° 7. Метод последовательных приближений для кривых, заданных в параметрической форме. Мы развьем сейчас метод последовательных приближений для случая, когда кривая, ограничивающая область, дается в параметрической форме. Ход рассуждений в основной своей идее близок к уже изложенному в предшествующем n°, однако в нем имеются свои специфические черты, которые заставляют провести рассуждения для этого случая вновь, хотя бы и более коротко. Мы выпускаем простейший случай области, близкой к кругу, переходя сразу к более общему случаю.

Итак, допустим, что простая замкнутая кривая L_λ, ограничивающая односвязную область B_λ, задана уравнениями:

$$x=\varphi(t,\lambda),\qquad y=\psi(t,\lambda). \tag{27}$$

Мы можем предположить функции φ и ψ развернутыми в тригонометрические ряды

$$x = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos nt + r_n \sin nt),$$

$$y = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (q_n \cos nt - s_n \sin nt),$$

которые, вообще говоря, не будут сопряженными. Если поэтому мы составим величину

$$z = x + iy = \pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\pi_n \cos nt + \rho_n \sin nt)$$

$$\pi_n = p_n + iq_n \qquad \rho_n = r_n - is_n$$

и заменим в этом ряду $\cos nt$ и $\sin nt$ по формулам Эйлера через степени числа e^{it}, мы получим z как некоторую функцию от e^{it}, разложение которой в ряд будет содержать не только положительные, но и отрицательные степени e^{it}:

$$(28)\quad z = \omega(e^{it}, \lambda) = \pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi_n}{2} - \frac{\rho_n}{2} i\right) e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi_n}{2} + \frac{\rho_n}{2} i\right) e^{-int}.$$

Мы ниже будем предполагать кривую заданной именно в этой последней форме. Коэфициенты π_n и ρ_n будут, разумеется, зависеть от λ. Поставим условие, чтобы при $\lambda = 0$ ряд (28) не содержал бы отрицательных степеней λ, т. е. разложение $\omega(e^{it}, \lambda)$ в тригонометрический ряд давало бы нормальное представление кривой L_0. Будем кроме того считать, что кривая L_0 не имеет особых точек.

Относительно же функции $\omega(w, \lambda)$ предположим, что она аналитическая по λ и w вблизи значения $\lambda = 0$ и $|w| = 1$.

Если бы случилось, что параметр t был полярным углом в плоскости ζ, т. е. $\zeta = |\zeta| e^{it}$, то отрицательных степеней e^{it} в разложении (28) не было бы и мы имели бы нормальный ряд для z, по которому сразу построили бы отображающую функцию. Но взятый нами параметр t вообще не совпадает с полярным углом ϑ, и наша задача будет путем некоторой замены перейти от t к ϑ, т. е. так заменить параметр в (28), чтобы после замены ряд (28) стал бы нормальным. Зависимость между t и ϑ берем в форме

$$(29)\quad t = \vartheta + \lambda\varphi_1(\vartheta) + \lambda^2\varphi_2(\vartheta) + \ldots,$$

где $\varphi_1(\vartheta)$, $\varphi_2(\vartheta)$, ... суть некоторые вещественные периодические функции, определением которых мы займемся ниже. Член, свободный от λ, нами взят в виде ϑ по той причине, что по условию ряд (28) для $\lambda = 0$ будет нормальным и тогда наверное t должно совпадать с ϑ.

Пусть все $\varphi_i(\vartheta)$ для $i \leqslant n-1$ определены так, что коэфициенты при λ^i в разложении $\omega(e^{it}, \lambda)$ по степеням λ не содержали бы в своих рядах Фурье отрицательных степеней $e^{i\vartheta}$.

Подберем теперь $\varphi_n(\vartheta)$ так, чтобы это имело место при $i = n$. Подставим в $\omega(e^{it}, \lambda)$ вместо t ряд (29) и вычислим коэфициент при λ^n. Он будет равен:

$$\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\omega(e^{it}, \lambda)\right\}_{\lambda=0} = \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\omega(e^{i(\vartheta+\lambda\varphi_1+\ldots+\lambda^n\varphi_n)}, \lambda)\right\}_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\omega(e^{i(\vartheta+\lambda\varphi_1+\ldots+\lambda^{n-1}\varphi_{n-1})}(1 + i\lambda^n\varphi_n + \ldots), \lambda)\right\}_{\lambda=0}.$$

Отсюда, обозначая

$$\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\omega(e^{i(\vartheta+\ldots+\lambda^{n-1}\varphi_{n-1})}, \lambda)\right\}_{\lambda=0} = A_n,$$

найдем, что искомый коэфициент будет:

$$\omega_\zeta(e^{i\vartheta}, 0) ie^{i\vartheta} \cdot \varphi_n + A_n = i\omega_\zeta(e^{i\vartheta}, 0) e^{i\vartheta}\left(\varphi_n + \frac{A_n e^{-i\vartheta}}{i\omega_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)}\right).$$

Нам нужно выбором φ_n достигнуть того, чтобы полученное выражение для коэфициента не содержало бы отрицательных степеней $e^{i\vartheta}$ в своем ряду Фурье. Но это наверное будет так, если функция, стоящая в скобках, не будет их содержать, так как множитель, стоящий перед ней, по условию, отрицательных степеней $e^{i\vartheta}$ не содержит. Пусть

$$\frac{A_n e^{-i\vartheta}}{i\omega_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n' \cdot e^{-in\vartheta}.$$

Отсюда видно, что в состав функции φ_n, если мы хотим достигнуть отсутствия отрицательных степеней e^{i} в скобках, должен входить ряд $-\sum_{n=1}^{\infty} c_n' e^{-in\vartheta}$, содержащий все отрицательные степени $e^{i\vartheta}$ второго слагаемого скобки. С другой стороны, в силу вещественности функции φ_n, ее часть, содержащая положительные степени $e^{i\vartheta}$, должна непременно приводиться к $-\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n' e^{in\vartheta}$. Произвольным в выражении для φ_n таким образом остается лишь вещественный свободный член:

$$(30)\quad \varphi_n = \gamma_n - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n' e^{in\vartheta} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n' e^{-in\vartheta}.$$

Выбором его можно распорядиться так, чтобы достигнуть заданных условий соответствия точек. В решаемых ниже примерах мы считаем $\gamma_n = 0$.

Нетрудно видеть, что равенство (30) можно еще записать в такой форме:

$$(31)\quad \varphi_n = -R\left\{\frac{A_n e^{-i\vartheta}}{i\omega_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)} - \frac{1}{i}\widetilde{\left[\frac{A_n e^{-i\vartheta}}{i\omega_\zeta(e^{-i\vartheta}, 0)}\right]}\right\}.$$

Особенно простой вид принимает формула (31) в том случае, когда кривая L_λ близка к кругу:

$$z = e^{it} + \lambda P(e^{it}, \lambda).$$

Здесь $\omega_\zeta(e^{it}, 0) = 1$, и поэтому

$$\varphi_n = -R\left\{\frac{A_n e^{-in\vartheta}}{i} - \frac{1}{i}\overbrace{\left[\frac{A_n e^{-in\vartheta}}{i}\right]}\right\}.$$

Пример I. Возьмем кривую, заданную полярным уравнением $r = 1 + \lambda\cos nt$. Ее уравнение в комплексной форме будет:

$$z = e^{it} + \lambda\left(\frac{1}{2}e^{i(n+1)t} + \frac{1}{2}e^{-i(n-1)t}\right).$$

Подставляем сюда вместо t ряд (29) и собираем коэфициенты при одинаковых степенях λ

$$e^{i(\vartheta+\lambda\varphi_1+\dots)} + \frac{\lambda}{2}\left\{e^{i(n+1)(\vartheta+\lambda\varphi_1+\dots)} + e^{-i(n-1)(\vartheta+\lambda\varphi_1+\dots)}\right\} =$$

$$= e^{i\vartheta} + \lambda\left[e^{i\vartheta}i\varphi_1 + \frac{1}{2}\left(e^{i(n+1)\vartheta} + e^{-i(n-1)\vartheta}\right)\right] +$$

$$+ \lambda^2\left[e^{i\vartheta}\left(-\frac{1}{2}\varphi_1^2 + i\varphi_2\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}e^{i(n+1)\vartheta}\cdot i(n+1)\varphi_1 - \frac{1}{2}e^{-i(n-1)\vartheta}i(n-1)\varphi_1\right] + \dots,$$

откуда видно, что для того, чтобы в первой скобке отсутствовали отрицательные степени $e^{i\vartheta}$, φ_1 должно равняться, если отбросить произвольное вещественное слагаемое,

$$\frac{i}{2}e^{-in\vartheta} - \frac{i}{2}e^{in\vartheta} = \sin n\vartheta.$$

Что касается φ_2, то для него получится равенство:

$$\varphi_2 = i\frac{2n-1}{8}(e^{-2in\vartheta} - e^{2in\vartheta}) = \frac{2n-1}{4}\sin 2n\vartheta$$

и т. д.

После подстановки в предыдущий ряд значений φ_1, φ_2 ... будем иметь, если ограничиться второй степенью λ для граничного значения z, следующее нормальное представление:

$$z = e^{i\vartheta} + \lambda e^{i(n+1)\vartheta} + \frac{2n+1}{4}\lambda^2(e^{i(2n+1)\vartheta} - e^{i\vartheta}).$$

Таким образом отображающая функция приближенно будет равна

$$z = \left(1 - \frac{2n+1}{4}\lambda^2\right)\zeta + \lambda\zeta^{n+1} + \frac{2n+1}{4}\lambda^2\zeta^{2n+1}.$$

Пример II. Дадим еще один пример применения этого метода. Рассмотрим эллипс с полуосями $a = 1+\lambda$ и $b = 1-\lambda$. Уравнение его в параметрической форме в декартовых координатах будет:

$$x = (1+\lambda)\cos t, \quad y = (1-\lambda)\cos t,$$

в комплексной же форме

$$z = e^{it} + \lambda e^{-it}.$$

Подставляем в правую часть вместо t ряд (29) и развертываем результат по степеням λ:

$$e^{it} + \lambda e^{-it} = e^{i\vartheta + \lambda(\varphi_1+\dots)} + \lambda e^{-i(\vartheta+\lambda\varphi_1+\dots)} =$$

$$= e^{i\vartheta}\left[1 + i(\lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \lambda^3\varphi_3 + \dots) +\right.$$

$$\left. + \frac{i^2}{2}(\lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \dots)^2 + \frac{i^3}{6}(\lambda\varphi_1 + \dots)^3 + \dots\right] +$$

$$+ \lambda e^{-i\vartheta}\left[1 - i(\lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \dots) + \frac{i^2}{2}(\lambda\varphi_1 + \dots)^2 + \dots\right] =$$

$$e^{i\vartheta} + (e^{i\vartheta}i\varphi_1 + e^{-i\vartheta})\lambda + \left[e^{i\vartheta}(i\varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_1^2) - e^{-i\vartheta}i\varphi_1\right]\lambda^2 +$$

$$+ \left[e^{i\vartheta}(i\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2 - \frac{i}{6}\varphi_1^3) - e^{-i\vartheta}\left(i\varphi_2 + \frac{1}{2}\varphi_1^2\right)\right]\lambda^3 + \dots$$

Обозначим последовательно коэфициенты при λ, λ^2, λ^3, ... через $A, B, C, \dots$ и займемся первым из них. Будем, как раньше, отбрасывать неопределенные постоянные в $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

$$A = ie^{i\vartheta}(\varphi_1 - ie^{-2i\vartheta}),$$

откуда видно, что должно быть

$$\varphi_1 = ie^{-2i\vartheta} - ie^{2i\vartheta} = 2\sin 2\vartheta$$

и

$$A = ie^{i\vartheta}(-ie^{2i\vartheta}) = e^{3i\vartheta}.$$

Перейдем к вычислению B.

$$\varphi_1^2 = -e^{-4i\theta} + 2 - e^{4i\theta},$$

$$B = ie^{i\theta}\left[\varphi_2 + \frac{i}{2}(-e^{-4i\theta} + 2 - e^{4i\theta}) - e^{-2i\theta}(ie^{-2i\theta} - ie^{2i\theta})\right],$$

$$\varphi_2 = \frac{3i}{2}e^{-4i\theta} - \frac{3i}{2}e^{4i\theta} = 3\sin 4\theta,$$

$$B = (2i - 2ie^{4i\theta})ie^{i\theta} = 2e^{5i\theta} - 2e^{i\theta}.$$

Для коэфициента C имеем:

$$\varphi_1\varphi_2 = -\frac{3}{2}(e^{-6i\theta} - e^{-2i\theta} - e^{2i\theta} + e^{6i\theta})$$

$$\varphi_1^3 = -i(e^{-6i\theta} - 3e^{-2i\theta} + 3e^{2i\theta} - e^{6i\theta})$$

$$C = ie^{i\theta}\left[\varphi_3 - \frac{10}{3}ie^{-6i\theta} + 2ie^{-2i\theta} + 3ie^{2i\theta} - \frac{10}{6}ie^{6i\theta}\right]$$

$$\varphi_3 = \frac{10}{3}ie^{-6i\theta} - 2ie^{-2i\theta} + 2ie^{2i\theta} - \frac{10}{3}ie^{6i\theta}$$

$$C = ie^{i\theta}\left(5ie^{2i\theta} - 5ie^{6i\theta}\right) = 5e^{7i\theta} - 5e^{3i\theta}.$$

Поэтому, если ограничиться членами до третьей степени параметра λ, на контуре будет

$$z(\theta, \lambda) = e^{i\theta} + \lambda e^{3i\theta} + \lambda^2(2e^{5i\theta} - 2e^{i\theta}) + \lambda^3\left(5e^{7i\theta} - 5e^{3i\theta}\right)$$

и для отображающей функции, следовательно, получаем:

$$z = \zeta + \lambda\zeta^3 + \lambda^2(2\zeta^5 - 2\zeta) + \lambda^3\left(5\zeta^7 - 5\zeta^3\right) =$$

$$= (1 - 2\lambda^2)\zeta + (\lambda - 5\lambda^3)\zeta^3 + 2\lambda^2\zeta^5 - 5\lambda^3\zeta^7.$$

Замечание. В изложенном методе для составления функции, дающей конформное преобразование круга на область, нужно первоначально подыскать такое семейство кривых, зависящее от параметра λ, чтобы для кривой, получающейся из этого семейства при $\lambda = 0$, отображающая функция была известна и чтобы при некотором значении параметра $\lambda = \lambda_1$ получалась заданная кривая. Такое семейство обычно можно подобрать различными способами. Отметим один из них, оказывающийся полезным при решении частных примеров. Мы рассмотрим

случай, когда контур области может быть задан полярным уравнением:

$$\rho = f(t). \qquad [0 \leq t \leq 2\pi]$$

Пусть a есть радиус некоторого круга с центром в полюсе, целиком помещающегося внутри L, тогда за искомое семейство можно взять следующее:

$$\rho = a + \lambda[f(t) - a], \qquad [0 \leq t \leq 2\pi]$$

Действительно, при $\lambda = 0$ это семейство дает окружность, а при $\lambda = 1$ — данную кривую.

n° 8. Доказательство сходимости процесса последовательных приближений. Мы докажем, что построенные нами ряды (15, 22, 29) сходятся во всяком случае для значений параметра λ достаточно малых по величине, абсолютно и равномерно по отношению переменной θ. Займемся сначала случаем задания контура области в неявном виде.

Ввиду того что ряды (15) являются частным случаем рядов (22) и, наконец, так как ряды (22) получаются из ряда (22′) путем отделения вещественной и мнимой частей, нам достаточно установить сходимость только ряда (22′). Наконец, мы ограничиваемся ради простоты тем случаем, когда неопределенные слагаемые, входящие в состав функций Λ_n, о которых говорилось в n° 6, отбрасываются.

Введем прежде всего одно обозначение, которым нам придется пользоваться при доказательствах. Будем называть нормой функции $\varphi(t)$, разлагающейся в тригонометрический ряд:

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' (a_n + ib_n)e^{int},$$

сумму модулей ее коэфициентов Фурье:

$$\|\varphi(t)\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n + ib_n|.$$

Отметим некоторые очевидные свойства нормы:

1) $\|\varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \ldots\| \leq \|\varphi_1(t)\| + \|\varphi_2(t)\| + \ldots$,
2) $\|\varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)\| \leq \|\varphi_1(t)\| \cdot \|\varphi_2(t)\|$,
3) $\|\widetilde{\varphi(t)}\| \leq \|\varphi(t)\|$.

Приведем еще следующую лемму, которая окажется также полезной для нас:

Лемма. *Если у двух степенных рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\xi^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\xi^n$$

коэфициенты удовлетворяют неравенствам:

$$|a_n| \leq \frac{A}{(n+1)^\alpha}, \quad |b_n| \leq \frac{B}{(n+1)^\alpha}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots \alpha > 1),$$

то коэфициенты c_n степенного ряда, представляющего их произведение, удовлетворяют неравенствам:

$$|c_n| \leq \frac{AB}{(n+1)^\alpha} \cdot M_\alpha,$$

где M_α — постоянная, зависящая только от α.

В самом деле:

$$|c_n| = |a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots a_{n-1} b_1| \leq \frac{A}{2^\alpha}\frac{B}{n^\alpha} + \frac{A}{3^\alpha}\frac{B}{(n-1)^\alpha} +$$

$$+ \ldots + \frac{A}{n^\alpha} \cdot \frac{B}{2^\alpha} \leq \frac{2AB}{(n+1)^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha}\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots\right) \leq$$

$$\leq \frac{2^{\alpha+1} AB}{(n+1)^\alpha} \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{2^{\alpha+1} AB}{(n+1)^\alpha (\alpha - 1)} = \frac{AB}{(n+1)^\alpha} M_\alpha,$$

где $M_\alpha = \dfrac{2^{\alpha+1}}{\alpha - 1}$. Это и требовалось доказать.

В частности, при $\alpha = 2$ найдем $M_2 = 8$. Не трудно проверить при более точной оценке, что эта постоянная может быть заменена на меньшую $M_2 = 1{,}55$.

Разложим функцию $\Phi(z, \bar{z}, \lambda)$ в ряд по степеням $[z - z_0(\vartheta)]$, $[\bar{z} - \bar{z}_0(\vartheta)]$ и λ:

$$\Phi(z, \bar{z}, \lambda) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} A_{ik}^{(j)} (z - z_0)^i (\bar{z} - z_0)^k \lambda^j, \tag{31}$$

где $A_{ik}^{(j)}$ суть функции параметра ϑ, определенные равенствами:

$$A_{ik}^{(j)} = \left\{ \frac{\partial^{i+j+k}\Phi}{\partial^i z\, \partial^k \bar{z}\, \partial^j \lambda} \right\}_{z = z_0,\ \bar{z} = \bar{z}_0,\ \lambda = 0}.$$

Мы предположили выше, что $\Phi(z, \bar{z}, \lambda)$ является аналитической функцией своих аргументов вблизи точек окружности $|z| = 1$ и значения $\lambda = 0$. Далее, мы имели случай отметить, что функция, совершающая конформное преобразование круга на область B_0, будет голоморфной в области, содержащей этот круг внутри себя, ввиду аналитичности контура L_λ; поэтому каждая из функций z_0 и $\bar{z}_0$ будет аналитической функцией параметра ϑ. Следовательно, все коэфициенты $A_{ik}^{(j)}$ будут периодическими аналитическими функциями от ϑ и наверное будут иметь конечную норму, ибо ряд Фурье для них будет иметь, вследствие их аналитического характера, сходимость типа геометрической прогрессии.

Положим:

$$B_{ik}^{(j)} = \| A_{ik}^{(j)} \| (j+1)^\alpha, \tag{32}$$

где α — любое положительное число больше единицы, и составим функцию:

$$\Omega(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} B_{ik}^{(j)} \lambda^j \xi^i \eta^k. \qquad [i + j + k \geq 2] \tag{33}$$

Благодаря тому, что $\Phi(z, \bar{z}, \lambda)$ — аналитическая функция, такою же будет и функция Ω, так что ряд, стоящий в правой части последнего равенства, сходится для достаточно малых по модулю ξ, η, λ:

$$|\xi| \leq r_0, \quad |\eta| \leq r_0, \quad |\lambda| \leq \lambda_0. \tag{34}$$

Заметим еще, что функции $\dfrac{e^{-i\vartheta}}{z_0' \Phi_z'(z_0, \bar{z}_0, 0)}$ и $z_0' e^{i\vartheta}$ представляют аналитические периодические функции ϑ. Поэтому нормы этих функций конечны; [1] обозначим их через

$$\mu = \left\| \frac{e^{-i\vartheta}}{z_0' \Phi_z'(z_0, \bar{z}_0, 0)} \right\|, \quad \mu_1 = \| z_0' e^{i\vartheta} \|. \tag{35}$$

Переходим теперь к самому доказательству сходимости ряда (22′), для чего оценим функции $z_n(\vartheta)$. Предположим, что для $l < n$ верна оценка

$$\| z_l(\vartheta) \| \leq \frac{CR^{l-1}}{(l+1)^\alpha}, \tag{36}$$

и докажем, что эта оценка верна и для $l = n \geq 2$. О том, как должны быть выбраны постоянные величины C и R, мы скажем ниже.

---

[1] Относительно функции $\dfrac{1}{z_0'}$ это очевидно в силу $|z_0'| \neq 0$. Из равенства вида $F(x, y, \lambda) = \Phi(z, \bar{z}, \lambda)$ следует: $F_x = \Phi_z + \Phi_{\bar{z}}$, $F_y = i\Phi_z - i\Phi_{\bar{z}}$, откуда $\Phi_z = \frac{1}{2}(F_x - iF_y)$ и $|\Phi_z|^2 = \frac{1}{4}(F_x^2 + F_y^2)$, а поэтому из предположенного раньше неравенства $F_x^2(x_0, y_0, 0) + F_y^2(x_0, y_0, 0) > 0$ следует справедливость утверждения.

Оценим прежде всего $\|\tau_n\|$. Пользуясь (31) и (36), имеем:

$$\|\tau_n\| = \left\| \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} \Phi(z_0 + \ldots + \lambda^{n-1} z_{n-1}, \bar{z}_0 + \ldots + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda^{n-1} \bar{z}_{n-1}, \lambda) \right\}_{\lambda=0} \right\| \leqslant \sum_{i,\, j,\, k=0}^{\infty} \|A_{ik}^{(j)}\| \left\| \left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} \frac{1}{n!} (\lambda z_1 + \ldots + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda^{n-1} z_{n-1})^i (\lambda \bar{z}_1 + \ldots + \lambda^{n-1} \bar{z}_{n-1})^k \lambda^j \right\}_{\lambda=0} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{i,\, j,\, k=0 \\ i+j+k \geqslant 2}}^{j \leqslant n} \|A_{ik}^{(j)}\| \left\{ \frac{1}{(n-j)!} \frac{d^{n-j}}{d\lambda^{n-j}} \left(\frac{C}{2^\alpha} \lambda + \frac{CR}{3^\alpha} \lambda^2 + \ldots + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{CR^{n-2}}{n^\alpha} \lambda^{n-1} \right)^{i+k} \right\}_{\lambda=0}.$$ [1]

Последняя стоящая под знаком суммы скобка представляет коэффициент при λ^{n-j} в выражении:

$$\left(\frac{C}{2^\alpha} \lambda + \frac{CR}{3^\alpha} \lambda^2 + \ldots + \frac{CR^{n-2}}{n^\alpha} \lambda^{n-1} \right)^{i+k} =$$

$$= \left(\frac{C}{R} \right)^{i+k} \left(\frac{R\lambda}{2^\alpha} + \frac{(R\lambda)^2}{3^\alpha} + \ldots + \frac{(R\lambda)^{n-1}}{n^\alpha} \right)^{i+k}.$$

На основании леммы, если применить ее к случаю $i+k$ сомножителей, ясно, что этот коэфициент будет не больше, нежели:

$$\left(\frac{C}{R} \right)^{i+k} \frac{R^{n-j}}{(n-j+1)^\alpha} M_\alpha^{i+k}.$$

[1] При переходе к последней части неравенства условие $i+j+k \geqslant 0$ при знаке суммы заменено на $i+j+k \geqslant 2$ по той причине, что члены со степенями λ до $n-1$, получающиеся при $i+j+k < n$ при дифференцировании n раз по λ наверное пропадут, а n по условию не меньше 2.

Пользуясь этим, а также (32), можем продолжить оценку интересующего нас выражения $\|\tau_n\|$:

$$\|\tau_n\| \leqslant \sum_{\substack{i,\, j,\, k=0 \\ i+j+k \geqslant 2}}^{j \leqslant n} \frac{1}{(j+1)^\alpha} B_{ik}^{(j)} R^{n-i-j-k} (CM_\alpha)^{i+k} \frac{1}{(n-j+1)^\alpha} <$$

$$< \frac{R^n}{(n+1)^\alpha} \sum_{\substack{i,\, j,\, k=0 \\ i+j+k \geqslant 2}}^{\infty} B_{ik}^{(j)} \left(\frac{1}{R} \right)^j \left(\frac{CM_\beta}{R} \right)^i \left(\frac{CM_\alpha}{R} \right)^k =$$

$$= \frac{R^n}{(n+1)^\alpha} \Omega \left(\frac{CM_\beta}{R}, \frac{CM_\alpha}{R}, \frac{1}{R} \right)^2.$$

Далее, из равенства

$$\Lambda_n = -\frac{\tau_n e^{-ib}}{z_0' \Psi} = -\frac{\tau_n e^{-ib}}{z_0' \Phi_z(z_0, \bar{z}_0, 0)}$$

вытекает

$$\|\Lambda_n\| \leqslant \nu \|\tau_n\| \leqslant \nu \frac{R^n}{(n+1)^\alpha} \Omega \left(\frac{CM_\alpha}{R}, \frac{CM_\beta}{R}, \frac{1}{R} \right),$$

и, следовательно [см. формулу (26′)]:

$$\|z_n\| \leqslant \nu_1 \|\Lambda_n\| \leqslant \nu\nu_1 \frac{R^n}{(n+1)^\alpha} \Omega \left(\frac{CM_\alpha}{R}, \frac{CM_\beta}{R}, \frac{1}{R} \right). \tag{37}$$

Займемся теперь выбором величин C и R. Величину C мы возьмем настолько большой, чтобы было выполнено неравенство:

$$\|z_1\| \leqslant \frac{C}{2^\alpha}, \tag{38}$$

т. е. чтобы неравенство (36) выполнялось при $l=1$.

Чтобы это неравенство выполнялось при всяком l, достаточно выбрать, как это ясно из (37), R настолько большим, чтобы было:

$$\frac{CM_\beta}{R} < r_0, \qquad \frac{1}{R} < \lambda_0; \tag{39}$$

$$\nu\nu_1 \frac{R^n}{(n+1)^\alpha} \Omega \left(\frac{CM_\beta}{R}, \frac{CM_\alpha}{R}, \frac{1}{R} \right) \leqslant \frac{CR^{n-1}}{(n+1)^\alpha}.$$

[1] Чтобы получить последнюю часть неравенства, мы заменили величину $\frac{1}{(j+1)(n-j+1)}$ большей: $\frac{1}{n+1}$.

Для выполнения последнего из этих неравенств требуется, чтобы удовлетворялось соотношение:

$$\Omega\left(\frac{CM_x}{R},\ \frac{CM_z}{R},\ \frac{1}{R}\right)\leqslant\frac{C}{|\mu_1|}\frac{1}{R}, \tag{40}$$

которому всегда можно удовлетворить, выбрав R достаточно большим, так как при $\frac{1}{R}=0$ функция Ω, ряд (33) для которой содержит члены не ниже второго измерения, имеет двойной корень, справа же стоит $\frac{1}{R}$ в первой степени.

Таким образом, неравенство (36) установлено для всяких l при выбранных нами C и R и тем самым установлена сходимость ряда (22′) при

$$|\lambda|\leqslant\frac{1}{R}. \tag{41}$$

Пример. В п° 5 мы нашли функцию, конформно преобразующую эллипс $z\bar{z}-\frac{\lambda}{2}(z^2+\bar{z}^2)=1$ на круг. Оценим в этой задаче область сходимости нашего алгорифма:

$$\Phi(z,\ \bar{z},\ \lambda)=z\bar{z}-\frac{\lambda}{2}(z^2+\bar{z}^2)-1=(z-e^{it})(\bar{z}-e^{-it})+$$

$$+e^{it}(\bar{z}-e^{-it})+e^{-it}(z-e^{it})-\frac{\lambda}{2}(z-e^{it})^2-\frac{\lambda}{2}(\bar{z}-e^{-it})^2-$$

$$-\lambda e^{it}(z-e^{it})-\lambda e^{-it}(\bar{z}-e^{-it})-\frac{\lambda}{2}(e^{2it}+e^{-2it}).$$

Отсюда находим, если взять $\alpha=2$:

$$\Omega(\xi,\ \eta,\ \lambda)=\xi\eta+2\lambda(\xi^2+\eta^2+2\xi+2\eta);$$

так как в данном случае, как мы раньше видели, $z_1=\frac{i}{2}e^{3\theta}$, то можно взять $C=2$.

Далее $z_0=e^{i\theta}$; $z_0'=1$, поэтому $\mu_1=1$; с другой стороны, $\Phi_z(z_0,\ \bar{z}_0,\ 0)=\bar{z}_0$, и стало быть

$$\mu=\left\|\frac{1}{z_0'\Phi_z(z_0,\ \bar{z}_0,\ 0)}\right\|=1.$$

Раньше мы упоминали о том, что $M_2=1{,}55$, следовательно, неравенство (40) даст:

$$\frac{(1{,}55\cdot 2)^2}{R^2}+\frac{2}{R}\left[\frac{(1{,}55\cdot 2)^2}{R^2}+\frac{(1{,}55\cdot 2)^2}{R^2}+2\frac{1{,}55\cdot 2}{R}+2\frac{1{,}55\cdot 2}{R}\right]\leqslant\frac{2}{R},$$

что равносильно следующему:

$$\frac{19{,}2}{R}+\frac{17{,}1}{R^2}\leqslant 1,$$

для чего достаточно положить $R\geqslant 18{,}1$. Таким образом, последовательные приближения будут наверное сходиться при

$$|\lambda|\leqslant 0{,}055<\frac{1}{R}.$$

На самом деле, граница сходимости будет, конечно, гораздо шире.

Замечание. Отметим еще следующее. Пусть мы каким-либо иным путем нашли параметрическое представление контура L_λ в форме ряда, расположенного по степеням λ:

$$z(t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n z_n^*(t),$$

где $z_n^*(t)$ — функции, разложение которых в ряд Фурье содержит степени e^{it}, большие нулевой. Мы видели выше, что в таком случае $z_n(t)$ определяются единственным образом, так как произвол происходит лишь от постоянных, входящих в Λ_n, которые здесь все принимаются равными нулю, и поэтому $z_n(t)$ должны совпадать с $z_n^*(t)$. В частности тот способ бесконечных систем, который мы развивали в п°п° 1—4, должен давать те же результаты; поэтому, установив сходимость рядов (22), мы одновременно доказали и сходимость метода бесконечных систем, в котором мы находили ряды по степеням λ для коэфициентов разложения преобразующей функции в степенной ряд.

Перейдем к доказательству сходимости при достаточно малых λ разложения (29) для задачи в параметрической форме.

Разлагая $\omega(e^{it},\lambda)$ в ряд по степеням λ и $t-\vartheta$, найдем:

$$\omega(e^{it},\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}A_{i,j}(\vartheta)\lambda^j(t-\vartheta)^i. \tag{42}$$

Полагая далее

$$B_{ij}=\|A_{ij}(\vartheta)\|(j+i)^\alpha,$$

составим функцию:

$$\Omega^*(\xi,\lambda)=\sum_{\substack{i,\ j=0\\ i+j\geqslant 2}}^{\infty}B_{ij}\xi^i\lambda^j;$$

ряд в правой части будет сходиться при ξ, λ, достаточно малых по модулю.

Предположим теперь, что при $l<n$ установлено неравенство:

$$\|\Phi_l(\vartheta)\|\leqslant\frac{CR^{l-1}}{(l+1)^\alpha}. \tag{43}$$

Тогда, проводя преобразования, аналогичные тем, которые мы делали при оценке τ_n, найдем, что

$$\| A_n(\vartheta) \| \leq \frac{R_1}{(n+1)^2}\, \Omega^*\left(\frac{CM_2}{R}, \frac{1}{R}\right).$$

Вводя еще обозначение

$$\left\| \frac{e^{-i\vartheta}}{\omega_z(e^{i\vartheta}, 0)} \right\| = \gamma,$$

получим, согласно равенству (31), если вновь отбросить постоянную γ_1:

$$\| \varphi_n \| \leq 2\gamma \frac{R^n}{(n+1)^2}\, \Omega^*\left(\frac{CM_2}{R}, \frac{1}{R}\right). \tag{44}$$

Выбирая C так, чтобы было выполнено неравенство:

$$C \geq 2^n \| \varphi_1(\vartheta) \|,$$

а затем R настолько большим, чтобы было:

$$\Omega^*\left(\frac{CM_2}{R}, \frac{1}{R}\right) \leq \frac{C}{2\gamma R}, \tag{45}$$

причем такой выбор, очевидно, всегда возможен, ибо Ω^* имеет при $\frac{1}{R} = 0$ корень второго порядка, установим, что (43) имеет место и при $l = n$.

Неравенство (43) показывает, что ряд (29) сходится наверное для таких значений λ, при которых

$$|\lambda| < \frac{1}{R}.$$

Во всех случаях нам удалось установить сходимость лишь для малых значений λ, причем граница, даваемая неравенствами (40) и (45), которую мы нашли, вообще говоря, отстоит далеко от действительной области сходимости разложений по степеням λ. Действительная область сходимости будет значительно шире указанной нами. Попытки найти точную область сходимости полученных разложений до сих пор не привели к результатам, и этот вопрос остается открытым.

Может случиться, что входящее в вычисления значение параметра λ лежит вне полученных нами границ. Однако развитый здесь метод часто приводит к результату и в этом случае. Тогда после нахождения отображающей функции нужно проверить точность результата. Для этой цели требуется выяснить прежде всего, насколько кривая, которая получается в результате отображения единичной окружности с помощью найденной функции, отстоит от кривой, ограничивающей заданную область. Это можно сделать либо аналитически, пользуясь уравнениями этих кривых, либо графически, построив обе кривые и сравнив их

друг с другом. По максимальному расстоянию между обеими кривыми судят о точности приближенного выражения [1].

В параграфе 5, где мы рассматривали метод разложения в ряд по степеням малого параметра функцию, дающую конформное преобразование области на круг, мы не проводили исследования сходимости построенного там ряда по степеням параметра λ. Теперь мы имеем возможность без затруднений доказать это предложение.

Действительно, тот тип контуров, который мы рассматривали в исследованиях названного параграфа, является частным случаем контуров, для которых мы проводим исследование сходимости процесса последовательных приближений в изложенном только что методе для случая параметрического задания контура, когда последний будет близок к окружности.

Если λ мало по модулю, то контур будет простой аналитической кривой без угловых точек. Функция, совершающая преобразование круга на область внутри контура, будет голоморфной по ζ как внутри круга, так и на его границе. Мы можем обратить эту функцию однозначно в силу однолистности области. По известным теоремам о неявных функциях обратная функция будет регулярной относительно z во всей области B, включая и контур, и регулярной относительно λ при малых $|\lambda|$. Ее, следовательно, можем разложить в ряд по степеням λ, коэфициенты которого будут голоморфными функциями от z в области B.

Нам осталось, таким образом, доказать, что построенное нами разложение совпадает с действительным разложением. Установить это не представляет никакого труда. В самом деле, будем предполагать, что при преобразовании начало координат переходит в начало, и направление вещественной оси переходит опять в направление вещественной оси. Возьмем действительное разложение преобразующей функции в ряд по степеням λ. Составим квадрат модуля ζ на границе области B. Он должен быть там равен тождественно единице. Приравнивая нулю коэфициенты при λ, λ^2, . . ., получим систему уравнений, которым должны удовлетворять коэфициенты разложения. Эту систему мы составили раньше в п° 2 § 5, и так как построенная система, как мы видели, имеет единственное решение, то построенное нами разложение будет совпадать с действительным разложением. Этим и доказывается его сходимость при малых значениях параметра λ.

п° 9. Замечания об отображении круга на внешность кривой. Примеры. Та же идея может быть, разумеется, использована для построения функции, конформно преобразующей круг единичного радиуса на внешность некоторой кривой.

Пусть граничная кривая области обладает теми же свойствами, что и раньше, и задана уравнением вида (9), которое мы рассматривали в предыдущих п°п°.

---

[1] Более подробно об этом смотри в мемуаре Бибербаха, на который мы неоднократно ссылались в главе о методе Бибербаха конформного преобразования.

Функция, совершающая требуемое преобразование круга на внешность кривой, если потребовать, чтобы центр круга переходил в бесконечно далекую точку, имеет здесь следующий вид:

$$(46)\quad z = x + iy = a_1\zeta^{-1} + a_2 + a_3\zeta + a_4\zeta^2 + \ldots, \qquad a_n = a_n + ib_n.$$

Мы можем, как и выше, считать $b_1 = 0$. При $|\zeta| = 1$ аффикс соответствующего значения z должен быть расположен на граничной кривой, и z поэтому удовлетворит уравнению контура (9′). Если в выражении

$$z = x + iy = a_1 e^{-i\vartheta} + a_2 + a_3 e^{i\vartheta} + \ldots$$

отделить вещественную и мнимую части, то тригонометрические ряды для x и y должны будут удовлетворить уравнению контура (9). Производя подстановку ряда для z в (9′) или рядов для x и y в уравнение контура (9) и сравнивая коэфициенты при одинаковых степенях $e^{i\vartheta}$ или косинусах и синусах углов одинаковой кратности ϑ, получим систему уравнений для определения $a_1, a_2, a_3, \ldots$, которая может быть решена прежним способом. Выкладки и исследование сходимости здесь мало отличаются от уже приведенных в предыдущих n°n°. Поэтому мы ограничимся здесь лишь некоторыми примерами.

Пример 1. Найдем функцию, конформно преобразующую внутренность единичного круга на внешность эллипса:

$$x^2 + y^2 - \lambda(x^2 - y^2) = 1,$$

или в комплексной форме:

$$z\bar{z} - \frac{\lambda}{2}(z^2 - \bar{z}^2) = 1.$$

Так как, в силу симметрии, здесь все

$$b_k = 0$$

и

$$a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0,$$

$$z\bar{z} = a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \ldots + (a_1a_3 + a_3a_5 + \ldots)e^{2i\vartheta} + (a_1a_3 + a_3a_5 + \ldots)e^{-2i\vartheta} + (a_1a_5 + \ldots)e^{4i\vartheta} + (a_1a_5 + \ldots)e^{-4i\vartheta} + \ldots$$

$$z^2 = a_1^2 e^{-2i\vartheta} + 2a_1a_3 + 2\left(a_1a_5 + \frac{1}{2}a_3^2\right)e^{2i\vartheta} + \ldots$$

Уравнения для определения a, как легко видно, приводятся к следующему виду:

$$a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \ldots = 1 + \lambda 2a_1a_3,$$

$$a_1a_3 + a_3a_5 + \ldots = \lambda\left(a_1a_5 + \frac{1}{2}a_3^2 + \frac{1}{2}a_1^2\right),$$

$$a_1a_5 + \ldots = \lambda(a_3a_5 + \ldots).$$

Разделив все уравнения, начиная со второго, на a_1^2, и обозначив для простоты

$$\frac{a_3}{a_1} = \rho_3, \qquad \frac{a_5}{a_1} = \rho_5, \ldots,$$

будем иметь:

$$\rho_3 = -\rho_3\rho_5 - \ldots + \lambda\left(\frac{1}{2} + \rho_5 + \frac{1}{2}\rho_3^2\right),$$

$$\rho_5 = \ldots + \lambda(\rho_3\rho_5 + \ldots).$$

Примем за исходную систему значений

$$\rho_3 = \rho_5 = \ldots = 0.$$

Таблица последовательных приближений для них имеет форму:

Величины	Первое приближение	Второе приближение	Третье приближение	Четвертое приближение	Пятое приближение
ρ_3	0	$\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{8}\lambda^3$	$\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{8}\lambda^3 + \frac{1}{16}\lambda^3$	$\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{8}\lambda^3 + \frac{1}{16}\lambda^5 + \frac{5}{128}\lambda^7$
ρ_5	0	0	0	0	0

Для определения a_1 из первого уравнения системы путем деления его на a_1^2 получим равенство:

$$1 + \rho_3^2 + \rho_5^2 + \ldots = \frac{1}{a_1^2} + \lambda 2\rho_3,$$

откуда

$$a_1 = (1 - 2\lambda\rho_3 + \rho_3^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{3}{8}\lambda^2 + \frac{35}{128}\lambda^4 + \frac{231}{1024}\lambda^6 + \frac{6435}{32768}\lambda^8.$$

Таким образом, с точностью до λ^8 преобразующая функция будет равна:

$$z = \left(1 + \frac{3}{8}\lambda^2 + \frac{35}{128}\lambda^4 + \frac{231}{1024}\lambda^6 + \frac{6435}{32768}\lambda^8\right)\left[\zeta^{-1} + \left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{8}\lambda^3 + \frac{1}{16}\lambda^5 + \frac{5}{128}\lambda^7\right)\zeta\right].$$

функция, совершающая требуемое преобразование, в нашем случае легко может быть указана. Это есть следующая элементарная функция: [1]

$$z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1-\lambda^2}}\left[(\sqrt{1+\lambda}-\sqrt{1-\lambda})\zeta+\frac{\sqrt{1+\lambda}+\sqrt{1-\lambda}}{\zeta}\right].$$

Отсюда видно, что точные значения коэфициентов a_1 и ρ_3 суть:

$$a_1=\frac{1}{2}\left[(1-\lambda)^{-\frac{1}{2}}+(1+\lambda)^{-\frac{1}{2}}\right]=$$
$$=1+\frac{3}{8}\lambda^2+\frac{35}{128}\lambda^4+\frac{231}{1024}\lambda^6+\frac{6435}{32768}\lambda^8+\ldots,$$
$$\rho_3=\frac{a_3}{a_1}=\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}=\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{8}\lambda^3+\frac{1}{16}\lambda^5+\frac{5}{128}\lambda^7+\ldots$$

Их разложения с точностью до λ^8 совпадают с найденными нами.

Пример 11. Будем отображать круг на внешность квадрата. Пусть это будет вновь квадрат со сторонами, параллельными осям координат, длины 2. Уравнение сторон квадрата есть

$$(x^2-1)(1-y^2)=0,$$
$$x^2+y^2-x^2y^2=1,$$

или в комплексной форме

$$z\bar{z}+\left(\frac{z^2-\bar{z}^2}{4}\right)^2=1.$$

Вводим вспомогательное семейство кривых, зависящее от параметра λ:

$$z\bar{z}+\lambda\left(\frac{z^2-\bar{z}^2}{4}\right)^2=1,$$

в которое наш квадрат входит при $\lambda=1$.

Ввиду наличия у кривых четырех осей симметрии функцию z ищем в форме:

$$z=a_1\zeta^{-i\beta}+a_5\zeta^{3i\beta}+a_9\zeta^{7i\beta}+\ldots$$

[1] Она может быть просто получена путем надлежащего подбора параметров α и $r<1$ из известной функции $z=\frac{\alpha}{2}\left(r\zeta+\frac{1}{r\zeta}\right)$, дающей преобразование единичного круга плоскости ζ на внешность эллипса с полуосями $\frac{\alpha}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$ и $\frac{\alpha}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$.

Так как

$$\frac{z^2-\bar{z}^2}{4}=\frac{1}{2}\left\{-\left(\frac{1}{2}a_9^2+\ldots\right)e^{-16i\beta}-(a_5a_9+\right.$$
$$+\ldots)e^{-10i\beta}-\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)e^{-6i\beta}-$$
$$-\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a_1^2\right)e^{-2i\beta}+\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a_1^2\right)e^{2i\beta}+$$
$$\left.+\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)e^{6i\beta}+(a_5a_9+\ldots)e^{10i\beta}+\left(\frac{1}{2}a_9^2+\ldots\right)e^{14i\beta}+\ldots\right\},$$

после подстановки в уравнение контура и сравнения коэфициентов будем иметь систему уравнений:

$$a_1^2+a_5^2+a_9^2+\ldots=1+\frac{\lambda}{2}\left[\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a^2\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)^2+a_5^2a_9^2+\frac{1}{4}a_9^4+\ldots\right],$$
$$a_1a_5+a_5a_9+\ldots=$$
$$=-\frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{2}\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a_1^2\right)^2-\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a_1^2\right)-\right.$$
$$\left.-a_5a_9\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)-\frac{1}{2}a_9^2a_5a_9-\ldots\right],$$
$$a_1a_9+\ldots=$$
$$=-\frac{\lambda}{2}\left[\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a_1^2\right)\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)-a_5a_9\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a_1^2\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}a_9^2\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)-\ldots\right].$$

Приняв за исходные значения $a_1 = 1$, $a_5 = a_9 = \ldots = 0$, решаем ее обычным методом последовательных приближений. Соответствующие шаги вычислений приведены в таблице:

Величины	Начальные значения	Первое приближение	Второе приближение	Третье приближение
a_1	1	$1+\frac{1}{16}\lambda$	$1+\frac{\lambda}{16}+\frac{7}{256}\lambda^2$	$1+\frac{1}{16}\lambda+\frac{7}{256}\lambda^2+\frac{9}{1024}\lambda^3$
a_5	0	$-\frac{1}{16}\lambda$	$-\frac{1}{16}\lambda-\frac{7}{256}\lambda^2$	$-\frac{1}{16}\lambda-\frac{7}{256}\lambda^2-\frac{19}{2048}\lambda^3$
a_9	0	0	0	$\frac{\lambda^3}{2048}$

Отображающая функция с точностью до λ^3, таким образом, будет:

$$z=\left(1+\frac{1}{16}\lambda+\frac{7}{256}\lambda^2+\frac{9}{1024}\lambda^3\right)\frac{1}{\zeta}-\left(\frac{1}{16}\lambda+\frac{7}{256}\lambda^2+\frac{19}{2048}\lambda^3\right)\zeta^3+\frac{\lambda^3}{2048}\zeta^7.$$

Полагая в этом выражении $\lambda = 1$, получим:

$$z=1\frac{101}{1024}\frac{1}{\zeta}-\frac{203}{2048}\zeta^3+\frac{1}{2048}\zeta^7.$$

Как и в п° п° 5—6, мы можем искать разложение по степеням λ не отдельных коэфициентов рядов Фурье для $x(\vartheta)$ и $y(\vartheta)$, а непосредственно разложение в ряд по степеням λ самой комплексной координаты $z = x + iy$ точек контура.

Допустим, что контур L_λ области задан уравнением (19), или, что то же, (19′), и нам известна функция, совершающая преобразование единичного круга на внешность L_0. Положим:

$$z(\vartheta,\lambda)=z_0(\vartheta)+\lambda z_1(\vartheta)+\ldots+\lambda^n z_n(\vartheta)+\ldots \tag{47}$$

Разложение в ряд по степеням $e^{i\vartheta}$ каждого из коэфициентов должно содержать положительные степени этой величины и только первую отрицательную степень; $z_0(\vartheta)$, отвечающую случаю $\lambda = 0$, мы предполагаем известной.

Подставим ряд (47) в уравнение контура (19′) и приравняем нулю коэфициенты при степенях λ.

Для коэфициента при первой степени λ получим:

$$\left\{\frac{d}{d\lambda}\Phi(z_0+\lambda z_1,\ \bar{z}_0+\lambda\bar{z}_1,\ \lambda)\right\}_{\lambda=0}=\Phi_z(z_0,\bar{z}_0,0)+$$

$$+\Phi_{\bar{z}}(z_0,\bar{z}_0,0)+\Phi_\lambda(z_0,\bar{z}_0,0)=0,$$

или в обозначениях (23):

$$\Psi z_1+\Theta\bar{z}_1=-\tau_1.$$

Если же продиференцировать по ϑ уравнение кривой L_0

$$\Phi(z_0,\bar{z}_0,0)=0,$$

найдем:

$$\Psi z_0' e^{i\vartheta}-\Theta\bar{z}_0' e^{-i\vartheta}=0.$$

Отсюда и из предыдущего равенства следует:

$$\frac{z_1}{z_0' e^{i\vartheta}}+\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_0' e^{-i\vartheta}}=-\frac{\tau_1}{\Psi z_0' e^{i\vartheta}}=-\frac{\tau_1}{\Theta\bar{z}_0' e^{-i\vartheta}}=\Lambda_1.$$

Вспомним, что z_0, так же как и z_1, есть предельные значения функций, голоморфных всюду в единичном круге за исключением точки $\zeta = 0$, где первая из них наверное имеет полюс первого порядка, вторая же только может его иметь.

Поэтому отношение

$$\frac{z_1}{z_0' e^{i\vartheta}}$$

будет предельным значением функции, голоморфной всюду при $|\zeta|\leqslant 1$. Граничное значение ее вещественной части находится из предыдущего равенства, которое может быть переписано в форме:

$$2R\left[\frac{z_1}{z_0' e^{i\vartheta}}\right]=\Lambda_1.$$

Граничное же значение мнимой части будет:

$$I\left[\frac{z_1}{z_0' e^{i\vartheta}}\right]=\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}_1.$$

Отсюда:

$$z_1=\frac{z_0' e^{i\vartheta}}{2}(\Lambda_1+i\tilde{\Lambda}_1).$$

Приравнивая нулю коэфициент при λ^2, найдем $z_2(\vartheta)$ и т. д.

Совершенно так же решается вопрос о конформном преобразовании круга на внешность кривой в том случае, когда эта последняя задана параметрически. Мы вкратце повторим рассуждения. Пусть контур задан уравнениями:

$$x=\varphi(t,\lambda),\qquad y=\psi(t,\lambda)$$

или

$$z = x + iy = F(e^{it}, \lambda).$$

Допустим далее, что при $\lambda = 0$ получаем кривую $z = F(e^{it}, 0)$, такую, что разложение функции $F(e^{it}, 0)$ в ряд по степеням $e^{i\vartheta}$ содержит положительные степени e^{it} и лишь первую отрицательную степень, т. е. имеет вид:

$$z = \alpha_1 e^{-it} + \alpha_2 + \alpha_3 e^{it} + \alpha_4 e^{2it} + \ldots; \quad \alpha_1 \neq 0.$$

Если бы оказалось, что в такой же ряд по степеням $e^{it} = \zeta$ разлагается и функция $F(e^{it}, \lambda)$, то этот ряд, после замены в нем e^{it} на ζ, и давал бы нам отображающую функцию. Здесь параметр t был бы полярным углом. Так как этого вообще нет, то разложение $F(e^{it}, \lambda)$ может содержать отрицательные степени e^{it} выше первой, и нашей задачей будет так заменить параметр

$$t = \vartheta + \lambda\varphi_1(\vartheta) + \lambda^2\varphi_2(\vartheta) + \ldots$$

где $\varphi_1(\vartheta), \varphi_2(\vartheta), \ldots$ суть вещественные функции от ϑ, чтобы эти отрицательные степени e^{it} в разложении пропали.

Подставим в $F(e^{it}, \lambda)$ вместо t его выражение через ϑ. Свободный от λ член разложения по степеням λ полученного выражения есть $F(e^{i\vartheta}, 0)$ и, по условию, содержит лишь первую отрицательную степень $e^{i\vartheta}$.

Найдем коэфициент при λ в первой степени:

$$\left\{\frac{d}{d\lambda}\left[F\left(e^{i\vartheta + \lambda\varphi_1 + \ldots)}, \lambda\right)\right]\right\}_{\lambda = 0} = F_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)\, ie^{i\vartheta}\varphi_1 + F_\lambda(e^{i\vartheta}, 0) =$$

$$= ie^{i\vartheta} F_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)\left\{\varphi_1 + \frac{F_\lambda(e^{i\vartheta}, 0)}{iF_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)} e^{-i\vartheta}\right\}.$$

Так как $F(e^{i\vartheta}, 0)$ содержит $e^{-i\vartheta}$, производная $F_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)$ будет содержать $e^{-2i\vartheta}$, и поэтому множитель перед скобкой будет содержать в своем разложении $e^{-i\vartheta}$. Таким образом, для того, чтобы весь коэфициент при λ не содержал отрицательных степеней $e^{i\vartheta}$ выше первой, нужно выбрать φ_1 так, чтобы выражение в скобках в своем разложении вовсе не содержало бы отрицательных степеней. Пусть разложение в ряд второго слагаемого скобки имеет вид:

$$\frac{F_\lambda(e^{i\vartheta}, 0)}{iF_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)} e^{-i\vartheta} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{in\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n' e^{-in\vartheta}.$$

Чтобы вся скобка не содержала $e^{-i\vartheta}, e^{-2i\vartheta}, \ldots$ нужно, чтобы сумма $\sum_{n=1}^{\infty} c_n' e^{-in\vartheta}$, входила в состав функции φ_1 с обратным знаком. С другой стороны, так как φ_1 — вещественная функция, нужно, чтобы вторая составная часть φ_1 была сопряженной с первой и, следовательно, $\varphi_1(\vartheta)$ должна иметь такой вид:

$$\varphi_1(\vartheta) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n' e^{-in\vartheta} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n' e^{in\vartheta}.$$

Аналогичным образом $\varphi_2(\vartheta)$ выбирается из того требования, чтобы коэфициент при λ^2 в разложении $F(e^{i\vartheta}, \lambda)$ по степеням λ не содержал бы степеней выше первой величины $e^{-i\vartheta}$ и т. д. Идя таким путем, мы последовательно определим все коэфициенты $\varphi_n(\vartheta)$. Доказательство сходимости полученного таким путем разложения проводится тем же путем, что и для случая отображения круга на внутренность кривой.

Пример I. Найти функцию, отображающую круг на внешность эллипса:

$$x = (1 + \lambda)\cos t, \quad y = -(1 - \lambda)\sin t,$$

$$z = e^{-it} + \lambda e^{i\vartheta}.$$

Правая часть содержит только первую отрицательную степень e^{it}, и поэтому отображающая функция пишется сразу:

$$z = \frac{1}{\zeta} + \lambda\zeta.$$

Пример II. Найти функцию, отображающую круг на внешность гипоциклоиды:

$$x = a\left[\left(1 - \frac{1}{p}\right)\cos t + \frac{1}{p}\cos(p-1)t\right],$$

$$y = a\left[-\left(1 - \frac{1}{p}\right)\sin t + \frac{1}{p}\sin(p-1)t\right],$$

$$z = x + iy = a\left[\left(1 - \frac{1}{p}\right)e^{-it} + \frac{1}{p}e^{i(p-1)t}\right];$$

p — целое положительное число.

Разложение для z опять содержит только первую отрицательную степень и отображающая функция пишется вновь сразу точно:

$$z = a\left[\frac{p-1}{p}\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{p}\zeta^{p-1}\right].$$

Пример III. Решим такую же задачу для внешности кривой

$$z = e^{-it} + \lambda e^{-ipt};$$

при $\lambda = -\frac{1}{p}$ получаются эпициклоиды различного порядка.

В выражении для z подставим ряд для l и ограничимся при вычислениях третьей степенью параметра λ:

$$z = e^{-i(\vartheta+\lambda\varphi_1+\lambda^2\varphi_2+\lambda^3\varphi_3+\ldots)} + \lambda e^{-ip(\vartheta+\lambda\varphi_1+\lambda^2\varphi_2+\ldots)} =$$

$$= e^{-i\vartheta}\left[1 - i(\lambda\varphi_1+\lambda^2\varphi_2+\lambda^3\varphi_3+\ldots) + \frac{i^2}{2!}(\lambda\varphi_1+\lambda^2\varphi_2+\ldots)^2 -\right.$$

$$\left. - \frac{i^3}{3!}(\lambda\varphi_1+\ldots)^3+\ldots\right] + \lambda e^{-ip\vartheta}\left[1 - i(\lambda\varphi_1+\lambda^2\varphi_2+\ldots) +\right.$$

$$\left. + \frac{i^2p^2}{2!}(\lambda\varphi_1+\ldots)^2+\ldots\right] = e^{-i\vartheta} + (-ie^{-i\vartheta}\varphi_1 + e^{-ip\vartheta})\lambda +$$

$$+\left(-ie^{-i\vartheta}\varphi_2 - \frac{1}{2!}e^{-i\vartheta}\varphi_1^2 - ipe^{-ip\vartheta}\varphi_1\right)\lambda^2 +$$

$$+\left[e^{-i\vartheta}\left(-i\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2 + \frac{i}{6}\varphi_1^3\right) + e^{-ip\vartheta}\left(-ip\varphi_2 - \frac{p^2}{2}\varphi_1^2\right)\right]\lambda^3+\ldots$$

Рассмотрим коэфициент при λ:

$$-ie^{-i\vartheta}(\varphi_1 + ie^{-i(p-1)\vartheta}).$$

Отсюда видно, что скобка не будет содержать отрицательной степени $e^{i\vartheta}$ в том случае, когда

$$\varphi_1 = -ie^{-i(p-1)\vartheta} + ie^{i(p-1)\vartheta} = -2\sin(p-1)\vartheta,$$

и будет иметь тогда вид:

$$-ie^{-i\vartheta}ie^{i(p-1)\vartheta} = e^{i(p-2)\vartheta}.$$

Перейдем к коэфициенту при λ^2:

$$-ie^{-i\vartheta}\left(\varphi_2 - \frac{i}{2}\varphi_1^2 + pe^{-i(p-1)\vartheta}\varphi_1\right) =$$

$$= -ie^{-i\vartheta}\left[\varphi_2 + \frac{i}{2}e^{2i(p-1)\vartheta} + i(p-1) - i\left(p-\frac{1}{2}\right)e^{-2i(p-1)\vartheta}\right].$$

Поэтому

$$\varphi_2 = i\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(e^{-2i(p-1)\vartheta} - e^{2i(p-1)\vartheta}\right) =$$

$$= (2p-1)\sin 2(p-1)\vartheta.$$

Сам же коэфициент примет форму:

$$(p-1)(e^{-i\vartheta} - e^{i(2p-2)\vartheta}).$$

Наконец, коэфициент при λ^3 будет:

$$-ie^{-i\vartheta}\left(\varphi_3 - i\varphi_1\varphi_2 - \frac{1}{6}\varphi_1^3 + pe^{-i(p-1)\vartheta}\varphi_2 - \frac{i}{2}p^2e^{-i(p-1)\vartheta}\varphi_1^2\right) =$$

$$= -ie^{-i\vartheta}\left[\varphi_3 - i\left(p-\frac{2}{3}\right)e^{3i(p-1)\vartheta} - i\left(\frac{p^2}{2}+1-\frac{3}{2}p\right)e^{i(p-1)\vartheta} -\right.$$

$$\left. - ip(p-1)e^{-i(p-1)\vartheta} + i\left(\frac{3}{2}p^2-\frac{3}{2}p+\frac{1}{3}\right)e^{-3i(p-1)\vartheta}\right];$$

следовательно:

$$\varphi_3 = ip(p-1)(e^{-i(p-1)\vartheta} - e^{i(p-1)\vartheta}) -$$

$$- i\left(\frac{3}{2}p^2-\frac{3}{2}p+\frac{1}{3}\right)(e^{-3i(p-1)\vartheta} - e^{3i(p-1)\vartheta}) =$$

$$= 2p(p-1)\sin(p-1)\vartheta - \left(3p^2-3p+\frac{2}{3}\right)\sin 3(p-1)\vartheta.$$

Подставив вместо φ_3 его значение в предыдущее выражение, будем иметь для коэфициента при λ^3 следующее значение:

$$-\left(\frac{3}{2}p^2-\frac{5}{2}p+1\right)(e^{i(p-2)\vartheta} - e^{i(2p-4)\vartheta}).$$

Стало быть, приближенно, с точностью до третьей степени λ, уравнение контура в функции параметра ϑ имеет вид:

$$z = e^{-i\vartheta} + \lambda e^{i(p-2)\vartheta} + \lambda^2(p-1)(e^{-i\vartheta} - e^{i(2p-3)\vartheta}) -$$

$$- \lambda^3\left(\frac{3}{2}p^2-\frac{5}{2}p+1\right)(e^{i(p-2)\vartheta} - e^{i(3p-4)\vartheta})$$

и отображающая функция, таким образом, приближенно будет:

$$z = [1+\lambda^2(p-1)]\frac{1}{\zeta} + \left[\lambda - \lambda^3\left(\frac{3}{2}p^2-\frac{5}{2}p+1\right)\right]\zeta^{p-2} -$$

$$- \left[\lambda^2(p-1) + \lambda^3\left(\frac{3}{2}p^2-\frac{5}{2}p+1\right)\right]\zeta^{3p-4}.$$

§ 7. Метод Мелентьева, приближенного конформного преобразования [1]

№ 1. Алгорифм последовательных приближений. В инженерном деле очень часто контур той области, на которую надлежит отобразить

[1] При составлении настоящего параграфа мы широко пользовались рукописью мемуара П. В. Мелентьева: „О приближенном конформном преобразовании", любезно предоставленной нам автором.

круг, задается графически, и поэтому применение методов конформного преобразования, требующих аналитического задания контура, становится либо практически невозможным, либо требует затраты дополнительного труда по составлению уравнения его. Кроме того, если уравнение контура сложно, то применение тех же методов, если и остается принципиально возможным, то выкладки, связанные с ним, становятся часто настолько затруднительными, что предпочтительнее бывает обратиться к графическим методам решения задачи, если это допускает требуемая точность результата, так как здесь она будет ограничена точностью тех инструментов, которые мы применяем при работе, тогда как аналитические методы позволяют, вообще говоря, получать искомый результат с любой степенью точности.

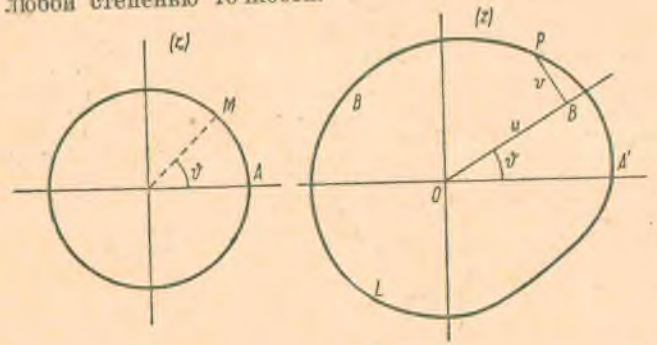


Рис. 20.

Мы дадим сейчас один из таких методов, принадлежащий инж. П. В. Мелентьеву, с успехом применявшему его к решению ряда практических вопросов.

Пусть круг D единичного радиуса конформно отображается на односвязную однолистную область B аналитической функцией:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^{n+1} = \alpha_0 \zeta + \alpha_1 \zeta^2 + \dots \tag{1}$$

где

$$\alpha_n = a_n + i b_n.$$

При этом предполагается, что начало координат $\zeta = 0$ переходит в точку $z = 0$ внутри области B и точка A пересечения окружности круга с вещественной осью переходит в точку A' пересечения контура L области B с осью ox (рис. 20).

Правая часть равенства (1) дает при $\zeta = 1$ разложение в ряд Фурье вещественной и мнимой компонент числа z:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n+1)\vartheta - b_n \sin(n+1)\vartheta],$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n \cos(n+1)\vartheta + a_n \sin(n+1)\vartheta].$$

Ради удобства вычислений П. В. Мелентьев предлагает рассматривать зависимость не между x, y и ϑ, а между полярным углом ϑ и иными величинами, по поведению своему для простых областей более однообразными, нежели x и y. Он рассматривает отношение:

$$u + iv = w = \frac{z}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n. \tag{2}$$

На границе круга D различие между w и z будет заключаться лишь в том, что аргумент у z будет на ϑ больше, нежели у w. Чтобы по известному $z = P$, лежащему на контуре L, найти u и v, нужно от начала координат плоскости z провести луч OB под углом ϑ и опустить на него перпендикуляр из P. Отрезок OB луча будет равен u и отрезок BP перпендикуляра — равен v (см. рис. 20). Сразу же видно следующее: когда контур L области B будет близок к окружности, величина u будет близка к радиусу этой окружности, тогда как v будет все время близкой к нулю. Поведение же величин x и y будет значительно сложнее — оно будет близким к поведению тригонометрических функций.

При $\zeta = 1$ из равенства (2) следует:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta,$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\vartheta + a_n \sin n\vartheta. \tag{3}$$

На использовании двух последних зависимостей и будут построены все вычисления. Для наших целей, собственно говоря, достаточно знать одну из функций u или v, ибо, ввиду их сопряженности, знание, например, u позволяет найти v с точностью до коэфициента b_0; но последний равен, как сразу же можно видеть, сумме всех остальных b_n, взятой с обратным знаком, ибо при $\zeta = 1$ w должно равняться вещественному числу, соответствующему точке A', и мнимая часть числа w должна быть нулем; но она равна сумме всех b_n и поэтому будет

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 0,$$

откуда и следует:

$$b_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{4}$$

Этим обстоятельством мы воспользуемся ниже при построении алгорифма последовательных приближений для определения чисел a_n и b_n.

Если ряды, стоящие в правых частях равенства (3), будут равномерно сходящимися, то можно выбрать такие отрезки их, чтобы погрешность была бы вне принятой точности вычислений для любых ϑ, т. е. в границах принятой точности круг D отображался бы на область B некоторым многочленом.

Допустим, чтобы достигнуть этого, нужно взять в рядах (3) и (2) или (1) $\frac{m}{2}+1$ членов, положив

$$z = \alpha_0\zeta + \alpha_1\zeta^2 + \ldots + \alpha_{\frac{m}{2}}\zeta^{\frac{m}{2}+1}$$

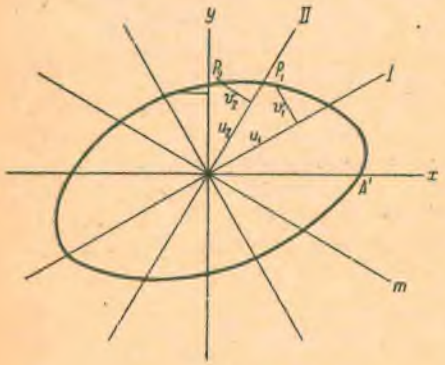


Рис. 21.

и

$$u + iv = w = \alpha_0 + \alpha_1\zeta + \ldots + \alpha_{\frac{m}{2}}\zeta^{\frac{m}{2}} = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} [a_k \cos k\vartheta - b_k \sin k\vartheta) + i(b_k \cos k\vartheta + a_k \sin k\vartheta)]. \quad (6)$$

Из теории рядов Фурье известно, что если функция приводится к тригонометрическому полиному, то, для того чтобы знать ее коэфициенты Фурье, достаточно знать значения этой функции только в некоторых точках. Чтобы не затруднять читателя ссылками на литературу, мы приведем вывод соответствующих равенств. Для этой цели разделим угол 2π около начала координат в плоскости ζ на m равных частей, проводя лучи $I, II, \ldots, m$ (см. рис. 21). Взяв для соответствующих значений $\vartheta = 2\frac{\pi}{m}, 4\frac{\pi}{m}, \ldots 2\pi$, одну из величин u или v, например u, будем иметь:

$$(7)\quad \begin{cases} u_1 = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left(a_k \cos\frac{2\pi}{m}k - b_k \sin\frac{2\pi}{m}k \right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left(a_k \cos\frac{2\pi}{m}nk - b_k \sin\frac{2\pi}{m}nk \right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left((a_k \cos 2\pi k - b_k \sin 2\pi k \right). \end{cases}$$

Эти уравнения относительно коэфициентов $a_k \left(k = 0, 1 \ldots \frac{m}{2}\right)$ и b_k $\left(k = 1, 2 \ldots \frac{m}{2} - 1\right)$ могут быть обращены. Их зависимость от u_n дается следующими формулами:

$$(8)\quad \begin{cases} a_k = \frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m} u_n \cos\frac{2\pi}{m}nk; \\ b_k = -\frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m} u_n \sin\frac{2\pi}{m}nk; \qquad \left[k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2} - 1\right] \\ a_0 = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} u_n; \qquad a_{\frac{m}{2}} = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} (-1)^n u_n. \end{cases}$$

Что касается величин b_0 и $b_{\frac{m}{2}}$, то их определить из системы уравнений (7), очевидно, нельзя, ибо коэфициенты при них будут нулями. Одну из них — b_0 мы сможем найти из условия соответствия точек A и A', выраженного равенством (4), которое для нашего случая приводится к:

$$(9)\quad b_0 = -\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} b_k;$$

коэфициент же $b_{\frac{m}{2}}$ вообще не может быть найден. Взяв n достаточно большим, мы всегда можем считать $b_{\frac{m}{2}} = 0$.

Если бы мы взяли за исходную систему значений не u_n, а v_n, то, в силу $v_m = 0$, что видно из чертежа, получили бы следующие равенства для определения коэфициентов:

$$(10)\quad \begin{cases} a_k = \frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m-1} v_n \sin\frac{2\pi}{m}nk; \\ b_k = \frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m-1} v_n \cos\frac{2\pi}{m}nk; \qquad \left[k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2} - 1\right] \\ b_0 = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1} v_n; \quad b_{\frac{m}{2}} = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1} (-1)^n v_n. \end{cases}$$

Равенство (9) здесь выполнится само собой, ибо, как видно из выражения для v_m:

$$\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} b_k = v_m = 0.$$

Две величины a_0 и $a_{\frac{m}{2}}$ не могут быть выражены через ε_n. Выбором ε мы опять можем сделать $a_{\frac{m}{2}}$ равным нулю. Коэфициент же a_0 здесь мы найдем из того требования, что u_m должно равняться заданной величине — длине отрезка $OA' = l$. Но

$$u_m = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} a_k,$$

следовательно:

$$a_0 = l - \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} a_k. \tag{11}$$

Нет нужды, ввиду однотипности доказательств, устанавливать справедливость всех групп формул (8) и (10); мы остановимся только на первой группе формул (8). Умножая равенства (7) последовательно на $\cos\frac{2\pi}{m}s$; $\cos\frac{2\pi}{m}2s$; ..., $\cos 2\pi s$ и складывая, получим:

$$\sum_{n=1}^{m} u_n \cos\frac{2\pi}{m}ns =$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}}\left[a_k \sum_{n=1}^{m}\cos\frac{2\pi}{m}nk\cos\frac{2\pi}{m}ns - b_k\sum_{n=1}^{m}\sin\frac{2\pi}{m}nk\cos\frac{2\pi}{m}ns\right]$$

или, заменяя тригонометрические функции по формулам Эйлера, найдем, что правая часть равна:

$$\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}}\left[a_k\sum_{n=1}^{m}(e^{i\frac{2\pi}{m}n(k+s)} + e^{i\frac{2\pi}{m}n(k-s)} + e^{i\frac{2\pi}{m}n(s-k)} + e^{i\frac{2\pi}{m}n(-s-k)}) + \right.$$

$$\left. + ib_k\sum_{n=1}^{m}(e^{i\frac{2\pi}{m}n(k+s)} + e^{i\frac{2\pi}{m}n(k-s)} - e^{i\frac{2\pi}{m}n(s-k)} - e^{i\frac{2\pi}{m}n(-s-k)})\right].$$

Все суммы, стоящие в квадратных скобах, вычисляются без затруднений. Очевидно, если p — целое число и $-m < p < m$, $p \neq 0$:

$$\sum_{n=1}^{m} e^{i\frac{2\pi}{m}np} = e^{i\frac{2\pi}{m}p}\frac{e^{i2\pi p}-1}{e^{i\frac{2\pi}{m}p}-1} = 0;$$

поэтому, так как индекс k удовлетворяет неравенству $0 \leqslant k \leqslant \frac{m}{2}$,

$0 < s < \frac{m}{2}$ и, стало быть, $0 < s + k < m$, всегда будет:

$$\sum_{n=1}^{m} e^{i\frac{2\pi}{m}(k+s)n} = \sum_{n=1}^{m} e^{-i\frac{2\pi}{m}(k+s)n} = 0.$$

Остаются только две суммы:

$$\sum_{n=1}^{m} e^{i\frac{2\pi}{m}(k-s)n}$$

и

$$\sum_{n=1}^{m} e^{i\frac{2\pi}{m}(s-k)n}.$$

При $s \neq k$ обе они равны нулю; когда же $s = k$, они обе равны m. Следовательно, правая часть рассматриваемого равенства сведется к:

$$\frac{1}{4}a_s(m+m) + \frac{i}{4}b_s(m-m) = \frac{m}{2}a_s,$$

что и доказывает требуемый результат.

Допустим теперь, что нам тем или иным путем удалось найти некоторые приближенные значения для $u_1, \ldots u_m$, которые мы обозначим через $u_1^{(0)}, u_2^{(0)} \ldots u_m^{(0)}$. Пользуясь ими, мы немедленно по формулам (8) и (9) и требованию $b_{\frac{m}{2}} = 0$ найдем приближенные значения $a_k^{(0)}$, $b_k^{(0)}$ для коэфициентов a_k и b_k. Внося же их значения в равенства:

$$v_n = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}}\left(b_k\cos\frac{2\pi}{m}kn + a_k\sin\frac{2\pi}{m}kn\right), \tag{12}$$

вычислим приближенные значения $v_n^{(0)}$ для v_n, и по $u_n^{(0)}$ и $v_n^{(0)}$ построим точки $M_1^{(0)}, \ldots M_n^{(1)}$, являющиеся приближениями к точкам $M_1, M_2 \ldots M_m$. Если бы все они лежали на кривой, мы получили бы точные положения точек $M_1, M_2 \ldots M_m$ и тем самым построили точно отображающий полином. Вообще же этого не будет. Если исходные значения для u_n мало разнились от действительных значений, то найденные нами точки $M_n^{(0)}$ будут мало отстоять от своих действительных положений на кривой L. Точки $M_n^{(0)}$ нужно каким-то способом снести на кривую L так, чтобы они, если не совпадали бы со своими действительными положениями, то стали бы по возможности ближе к ним. Можно предложить три способа сноса:

1. Первым, наиболее, повидимому, целесообразным, является способ сноса по кратчайшему расстоянию; из $_nM^{(0)}$ опускают на кривую L

перпендикуляры и концы этих перпендикуляров принимают за новое положение точек M_n (рис. 22).

2. Более простым по выполнению, но вероятно менее целесообразным является способ сноса по радиусу. Через $M_n^{(0)}$ и начало координат проводят прямую и ближайшую к $M_n^{(0)}$ точку пересечения ее с кривой L принимают за новые положения M_n (рис. 23).

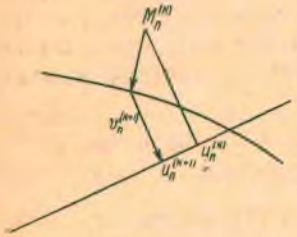


Рис. 22.

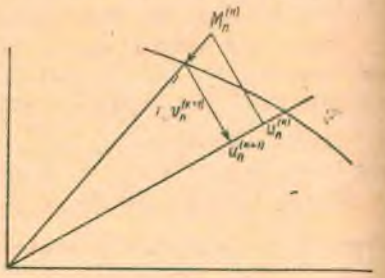


Рис. 23.

3. Наиболее же простым (рис. 24), если прибегать к прозрачной палетке, изображенной на рис. 25, является способ переноса $M_n^{(0)}$ на кривую L вдоль прямой, параллельной лучу $\vartheta = \frac{2\pi}{m} n$, т. е. при по-

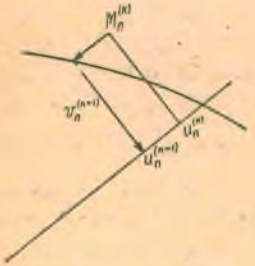


Рис. 24.



Рис. 25.

стоянном v_n. Палетку накладывают на чертеж так, чтобы основная линия u ее совпала с лучом $\vartheta = \frac{2\pi}{m} n$, а шкала v прошла бы через $M_n'^{(0)}$. Отмечают на ней положение $M_n^{(0)}$ и двигают по лучу до тех пор, пока отметка не попадет в некоторую точку кривой L, — это и будет новое искомое положение M_n. Этот способ, благодаря его простоте, применяли во всех нижеприводимых примерах.

Во всех трех случаях, следует думать, новые положения точек будут ближе к действительным, чем прежние. Из них мы опускаем на лучи $\vartheta = \frac{2\pi}{m} n$ перпендикуляры, принимаем отрезки лучей от начала до оснований перпендикуляров за новые значения $u_n^{(1)}$ для u_n и затем повторяем вычисления.

Допустим, что процесс последовательных приближений сходится, т. е. существуют предельные значения для последовательностей $u_n^{(0)}$, $u_n^{(1)}, \ldots$, которые мы будем обозначать через u_n. Исследование вопроса, когда это действительно произойдет, мы оставим в стороне. Из равенств (8), (9) и (12) видно, что будут сходиться последовательные приближения для коэфициентов a_k и b_k и чисел v_n, пределы которых мы обозначим через $\widetilde{a}_k$, $\widetilde{b}_k$ и $\widetilde{v}_n$. Пределы $\widetilde{M}_n$ для последовательностей точек $M_n^{(0)}$, $M_n^{(1)}\ldots$ будут, очевидно, расположены на кривой L.

Подставляя в равенство (5) вместо коэфициентов a_k найденные значения $\widetilde{a}_k$, построим полином $\widetilde{z}$ степени $\frac{m}{2}+1$ без свободного члена, дающий преобразование окружности на некоторую кривую, имеющую с L m общих точек, $\widetilde{M}_n$.

п° 2. Выбор первого приближения. Схема вычислений. Для того чтобы начать вычисление последовательных приближений, о которых говорилось в п° 1, нужно еще указать правило графического построения исходных значений $u_1, u_2, \ldots u_m$. Само собой разумеется, быстрота сходимости, а вместе с нею и количество необходимых вычислений будут тесно связаны с удачей или неудачей выбора этих приближений. Поступая грубо, можно было бы, особенно если контур L близок к окружности, принять все u_n за постоянные, равные радиусу некоторого круга, наилучшим образом подходящего к области B. Такой круг можно строить самыми разнообразными способами. Пусть R_1 есть наибольшее расстояние точек контура L от начала координат и R_2 — наименьшее расстояние, тогда за радиус упомянутого круга можно, например, взять среднее арифметическое $\frac{R_1+R_2}{2}$ чисел R_1 и R_2. Тот же прием можно использовать и для несколько более точного нахождения исходных значений для u_n. Разделим всю кривую на участки между максимумами и минимумами ее расстояния от начала координат. Для каждого из таких участков отдельно будем строить указанным способом свои начальные значения для u_n.

В некоторых случаях к более точным результатам приводит следующее построение. Проведем все лучи, требующиеся при вычислении последовательных приближений, и найдем длины отрезков их от начала координат до пересечения их с контуром L. За исходные значения u_n может быть взято среднее арифметическое длин всех отрезков.

В обоих этих случаях мы заменяем значения u_n для контура L на значения их для некоторой окружности, в которую переходит единичный круг при линейном преобразовании

$$z = \alpha \zeta.$$

Разница будет заключаться лишь в том или ином выборе числа α. Более точные методы построения значений $u_n^{(0)}$ можно указать, пользуясь более сложными функциями комплексной переменной.

Идея построений будет та же. Мы будем делить кривую L на участки и для каждого из них будем подбирать такую функцию, которая соответствующий этому участку кусок окружности преобразовала бы в кривую, по возможности близкую к взятому участку кривой. Тогда можно надеяться, что вспомогательная функция будет, вообще говоря, мало отличаться от искомой преобразующей функции на соответствующей дуге окружности и около нее, хотя может быть и весьма сильно отличаться от нее для других значений.

Рассмотрим первоначально функцию:

$$z = R\zeta + r\zeta^{p+1},$$

где R, r и p вещественные положительные числа. Число p мы не предполагаем целым. Изучим теперь преобразование единичной окружности, совершаемое этой функцией.

Пусть точка ζ расположена на единичной окружности: $\zeta = e^{i\vartheta}$.

Из строения функции видно, что

$$\frac{z}{\zeta} = R + re^{ip\vartheta}$$

будет периодической функцией от ϑ периода $\frac{2\pi}{p}$. Поэтому нам достаточно изучить только кусок кривой, соответствующий изменению ϑ в интервале $-\frac{\pi}{p} \leqslant \vartheta \leqslant +\frac{\pi}{p}$. Очевидно, в силу вещественности чисел R и r, вещественная ось будет осью симметрии куска, и мы можем, следовательно, ограничить свое изучение лишь положительным полуинтервалом.

Из формулы

$$|z|^2 = |w|^2 = R^2 + 2Rr\cos p\vartheta + r^2$$

видно, что наибольшее значение $|z|$ имеет в нашем промежутке изменения ϑ при $\vartheta = 0$ и равен

$$R + r = R_1.$$

При ϑ, возрастающем от 0 до $\frac{\pi}{p}$, модуль числа z будет монотонно убывать и достигает своего наименьшего значения $R - r = R_2$ при $\vartheta = 0$.

Для нахождения точки z, соответствующей заданному значению $\zeta = e^{i\vartheta}$, нужно от начала координат вдоль луча под углом ϑ относительно вещественной оси отложить отрезок длины R, из полученной точки под углом $\omega = p\vartheta$ к лучу провести прямую и на ней отложить отрезок длины r; конец этого отрезка и будет аффиксом z.

Особенно простым будет построение точки z, если найдена кривая, в которую переводится единичная окружность при помощи рассматриваемой функции. Тогда, после того как проведен луч и на нем отложено расстояние R от начала, достаточно из полученной точки описать окружность радиуса r, она пересечет кривую в двух точках. Мы должны выбрать ту из них, которая будет соответствовать углу ω в построенной окружности, если начало отсчета вести от луча, о котором только что говорилось. Как легко понять, она будет всегда лежать от луча в сторону меньшей оси симметрии $\vartheta = \pm\frac{\pi}{p}$, т. е. всегда будет ближе к началу координат.

Покажем сейчас, каким образом изучаемая функция может быть применена к нахождению исходного приближенного положения точек M_n. Разбиваем сначала кривую на участки между максимальными и минимальными расстояниями ее точек от начала координат. Берем какой

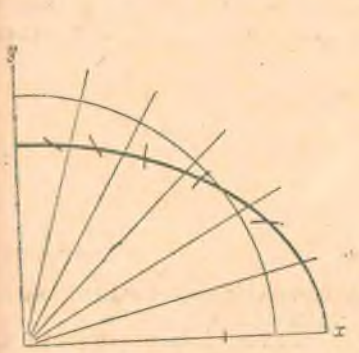


Рис. 26.

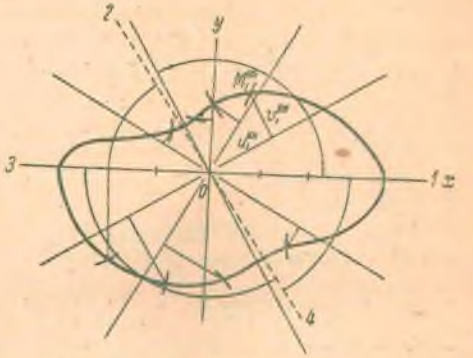


Рис. 27.

либо из них и измеряем угол около начала координат, на который он опирается. Пусть он будет равен χ. Полагая $p = \frac{\pi}{\chi}$ и принимая радиус-вектор, соответствующий более удаленному концу участка, за большую ось симметрии вспомогательной кривой, проделываем для лучей, лежащих внутри рассматриваемого участка, построение точек M.

Построенные таким путем исходные приближения для точек не только не совпадают с их действительными положениями, но, вообще говоря, лежат даже вне кривой L. Но можно пытаться найти положения точек M_n, более близкие к действительным, чем построенные нами. С этой целью мы будем сносить построенные нами точки на кривую L. Проделать такой снос можно одним из тех способов, какие мы применили в п° 1, но здесь проще применить способ сноса по дуге окружности радиуса r с центром на соответствующем луче, взятом на расстоянии R от начала. Построения тогда весьма упрощаются.

Пример такого сноса нами сделан на рис. 26 для эллипса с полуосями 6 и 4 *см*. В качестве второго примера нами взята кривая, изображенная на рис. 27. Участков между максимумами и минимумами

расстояния ее точек от начала координат здесь 4 — между точками пересечения кривой с лучами *1*, *2*, *3*, *4*. Нам нет нужды измерять углы, на которые опираются эти участки, так как они при построении нужны нам были для нахождения угла $p\vartheta$, который мы откладывали от луча для определения направления, в котором мы должны отложить отрезок длины r. При сносе же по окружности построение этого луча является излишним и нам достаточно лишь из точки $Re^{i\vartheta}$ на луче описать как из центра окружность радиуса r и из двух точек пересечения ее с кривой L взять ближайшую к началу координат.

После того как найдем исходные положения точек M_n, опускаем перпендикуляр из них на соответствующие лучи и определяем исходные значения для u_n.

Таким способом построения $M_n^{(0)}$ мы будем пользоваться ниже во всех примерах. Простота геометрических построений, которые приходилось выполнять нам при разыскании $M_n^{(0)}$, имеет свое объяснение в том, что дополнительное слагаемое $r\zeta^p$ в функции

$$z = \zeta(R + r\zeta^p),$$

которым мы пытались приближенно учесть влияния того, что контур отступает от окружности, имело постоянный модуль, когда ζ менялось на окружности.

Тому же порядку идей принадлежит иной способ выбора вспомогательной функции, учитывающей отступление L от окружности. Можно воспользоваться любой из функций, преобразующих единичный круг сам на себя. Наличие дополнительного параметра — координаты той точки, в которую переходит центр при таком преобразовании, позволит более точно определить $M_n^{(0)}$.

Такое усложнение теряет однако смысл, если после построения снести M_n на кривую L по упоминавшейся уже окружности, ибо тогда совершенно безразлично, какую из функций, сохраняющих постоянный модуль на окружности, мы берем, и естественно поэтому воспользоваться простейшей из них: rt.

Мы укажем здесь на возможность использования еще одной функции $\dfrac{t-c}{1-tc}$, дающей преобразование единичного круга на самого себя с переносом точки c в центр и при применении своем требующей сравнительно малых вычислений. Заменив в ней t на ζ^p, рассмотрим функцию:

$$z = \zeta\left(R + r\,\frac{\zeta^p - c}{1 - c\zeta^p}\right) = a\zeta\,\frac{1 + b\zeta^p}{1 - c\zeta^p},$$

где

$$a = R - cr$$

и

$$b = \frac{r - cR}{R - cr}.$$

Попрежнему мы будем считать R, r и c вещественными и положительными и $c < 1$

$$\frac{z}{\zeta} = w = R + r\,\frac{|\zeta|^p e^{ip\vartheta} - c}{1 - c|\zeta|^p e^{ip\vartheta}},$$

откуда видно, что w есть периодическая функция от ζ периода $\dfrac{2\pi}{p}$. Нам, как и выше, достаточно будет рассмотреть поэтому лишь значения w для угла $-\dfrac{\pi}{p} \leq \vartheta \leq +\dfrac{\pi}{p}$. Так как вещественная ось является осью симметрии функции, мы можем ограничиться только положительными ϑ.

Проследим изменение w на окружность круга. Положим:

$$w = R + r\,\frac{e^{ip\vartheta} - c}{1 - ce^{ip\vartheta}}.$$

Функция $\dfrac{t-c}{1-ct}$ дает преобразование единичного круга самого в себя так, что вещественная ось переходит в вещественную ось же и точка $+1$ переходит в точку $+1$. Отсюда следует, что аргумент дроби $\dfrac{e^{ip\vartheta} - c}{1 - ce^{ip\vartheta}}$ будет возрастать от нуля до π, когда ϑ возрастает от нуля до π, и, следовательно, $|w|$ будет все время убывать и достигнет своего наименьшего значения $R - r$ при $\vartheta = \dfrac{\pi}{p}$. Наибольшее же его значение есть $R + r$, соответствующее $\vartheta = 0$.

Чтобы найти точку z, соответствующую $\zeta = e^{i\vartheta}$, мы, как это следует из аналитического выражения для z, можем поступить следующим образом. Как видно из чертежа, знаменатель $1 - ce^{i\vartheta}$ дроби $\alpha = \dfrac{e^{ip\vartheta} - c}{1 - ce^{ip\vartheta}}$ есть вектор BA. Аргумент его есть взятый со знаком минус угол $\widehat{\xi AE}$. Числитель же $e^{ip\vartheta} - c$ есть вектор CP и аргументом его будет угол $\widehat{ACP}$. Аргумент же всей дроби, равный разности между аргументами числителя и знаменателя, получится поэтому, если мы сложим абсолютные величины углов $\widehat{\xi AE}$ и $\widehat{ACP}$. Обозначим результат сложения через ψ. Таким образом для нахождения z достаточно вдоль луча под углом ϑ к оси x отложить от начала отрезок длины R и затем на прямой под углом ψ к этому лучу отложить отрезок длины r; конец его и будет аффиксом z.

Особенно простым будет построение точки z, соответствующей $\zeta = e^{i\vartheta}$ в том случае, когда кривая, соответствующая дуге $-\dfrac{\pi}{p} \leq \vartheta \leq \dfrac{\pi}{p}$ окружности, геометрически найдена, тогда нет необходимости строить углы ψ и достаточно только из точки $Re^{i\vartheta}$ радиусом r описать окруж-

ность и из двух точек пересечения ее с кривой взять ближайшую к началу координат.

Дадим сейчас формулы, позволяющие найти параметры, определяющие рассматриваемую кривую по геометрическим элементам. Два из них R и r имеют простой геометрический смысл: R — есть полусумма максимального и минимального расстояний точек кривой от начала и r — их полуразность.

Для того чтобы определить c, прибегнем к следующему способу. Мы обозначили раньше $\arg \frac{e^{ip\vartheta} - c}{1 - ce^{ip\vartheta}}$ через ψ. Поэтому

$$w = R + re^{i\psi}.$$

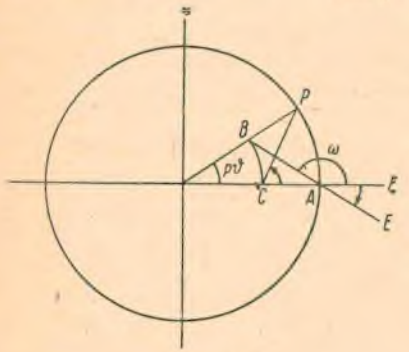


Рис. 28.

Положим здесь $\vartheta = \frac{\pi}{2p}$ и обозначим соответствующее значение ψ через $\psi_{\frac{1}{2}}$:

$$e^{i\psi_{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - c}{1 - e^{i\frac{\pi}{2}}c} = \frac{i - c}{1 - ic} = \frac{-2c}{1 + c^2} + i\frac{1 - c^2}{1 + c^2},$$

откуда:

$$\sin\psi_{\frac{1}{2}} = \frac{1 - c^2}{1 + c^2}, \quad \cos\psi_{\frac{1}{2}} = -\frac{2c}{1 - c^2}$$

$$c = -\frac{1 - \sin\psi_{\frac{1}{2}}}{\cos\psi_{\frac{1}{2}}}.$$

Измерив угол $\psi_{\frac{1}{2}}$, найдем по этой формуле c.

После того как построены исходные значения для u_n, вычисления идут уже известным нам путем.

Формулы (8), (9) и (12), по которым они должны быть проделаны, есть, собственно говоря, формулы приближенного вычисления коэфициентов ряда Фурье, или их комбинации, и поэтому для них может быть применен любой из большого числа способов вычислений, употребляемых в приближенном гармоническом анализе. Для ознакомления с ними мы отсылаем читателя к книгам, специально трактующим этот вопрос.[1] Здесь же, как на примере подобного рода расчетов, мы остановимся на способе, примененном автором метода при решении различного рода задач.

[1] См. например: акад. Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, изд. Акад. наук 1933 г.; Уиттекер и Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, перевод с английского, изданный ГГТИ в 1933 г., или Смирнов В. И., Курс высшей математики для физиков и инженеров, т. II, где можно найти достаточно полное изложение этого вопроса.

Положим

$$m = 12, \quad \frac{2\pi}{m} = 30°.$$

Формулы (8) и (9) для определения a_n и b_n в нашем случае принимают вид:

$$a_0 = \frac{1}{12}(u_1 + u_1 + \ldots + u_{12}),$$

$$a_1 = \frac{2}{12}(u_1\cos 30° + u_2\cos 60° - u_4\cos 60° - u_5\cos 30° - u_6 - u_7\cos 30° - u_8\cos 60° + u_{10}\cos 60° + u_{11}\cos 30° + u_{12}),$$

$$a_2 = \frac{2}{12}(u_1\cos 60° - u_2\cos 60° - u_3 - u_4\cos 60° + u_5\cos 60° + u_6 + u_7\cos 60° - u_8\cos 60° - u_9 - u_{10}\cos 60° + u_{11}\cos 60° + u_{12}),$$

$$a_3 = \frac{2}{12}(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8 - u_{10} + u_{12}),$$

$$a_4 = \frac{2}{12}(-u_1\cos 60° - u_2\cos 60° + u_3 - u_4\cos 60° - u_5\cos 60° + u_6 - u_7\cos 60° - u_8\cos 60° + u_9 - u_{10}\cos 60° - u_{11}\cos 60° + u_{12}),$$

$$a_5 = \frac{2}{12}(-u_1\cos 30° + u_2\cos 60° - u_4\cos 60° + u_5\cos 30° - u_6 + u_7\cos 30° - u_8\cos 60° + u_{10}\cos 60° - u_{11}\cos 30° + u_{12}),$$

$$a_6 = \frac{1}{12}(-u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + u_{12}).$$

Формулы для $b_1, b_2, \ldots, b_5$ строятся так же, как и для $a_1, a_2, \ldots a_6$, с той лишь разницей, что вместо функции cos стоит sin и множитель перед скобкой будет не $\frac{2}{12}$, а $-\frac{2}{12}$. Выписывать их мы поэтому не будем. b_6 по условию принимаем равным нулю; равенство (9) для b_0 дает

$$b_0 = -(b_1 + b_2 + \ldots + b_5).$$

Отсюда видно, что все коэфициенты a_n и b_n получаются из $u_1 \ldots u_{12}$ путем умножения, если отбросить пока общий для всех их множитель $\frac{1}{12}$, на 1, $\sqrt{3} = 1{,}732 = 2\cos 30° = 2\sin 60°$ и 2, с последующим затем сложением или вычитанием.

Сообразно с этим мы заранее заготовляем таблицу произведений u_n на указанные числа (рис. 29) и затем ряд шаблонов, по размерам одинаковых с таблицей, указанных на рис. 30. Последние сделаны с тем расчетом, чтобы при наложении их на таблицу были видны лишь

те числа таблицы, которые входят в образование соответствующего шаблону коэфициента. Так, например, в шаблоне для a_0 сделаны окна для

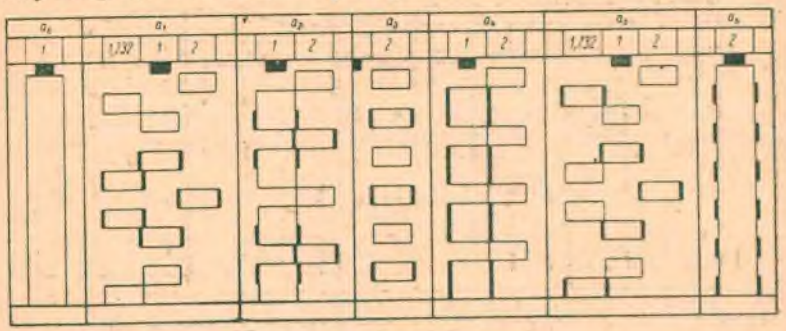


Рис. 30.



Рис. 29.

всех чисел второго столбца, содержащего числа u_n; в шаблоне для a_1 в первом столбце $u_n \sqrt{3}$ сделаны окна для u_1, u_5, u_7 и u_{11}; во втором столбце $u_n \cdot 1$ — сделаны окна для u_2, u_4, u_8, u_{10} и в третьем столбце $u_n \cdot 2$ — для u_6 и $u_0 = u_{12}$ и т. д. Окна, дающие числа, которые должны быть взяты со знаком минус, отмечаем каким-либо способом от других окон шаблонов, например, как это сделано на наших чертежах, отмечаем жирными чертами, поставленными сбоку.



Рис. 31.

Совершенно так же поступаем и при вычислении v_1, v_2 . . . .

$$v_1 = b_0 + (b_1 \cos 30° + a_1 \sin 30°) + (b_2 \cos 60° + a_2 \sin 60°) + \ldots$$

. . . . . .

Все v_n образуются из сумм и разностей произведений a_n и b_n на 0; 0,5; $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$; 1, представляющие значения тригонометрических функ-

ций sin и cos для углов 0°, 30°, 60°, 90°. Таблицу таких произведений, заготовляем так же, как таблицу для u_n (см. рис. 31).

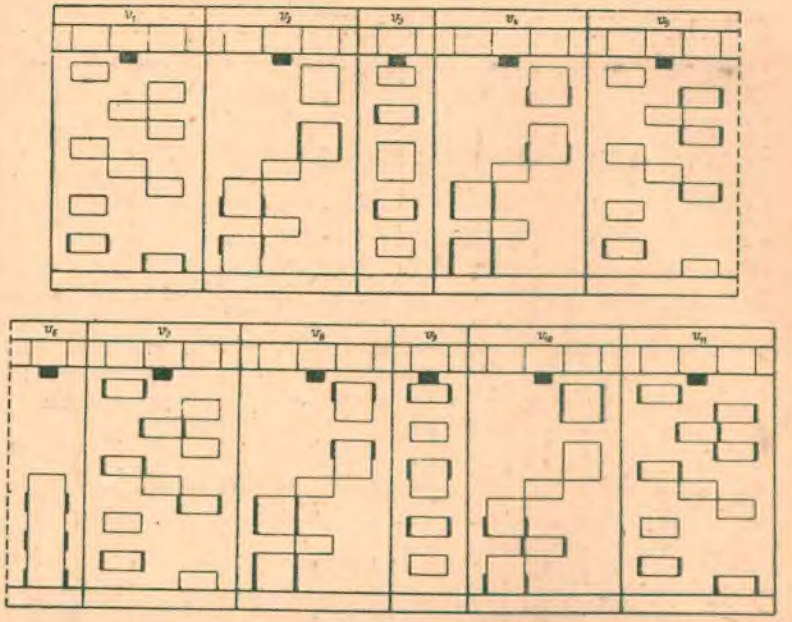


Рис. 32.

Для вычисления v_n по составленной таблице изготовляем по тому же принципу, что и раньше, шаблоны, приведенные нами на рис. 32.

Пусть нам требуется отобразить единичный круг на область, ограниченную кривой, изображенной на рис. 33 в масштабе 1 : 3. Построение исходных значений для u_n и умножение их на 1; 1,732; 2 дают нам три первых столбца помещенных в левом верхнем углу таблицы 1, на которой производим запись расчета. Накладываем на эти столбцы шаблон для a_0, суммируем все числа, стоящие в окнах, и записываем полученную цифру (982,5) в строку a_0 в первый столбец, помеченный знаком $\sum +$, и результат деления ее, так как отрицательных слагаемых в этом случае нет, переносим в четвертый столбец против a_0, помеченный знаком : 12. После этого накладываем шаблон для a_1, суммируем все числа в не отмеченных жирными

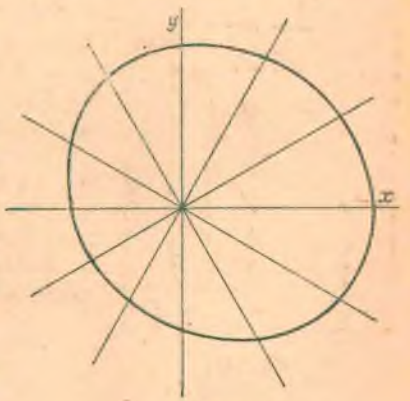


Рис. 33.

Таблица 1

u_k			1,732	1	2	1,732	1	2	1,732	1	2	1,732	1	2	1,732	1	2	1,732	1	2	1,732	1	2
$k=0$ (12)			—	115,5	231	—	115,5	231	—	115,5	231	—	115,5	231	—	115,5	231	—	115,5	231	—	115,5	231
1			176	101,5	203	181	104,5	209	181	104,5	209	181	104,5	209	181	104,5	209	180	104	208
2			164	94,5	189	169	97,5	195	168	97	194	168	97	194	167	96,5	193	167	96,5	193
3			—	88	176	—	89,5	179	—	88	176	—	88	176	—	88	176	—	88	176
4			135	78	156	136	78,5	157	131,5	76	152	132,5	76,5	153	132,5	76,5	153	132,5	76,5	153
5			118,5	68,5	137	117	67,5	135	113,5	65,5	131	116	67	134	115	66,5	133	115	66,5	133
6			—	63	126	—	62	124	—	62	124	—	62,5	125	—	62	124	—	62	124
7			106,5	61,5	123	106,5	61,5	123	106,5	61,5	123	106,5	61,5	123	106,5	61,5	123	106,5	61,5	123
8			107,5	62	124	108	62,5	125	108	62,5	125	108	62,5	125	108	62,5	125	108	62,5	125
9			—	68	136	—	68	136	—	68	136	—	67,5	135	—	68	136	—	68	136
10			139,5	80,5	161	143	82,5	165	143,5	83	166	141	81,5	163	143	82,5	165	143	82,5	165
11			176	101,5	203	176	101,5	203	178	103	206	176,5	102	204	176,5	102	204	177,5	102,5	205
Σ			982,5	—	—	391	—	—	986	—	—	986	—	—	986	—	—	986	—	—
$\Sigma+$	$\Sigma-$	D	758	491	267	768	488,5	279,5	770	482,5	287,5	767	486,5	280,5	767,5	484,5	283	767,5	484,5	283
			690	627	63	690	636	54	689,5	630,5	59	691	628,5	62,5	689,5	630	59,5	689,5	630	59,5
			511	476	35	513	484	29	508	484	24	509	482	27	509	482	27	509	482	27
			669	648	21	670	656	14	667	653	14	667	652,5	14,5	667	652,5	14,5	667	652,5	14,5
			631	618	13	634,5	622	12,5	631	621,5	9,5	632	621,5	10,5	631,5	620,5	11	631,5	620,5	11
			493,5	489	4,5	498,5	492,5	6	496	490,5	5,5	495,5	490,5	5	495,5	490,5	5	495,5	490,5	5
$\Sigma+$	$\Sigma-$	D	b_1	545	645	100	— 8,3	550	656	—106	— 8,8	552	645,5	— 93,5	— 7,8	547,5	648	—100,5	— 8,4	550,5	646,5	—96	— 8,0	551	646	—95	— 7,9
			b_2	569	554	15	1,2	572	564,5	7,5	0,6	566,5	563,5	3	0,2	566	563,5	2,5	0,2	567	562,5	4,5	0,4	568	561,5	6,5	0,5
			b_3	502	476	26	2,2	505	480	25	2,1	505	476	29	2,4	503	478	2,5	2,1	503	478	2,5	2,1	504	477	2,7	2,2
			b_4	566	557	9	0,8	570	566,5	3,5	0,3	567,5	562,5	5	0,4	568,5	561	7,5	0,6	566,5	563	3,5	0,3	567,5	562	5,5	0,5
			b_5	597	593	4	0,3	604	602	2	0,2	600	597,5	2,5	0,2	599	596,5	2,5	0,2	599	598	1	0,1	599,5	597,5	2	0,2
			$-\Sigma b=b_0$				3,8				5,6				4,6				5,3				5,1				4,5
b_k		a_k		0,5	1	0,866	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866
		$k=1$		11,1	22,2	19,2	11,6	23,3	20,2	12,0	24	20,8	11,7	23,4	20,3	11,8	23,6	20,5						
		2		—	5,2	4,5	—	4,5	3,9	—	4,9	4,2	—	5,2	4,5	—	5,0	4,3						
		3		—	2,9	—	—	2,4	—	—	2,0	—	—	2,2	—	—	2,2	—						
		4		—	1,7	1,5	—	1,2	1,1	—	1,2	1,0	—	1,2	1,0	—	1,2	1,0						
		5		0,5	1,1	1,0	0,5	1,0	0,9	0,4	0,8	0,7	0,4	0,9	0,8	0,4	0,9	0,8						
	$k=0$			—	3,8	—	—	5,6	—	—	4,6	—	—	5,3	—	—	5,1	—						
	1			— 4,1	— 8,3	— 7,2	— 4,4	— 8,8	— 7,6	— 3,9	— 7,8	— 6,8	— 4,2	— 8,4	— 7,3	— 4,0	— 8,0	— 7,0						
	2			0,6	1,2	—	0,3	0,6	—	0,1	0,2	—	0,1	0,2	—	0,2	0,4	—						
	3			—	2,2	—	—	2,1	—	—	2,4	—	—	2,1	—	—	2,1	—						
	4			0,4	0,8	—	0,1	0,3	—	0,2	0,4	—	0,3	0,6	—	0,1	0,3	—						
	5			0,1	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2	0,1	0,2	0,2	0,1	0,2	0,2	0	0,1	0,1						
$\Sigma+$	$\Sigma-$	$D=$	v_1	17,7	0,7	17,0	17,8	0,2	17,4	17,5	0,4	17,1	17,9	0,5	17,4	18,0	0,2	17,8						
			v_2	23,8	5,4	18,4	25,4	4,5	20,9	25,9	4,3	21,6	26,2	4,1	22,1	26,0	4,1	21,9						
			v_3	27,9	4,1	23,8	30,2	3,0	27,2	29,8	2,2	27,6	29,2	2,4	26,8	29,9	2,6	27,3						
			v_4	26,7	2,5	24,2	29,0	0,9	28,1	28,8	1,4	27,4	28,7	1,6	27,1	28,7	1,4	27,3						
			v_5	19,2	— 0,8	20,0	20,6	— 2,5	23,1	19,3	— 1,4	20,7	19,9	— 1,5	21,4	19,8	— 1,6	21,4						
			v_6	5,8	— 5,8	11,6	6,5	— 6,5	13,0	5,2	— 5,2	10,4	6,1	— 6,1	12,2	5,8	— 5,8	11,6						
			v_7	10,7	7,7	3,0	11,1	7,0	4,1	10,1	7,8	3,3	11,1	7,3	3,8	10,7	7,5	3,2						
			v_8	11,5	17,7	— 6,2	12,5	8,3	— 4,9	11,9	18,3	— 6,4	12,7	17,6	— 4,9	12,3	17,8	— 5,5						
			v_9	7,5	24,5	— 17,0	8,3	24,9	— 16,6	7,0	25,0	—18,0	8,1	24,5	— 16,4	7,6	24,9	— 17,3						
			v_{10}	2,6	26,6	— 24,0	3,3	26,6	— 23,3	2,6	27,6	—25,0	3,2	27,1	— 23,9	3,0	27,1	— 24,1						
			v_{11}	— 2,8	21,2	— 24,0	— 1,7	19,8	— 21,5	— 2,1	20,5	—22,1	— 1,9	20,3	— 22,2	19,9	— 1,7	21,6						

чертами окнах и записываем результат (758) в столбец $\sum +$ против a_1, суммируем все числа в отмеченных окнах и результат (491) записываем в столбец $\sum -$, из первой суммы вычитаем вторую, вносим разность (267) в столбец D, делим на 12 и частное (22,2) записываем в четвертый столбец и т. д.

После того как найдены b_1, b_1, b_3, b_4, b_5, суммируем их и, взяв результат с обратным знаком, получаем b_0, что указано нами в последней строке второго раздела таблицы. По полученным значениям a_n и b_n составляем таблицу из произведений a_n, b_n на 0,5; $\sqrt{3}$, 1. Она занимает начало третьего раздела. Пользуясь шаблонами для v_n, находим первые приближения для них обычным путем. Запись в бланке не нуждается в пояснениях. Получив v_n, графическим путем определяем новые значения для u_n и продолжаем вычисления тем же способом. Вычисления продолжены до пятого приближения. Судить о полученной точности можно по тому, что пятые приближения для u_n отличаются от четвертых только в двух случаях (u_1 и u_{11}), в остальных же совпадают; относительное расхождение составляет величину, меньшую 0,5%.

Для вещественных частей a_n коэфициентов ряда Тэйлора четвертое и пятое приближения не отличаются друг от друга. Хуже дело обстоит с b_n; это обстоятельство может быть, повидимому, объяснено тем, что именно те из них, за исключением b_0, которые показывают наиболее сильное колебание, являются величинами порядка последнего знака в принятой точности вычислений, и колебания суть, вероятно, результаты округлений.

Приближенное значение отображающей функции, будет:

$$z = (82{,}2 + 4{,}5i)\zeta + (23{,}6 - 7{,}9i)\zeta^2 + (5{,}0 + 0{,}5i)\zeta^3 + (2{,}2 + 2{,}2i)\zeta^4 + \\ + (1{,}2 + 0{,}5i)\zeta^5 + (0{,}9 + 0{,}2i)\zeta^6 + 0{,}4\zeta^7.$$

n° 3. Об отображении внешних областей. Будем искать функцию, преобразующую конформно внешность единичного круга на внешность кривой.

Известно, что при сохранении при преобразовании бесконечно далекой точки она имеет вид:

$$z = \alpha_0\zeta + \alpha_1 + \alpha_2\zeta^{-1} + \ldots + \alpha_n\zeta^{1-n} + \ldots \tag{13}$$

Будем требовать, ради определенности, чтобы точка A вещественной оси плоскости ζ вновь переходила бы в точку A' вещественной оси плоскости z.

Допустим опять, что при взятой точности вычислений отображение совершается следующей рациональной функцией, являющейся отрезком ряда (13):

$$z = \alpha_0\zeta + \alpha_1 + \alpha_2\zeta^{-1} + \ldots + \alpha_{\frac{m}{2}}\zeta^{1-\frac{m}{2}}. \tag{14}$$

Пусть w имеет прежний смысл.

Зависимость между a_n, b_n и вещественной и мнимой частями u, v будет даваться здесь равенствами:

$$\begin{cases} u = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta), \\ v = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} (b_k \cos k\vartheta - a_k \sin k\vartheta), \end{cases} \tag{15}$$

Из этих равенств видно, что:

1) зависимость a_k от u_n не изменяется;

2) при получении b_k мы должны взять у суммы другой знак по сравнению с прежним;

3) при вычислении v_n все a_k берутся с противоположным знаком.

Все остальное сохраняется. Вычисления проводятся по той же схеме и при пользовании теми же шаблонами.

Для разыскания первого приближения можно указать прием, совершенно подобный примененному нами при отображении внутренних областей. За вспомогательную функцию здесь можно взять:

$$z = a\zeta\,\frac{1 + b\zeta^{-p}}{1 - c\zeta^{-p}}.$$

Все прежние формулы сохраняются и сейчас с одним лишь различием. Всюду в них вместо $\vartheta = p\vartheta$ нужно взять $-\vartheta$. Это же, как сразу видно, имеет следствием то обстоятельство, что из двух точек пересечения вспомогательной окружности радиуса ρ_1 с кривой Λ мы должны будем взять ту, которая расположена на кривой в стороне большей оси симметрии, т. е. дальше отстоит от начала координат.

Для случаев отображения внешности круга на внешность кривой рис. 33 мы приводим расчет. Как уже говорилось, для получения b_n мы берем в нем не $\frac{D}{12}$, а $-\frac{D}{12}$ и при нахождении v_n в таблицу 2 записываем произведения не a_n, а $-a_n$ на 0,5; $\sqrt{3}$; 1.

Как видно из табл. 2, сходимость весьма быстрая; уже исходное графическое приближение дало достаточно точный результат.

Отображающая функция приближенно имеет следующее выражение:

$$z = (90{,}2 - 2{,}6i)\zeta + (22{,}9 + 6{,}8i) + (1{,}1 - 5{,}9i)\zeta^{-1} + (0{,}5 + 0{,}1i)\zeta^{-2} + \\ + (0{,}7 + 0{,}5i)\zeta^{-3} + (0{,}1 + 0{,}2i)\zeta^{-4} - 0{,}1\zeta^{-5}.$$

n° 4. Случай симметричных контуров. Примеры. Если область B, ограниченная кривой L, обладает p осями симметрии, отображающая функция будет иметь вид:

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^{1+kp}, \tag{16}$$

Таблица 2

u_k				1,732	1	2	1,732	1	2	
$k=0$ (12)				—	115,5	231	—	115,5	231	
1				190,5	110	220	190,5	110	220	
2				174	100,5	201	174	100,5	201	
3				—	95	190	—	96	192	
4				154	89	178	155	89,5	179	
5				138,5	80	160	138,5	80	160	
6				—	68,5	137	—	68,5	137	
7				106,5	61,5	123	106,5	61,5	123	
8				116	67	134	116	67	134	
9				—	84	168	—	84	168	
10				173	100	200	173	100	200	
11				191	110,5	221	191	110,5	221	
Σ			$:12=a_0$	1081,0		90,1	1083			90,2
			a_1	813	538	275	22,9	813	538,5	274,5	22,9
$\Sigma+$	$\Sigma-$	D	$:12$ a_2	730	714,5	15,5	1,3	730	717	13	1,1
			a_3	543	538	5	0,4	544	539	5	0,5
			a_4	726	718,5	7,5	0,6	728	719	9	0,7
			a_5	676,5	674,5	2	0,2	676,5	675	1,5	0,1
			a_6	540,5	541	— 0,5	0	541	542	— 1	— 0,1
			b_1	629	708	79	6,6	629	711	82	6,8
$\Sigma+$	$\Sigma-$	D	$:12$ b_2	656,5	587	— 69,5	— 5,8	657,5	587	— 70,5	— 5,9
			b_3	534	548	14	1,2	536	548	12	1,0
			b_4	619,5	624	4,5	0,4	619,5	625	5,5	0,5
			b_5	668	669	1	0,1	669	671	2	0,2
			$-\Sigma b=b_0$				— 2,5				— 2,6
b_k			$-a_k$	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866	
			$k=1$	— 11,4	— 22,9	— 19,8				
			2	—	— 1,3	— 1,1				
			3	—	— 0,4	—				
			4	—	— 0,6	— 0,5				
			5	— 0,1	— 0,2	— 0,2				
$k=0$				—	— 2,5	—				
1				3,3	6,6	5,7				
2				— 2,9	— 5,8	—				
3				—	— 1,2	—				
4				0,2	0,4	—				
5				0	0,1	0,1				
			v_1	— 18,2	0,3	— 13,5				
			v_2	— 19,9	— 2,4	— 17,5				
			v_3	— 25,2	— 6,2	— 19,0				
			v_4	— 21,6	— 0,7	— 20,9				
$\Sigma+$	$\Sigma-$	$D=$	v_5	— 17,2	4,3	— 21,5				
			v_6	— 7,9	7,9	— 15,8				
			v_7	— 6,9	— 6,0	— 0,9				
			v_8	— 2,6	— 19,7	17,1				
			v_9	— 2,5	— 28,9	26,4				
			v_{10}	0,3	— 22,6	22,9				
			v_{11}	0,3	— 13,2	13,5				

для внутренних областей, и

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^{1-kp}, \tag{17}$$

для внешних областей.

Соотношения (6) и (15) примут форму:

$$u = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos kp\vartheta,$$

$$v = \pm \sum_{k=0}^{m} a_k \sin kp\vartheta,$$

где знак $+$ берется для внутренних областей и $-$ для внешних. Рассмотрим угол между вещественной осью и ближайшей осью симметрии, лежащей в направлении положительного вращения от нее. Раствор его равен $\frac{\pi}{p}$.

Разделим его на m равных частей $\frac{\pi}{pm}$ и положим:

$$\vartheta = 0, \frac{\pi}{pm}, \ldots \frac{\pi}{pm}(m-1).$$

Обозначим соответствующее этим лучам значение функций u и v через $u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots$

$$\begin{cases} u_n = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos kp \frac{\pi}{pm} n = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos \frac{\pi}{m} kn, \\ v_n = \pm \sum_{k=0}^{m} a_k \sin kp \frac{\pi}{pm} n = \pm \sum_{k=0}^{m} a_k \sin \frac{\pi}{m} kn. \end{cases} \tag{18}$$

Из них просто получаются равенства для нахождения коэфициентов a_k

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2m}(u_0 + u_m) + \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1} u_n \\ a_m = \frac{1}{2m}[u_0 + (-1)^m u_m] + \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1}(-1)^n u_n \\ a_k = \frac{1}{m}[u_0 + (-1)^k u_m] + \frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m-1} u_n \cos \frac{\pi}{m} nk \quad [1 \le k \le m-1] \end{cases} \tag{19}$$

Так как p в формулы (18) и (19) не входит, расчет остается одинаковым для всех случаев осей симметрии. Число p сказывается только в расположении лучей.

Так же как в п° 2, мы остановимся для иллюстрации расположения вычислений при пользовании формулами (18) и (19) для решения задач в случае $m = 6$. Равенства (19) примут тогда вид:

$$
(20)\quad
\begin{cases}
a_0 = \frac{1}{12}[u_0 + u_6 + 2(u_1 + u_2 + \ldots + u_5)],\\
a_6 = \frac{1}{12}[u_0 + u_6 + 2(-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5)],\\
a_1 = \frac{1}{6}[u_0 - u_6 + \sqrt{3}(u_1 - u_5) + (u_2 - u_4)],\\
a_2 = \frac{1}{6}[u_0 + u_6 + u_1 - u_2 - 2u_3 - u_4 + u_5],\\
a_3 = \frac{1}{6}[u_0 - u_6 - 2u_2 + 2u_4],\\
a_4 = \frac{1}{6}[u_0 + u_6 - u_1 - u_2 + 2u_3 - u_4 - u_5],\\
a_5 = \frac{1}{6}[u_0 - u_6 - \sqrt{3}u_1 + u_2 - u_4 + \sqrt{3}u_5].
\end{cases}
$$

Уравнения же, из которых должны быть определены r_n, будут иметь форму:

$$
(21)\quad
\begin{cases}
r_1 = \pm\left[0{,}5(a_1 + a_5) + \frac{\sqrt{3}}{2}(a_2 + a_4) + a_3\right],\\
r_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}[a_1 + a_2 - a_4 - a_5],\\
r_3 = \pm[a_1 - a_3 + a_5],\\
r_4 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}[a_1 - a_2 + a_4 - a_5],\\
r_5 = \pm\left[0{,}5(a_1 + a_5) - \frac{\sqrt{3}}{2}(a_2 + a_4) + a_3\right].
\end{cases}
$$

Для вычисления последовательных приближений к коэфициентам a_k заготовляем таблицу значений u_n и их произведений на 2, $\sqrt{3} = 1{,}732$ (рис. 34) и шаблоны для каждого из a_k (рис. 35).

При нахождении v_n с той же целью составляем таблицу рис. 36 и шаблоны, изображенные на рис. 37. Принцип составления их остается прежним и не требует пояснений. Таблица 3 заполнена расчетом преобразования круга на внутренность эллипса с полуосями 100 и 150 *мм*. Преобразующая функция имеет вид:

$$z = 115{,}8\zeta + 20{,}6\zeta^3 + 6{,}8\zeta^5 + 3{,}2\zeta^7 + 1{,}7\zeta^9 + 1{,}2\zeta^{11} + 0{,}7\zeta^{13}.$$

На таблице 4 приведены расчеты для разыскания функции, дающей конформное преобразование внешности круга на внешность квадрата со стороной 200. В результате вычислений получаем:

$$z = 118{,}1\zeta - 19{,}8\zeta^{-3} + 2{,}2\zeta^{-7} - 0{,}7\zeta^{-11} + 0{,}5\zeta^{-15} - 0{,}2\zeta^{-19}.$$

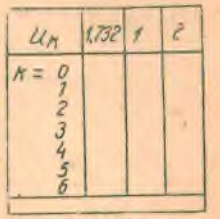


Рис. 34.

п° 5. Конформное преобразование двухсвязных областей. Тот же порядок идей, который мы применяли в настоящем параграфе к решению задач о конформном преобразовании круга на односвязную область, может быть перенесен и на области двухсвязные. Мы скажем здесь

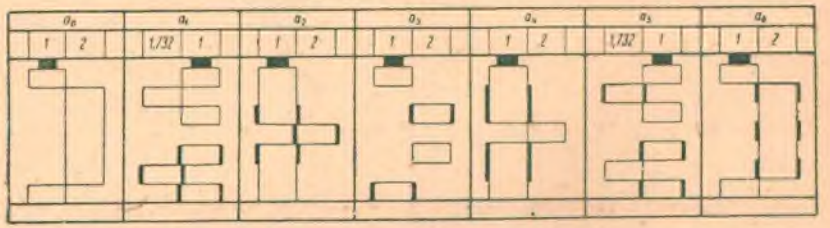


Рис. 35.

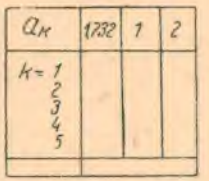


Рис. 36.

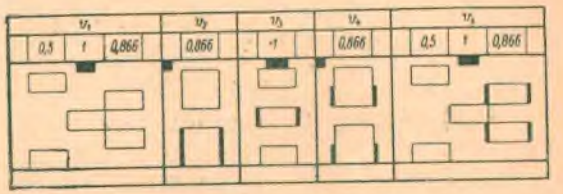


Рис. 37.

несколько слов о задаче преобразования кольца на область, ограниченную двумя кривыми: внешним контуром L и внутренним l. Будем считать, что начало координат плоскости z расположено внутри контура l.

Пусть кольцо, которое мы будем пытаться преобразовать конформно на область B, будет ограничено концентрическими окружностями радиусов 1 и ρ. Известно, что возможность конформного преобразования двухсвязных областей друг в друга подчинена гораздо большим ограничениям, чем в случае односвязных областей. Не всякие две двухсвязные области могут быть конформно преобразованы друг в друга. Все они распадаются на классы в зависимости от того, каким отношением радиу-

Таблица

u_k				1,732		1	2	1,732		1	2	1,732		1	2
$k=0$				—		150	—	—		150	—	—		150	
1				232		134	268	233		134,5	269	—		134,5	
2				—		118,5	237	—		120	240	—		120	
3				—		109,5	219	—		110	220	—		110	
4				—		104	208	—		104,5	209	—		104,5	
5				175		101	202	175		101	202	—		101	
6				—		100	—	—		100	—	—		100	
Σ			$:12=a_0$	1384			115,3	1390			115,8				
			a_1	500,5	379	121,5	20,2	503	379,5	123,5	20,6				
			a_2	485	441,5	43,5	7,2	485,5	444,5	41,0	6,8				
$\Sigma+$	$\Sigma-$	D	$:6$ a_3	358	337	21	3,5	359	340	19	3,2				
			a_4	469	457,5	11,5	1,9	470	460	10	1,7				
			a_5	443,5	436	7,5	1,2	445	437,5	7,5	1,2				
			$:12=a_6$	695	689	6	0,5	699	691	8	0,7				
a_k				0,5		1	0,866	0,5		1	0,866				
$k=1$				10,1		20,2	17,5	10,3		20,6	17,9				
2				—		7,2	6,2	—		6,8	5,8				
3				—		3,5	—	—		3,2	—				
4				—		1,9	1,6	—		1,7	1,5				
5				0,6		1,2	1	0,6		1,2	1,0				
			v_1				22,0				21,4				
$\Sigma+$	$\Sigma-$	$D=$	v_2	23,7		2,6	21,1	23,7		2,5	21,2				
			v_3	21,4		3,5	17,9	21,8		3,2	18,6				
			v_4	19,1		7,2	11,9	19,4		6,8	12,6				
			v_5	14,2		7,8	6,4	14,1		7,3	6,8				

Таблица 4

u_k				1,732		1	2	1,732		1	2
$k=0$				—		100	—	—		100	—
1				176,5		102	204	176,5		102	204
2				—		108	216	—		107,5	215
3				—		116,5	233	—		116,5	233
4				—		126,5	253	—		126	252
5				235,5		136	272	235,5		136	272
6				—		141,5	—	—		141,5	—
Σ			$:12=a_0$	1419,5			118,3	1417,5			118,1
			a_1	384,5	503,5	— 119	— 19,8	384	503	— 119	— 19,8
			a_2	479,5	467,5	12	2,0	479,5	466,5	13	2,2
$\Sigma+$	$\Sigma-$	D	$:6=$ a_3	353	357,5	— 4,5	— 0,7	352	356,5	— 4,5	— 0,7
			a_4	474,5	472,5	2	0,3	474,5	471,5	3	0,5
			a_5	443,5	444,5	— 1	— 0,2	443	444	— 1	— 0,2
			$:12=a_6$	710,5	709	1,5	0,1	708,5	709	— 0,5	0
$-a_k$				0,5		1	0,866	0,5		1	0,866
$k=1$				9,9		19,8	17,1				
2				—		— 2,0	— 1,7				
3				—		0,7	—				
4				—		— 0,3	— 0,3				
5				0,1		0,2	0,2				
			v_1				8,7				
$\Sigma+$	$\Sigma-$	$D=$	v_2	15,4		— 0,1	15,5				
			v_3	20,0		0,7	19,3				
			v_4	16,8		— 0,5	18,3				
			v_5	10,7		2,0	12,7				

сов будет обладать то кольцо, на которое их можно преобразовать, и лишь области, принадлежащие к одному и тому же классу, допускают конформное преобразование друг в друга.

Первая задача, которая возникает в связи с поставленной нами проблемой, есть задача определения числа ρ, представляющего отношение радиусов окружностей, ограничивающих кольцо.

Теоретическое решение этой задачи связано с почти непреодолимыми трудностями и, насколько нам известно, представляет еще нерешенную проблему теории функций.

Однако ее приближенное решение, если воспользоваться порядком идей, о котором мы говорили выше, представляет трудности немногим больше, нежели те, с которыми мы встречались при преобразовании односвязных областей.

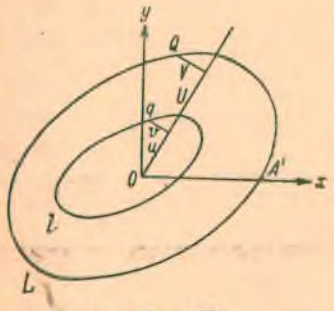


Рис. 38.

Из теории функций комплексной переменной известно, что преобразующая функция может быть в кольце представлена рядом Лорана:

$$(22)\qquad z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n\zeta^n.$$

Само преобразование определяется с точностью до вращения кольца около начала координат. Чтобы избежать неопределенности, мы предположим, что при преобразовании точка пересечения вещественной оси плоскости ζ с большой окружностью кольца перейдет в точку A' пересечения вещественной оси плоскости z с контуром L.

Будем предполагать, что с требуемой нам точностью преобразование совершается следующей рациональной функцией:

$$(23)\quad z=\alpha_{-\frac{m}{2}}\zeta^{1-\frac{m}{2}}+\ldots+\alpha_{-2}\zeta^{-1}+\alpha_{-1}+\alpha_0\zeta+\ldots+\alpha_m\zeta^{1+\frac{m}{2}}.$$

Для определения коэффициентов $\alpha_k\left(k=-\frac{m}{2},\ldots\frac{m}{2}\right)$ мы применим тот же метод последовательных приближений.

Вместо функции z будем, ради упрощения вычислений, рассматривать функцию:

$$(24)\quad w=\frac{z}{\zeta}=\alpha_{-\frac{m}{2}}\zeta^{-\frac{m}{2}}+\ldots+\alpha_{-1}\zeta+\alpha_0+\alpha_1\zeta+\ldots+\alpha_{\frac{m}{2}}\zeta^{\frac{m}{2}}.$$

Проведем в плоскости z луч под углом ϑ. Он пересечет окружности кольца в двух точках P и p, являющихся аффиксами комплексных чисел $e^{i\vartheta}$ и $\rho e^{i\vartheta}$. На контурах L и l им будут соответствовать две точки Q и q. Мы определим их такими же геометрическими элементами как и раньше. Опустим из них перпендикуляры на луч под углом ϑ. Отрезки

перпендикуляра от луча из точек Q и q обозначим соответственно через V и v; отрезки же луча от начала до перпендикуляра обозначим через U и u.

Так как на большой окружности кольца $r=1$, функция w совпадает с $U+iV$:

$$(25)\quad w=U+iV=\alpha_{\frac{m}{2}}e^{-i\frac{m}{2}\vartheta}+\ldots+\alpha_0+\ldots+\alpha_{\frac{m}{2}}e^{i\frac{m}{2}\vartheta}.$$

Иначе будет обстоять дело с точкой q. Там $u+iv=\frac{z}{e^{i\vartheta}}$, тогда как

$$w=\frac{z}{\rho e^{i\vartheta}},$$

и потому

$$(26)\quad w=\frac{u}{\rho}+i\frac{v}{\rho}=\alpha_{-\frac{m}{2}}\rho^{-\frac{m}{2}}e^{-i\frac{m}{2}\vartheta}+\ldots+\alpha_0+\ldots+\alpha_{\frac{m}{2}}\rho^{\frac{m}{2}}e^{i\frac{m}{2}\vartheta}.$$

Отделив в равенствах (25) и (26) вещественную часть от мнимой, будем иметь такую систему уравнений:

$$(27)\quad\begin{cases}U=a_0+\sum_{n=1}^{\frac{m}{2}}[(a_n+a_{-n})\cos n\vartheta-(b_n-b_{-n})\sin n\vartheta],\\ V=b_0+\sum_{n=1}^{\frac{m}{2}}[(b_n+b_{-n})\cos n\vartheta+(a_n-a_{-n})\sin n\vartheta];\end{cases}$$

$$(28)\quad\begin{cases}\frac{u}{\rho}=a_0+\sum_{n=1}^{\frac{m}{2}}[(a_n\rho^n+a_{-n}\rho^{-n})\cos n\vartheta-(b_n\rho^n-b_{-n}\rho^{-n})\sin n\vartheta],\\ \frac{v}{\rho}=b_0+\sum_{n=1}^{\frac{m}{2}}[(b_n\rho^n+b_{-n}\rho^{-n})\cos n\vartheta+(a_n\rho^n-a_{-n}\rho^{-n})\sin\vartheta].\end{cases}$$

Для нахождения зависимостей между коэфициентами a_n и b_n и значениями функций U, V и u, v проводим систему m лучей под углами $\vartheta=\frac{2\pi}{m}$, $2\frac{2\pi}{m}$, $\ldots$ 2π. Обозначим соответствующую систему значений функций U и u через U_n и u_n $(n=1,\ldots m)$. Из первых равенств (27)

и (28) получим уравнения для определения a_n и b_n:

$$(29)\quad U_n = a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left[(a_k + a_{-k}) \cos \frac{2\pi}{m} nk - (b_k - b_{-k}) \sin \frac{2\pi}{m} nk \right].$$

$$\frac{u_n}{\rho} = a_0 +$$

$$(30)\quad + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left[(a_k \rho^k + a_{-k} \rho^{-k}) \cos \frac{2\pi}{m} nk - (b_k \rho^k - b_{-k} \rho^{-k}) \sin \frac{2\pi}{m} nk \right].$$

$$[n = 1, 2, \ldots m]$$

Из (29) уже известным нам способом находим:

$$(31)\quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} U_n = A_0, \\ a_k + a_{-k} = \dfrac{2}{m} \sum_{n=1}^{m} U_n \cos \dfrac{2\pi}{m} nk = A_k, \left[k = 1, 2, \ldots, \dfrac{m}{2} - 1 \right], \\ a_{\frac{m}{2}} + a_{-\frac{m}{2}} = \dfrac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} (-1)^n U_n = A_{\frac{m}{2}}, \\ b_k - b_{-k} = -\dfrac{2}{m} \sum_{n=1}^{m} U_n \sin \dfrac{2\pi}{m} nk = B_k, \left[k = 1, 2, \ldots, \dfrac{m}{2} 1 \right] \end{cases}$$

Совершенно так же из системы равенств (30) следует:

$$(32)\quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\rho m} \sum_{n=1}^{m} u_n = A_0', \\ a_k \rho^k + a_{-k} \rho^{-k} = \dfrac{2}{\rho m} \sum_{n=1}^{m} u_n \cos \dfrac{2\pi}{m} nk = A_k', \left[k = 1, 2, \ldots \dfrac{m}{2} - 1 \right], \\ a_{\frac{m}{2}} \rho^{\frac{m}{2}} + a_{-\frac{m}{2}} \rho^{-\frac{m}{2}} = \dfrac{1}{m\rho} \sum_{n=1}^{m} (-1)^n u_n, \\ b_k \rho^k - b_{-k} \rho^{-k} = -\dfrac{2}{\rho m} \sum_{n=1}^{m} u_n \sin \dfrac{2\pi}{m} nk = B_k', \left[k = 1, \ldots \dfrac{m}{2} - 1 \right]. \end{cases}$$

Три коэфициента: b_0, $b_{\frac{m}{2}}$ и $b_{-\frac{m}{2}}$ не могут быть выражены через значения U_n и u_n. Взяв m достаточно большим, мы можем считать $b_{\frac{m}{2}}$, $b_{-\frac{m}{2}}$ настолько малыми, чтобы они лежали вне пределов взятой точности вычислений, и положить их равными нулю. Для определения же коэффициента b_0 мы используем то условие, что при пре-

образовании точка $\zeta = 1$ должна переходить в точку A' вещественной оси плоскости z. Стало быть, мнимая часть $z(1)$ должна равняться нулю, что дает нам:

$$b_0 = -\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} (b_k + b_{-k}).$$

Пусть теперь нам тем или иным путем удалось установить приближенные значения чисел U_n и u_n.

Так как a_0, найденное из первых двух равенств систем (31) и (32), должно иметь одно и то же значение, получаем:

$$\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} U_n = \frac{1}{\rho m} \sum_{n=1}^{m} u_n,$$

откуда сразу же находится приближенное значение для ρ:

$$(33)\quad \rho = \sum_{n=1}^{m} u_n : \sum_{n=1}^{m} U_n.$$

После того как найдено значение ρ, коэфициенты a_n и b_n находятся уже без затруднений:

$$(34)\quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} U_n = A_0; \quad a_k = \dfrac{A_k \rho^{-k} - A_k'}{\rho^{-k} - \rho^k}; \quad a_{-k} = \dfrac{A_k' - \rho^k A_k}{\rho^{-k} - \rho^k}; \\ b_k = \dfrac{B_k \rho^{-k} - B_k'}{\rho^{-k} - \rho^k}; \quad b_{-k} = \dfrac{\rho^{-k} B_k - B_k'}{\rho^{-k} - \rho^k}. \end{cases}$$

По полученным значениям a_n и b_n находим значения для V_n и v_n:

$$(35)\quad \begin{cases} V_n = b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left[(b_n + b_{-n}) \cos \dfrac{2\pi}{m} nk + (a_n - a_{-n}) \sin \dfrac{2\pi}{m} nk \right], \\ \dfrac{v_n}{\rho} = b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left[(b_n \rho^n + b_{-n} \rho^{-n}) \cos \dfrac{2\pi}{m} nk + \right. \\ \left. + (a_n \rho^n - a_{-n} \rho^{-n}) \sin \dfrac{2\pi}{m} nk \right]. \end{cases}$$

Зная приближенные значения U_n, V_n, u_n, v_n, мы найдем приближенные положения точек $Q_1, \ldots, Q_m, q_1, \ldots, q_m$. Они, вообще говоря, не будут лежать на линиях L и l. Мы их снесем на линии L и l по одному из указанных нами раньше способов; получаем следующие приближения для точек Q_1, q_1. Опускаем из них перпендикуляры на лучи

и определяем новые приближенные значения для U_k и u_k. После этого, если нас не удовлетворяет полученная точность результата, проделываем весь цикл вычислений снова.

Несколько слов о выборе первого приближения. Как и для случая односвязных областей, за начальные значения U_n и u_n мы можем взять радиусы некоторых окружностей, достаточно хорошо в среднем подходящих к кривым L и l. Построить их можно прежним способом: провести лучи и измерить отрезки, которые отсекают на них контуры L и l, и за U_n и u_n взять среднее арифметическое таких отрезков соответственно для L и l. Разумеется можно, как говорилось выше в п° 2, пытаться улучшить полученные значения, взяв среднее арифметическое не для всей кривой L или l, а разбив ее на участки и приняв за значения U_n или u_n для лучей, принадлежащих участку, среднее арифметическое отрезков на этих лучах.

Мы укажем здесь еще один способ нахождения исходных значений. Рассмотрим функцию $\widetilde{z}$, дающую преобразование внутренности кривой L на внутренность окружности. Пусть для этой функции нами найдены значения $\widetilde{w} = \widetilde{U} + i\widetilde{V} = \frac{\widetilde{z}}{\zeta}$. Тогда значения $\widetilde{U}$ для $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{m}n}$ могут быть приняты за $\widetilde{U}_n$; как их строить приближенно, мы знаем из прежнего; разобьем всю кривую на участки между максимумами и минимумами ее расстояния от центра; на каждом луче отложим полусумму расстояний крайних точек участка кривой от начала, из полученных точек описываем окружности радиуса, равного полуразности этих расстояний, и из точек пересечения окружности с L выберем ближайшую к началу координат. Полученные точки и будут искомыми исходными положениями для Q_n.

Совершенно так же за исходные значения для u_n можно принять те, которые будут соответствовать функции, преобразующей внешность круга некоторого радиуса на внешность кривой l. Правило построения остается прежним, только из точек пересечения окружности с кривой l нужно взять ту, которая будет дальше удалена от начала координат. То обстоятельство, что мы здесь имеем не единичную окружность, а радиуса ρ, очевидно не имеет значения.

Прежде чем переходить к примерам, сделаем еще замечание относительно расположения вычислений. По известным U_n комбинации $a_0 = A_0$, $a_k + a_{-k} = A_k$, $b_{-k} - b_k = B_k$ вычисляются совершенно так же, как вычислялись в случае односвязной области a_k, и мы можем употреблять при расчетах те же шаблоны. Вычисление комбинации $a_k\rho^k + a_{-k}\rho^{-k} = A_k'$, $b_{-k}\rho^{-k} - b_k\rho^k = B_k'$ по известным u_k происходит почти по тому же способу; различие заключается лишь в том, что соответствующие тригонометрические суммы мы должны еще поделить на ρ.

После того как найдены A_k, A_k', B_k, B_k', мы можем перейти к определению a_k, a_{-k}, b_k, b_{-k}. Наконец, V_k и $\frac{v_k}{\rho}$ выражаются через комбинации:

$$a_0,\ b_0,\ a_k - a_{-k},\ b_k + b_{-k},\ a_k\rho^k - a_{-k}\rho^{-k},\ b_k\rho^k + b_{-k}\rho^{-k}$$

совершенно так же, как раньше v_k выражались через a_0, b_0, a_k, b_k.

Сообразно с этим, по сравнению с предыдущим, таблица расчета, кроме естественного дублирования в силу наличия двух родов величин U_k и u_k и двух родов коэфициентов, будет содержать лишние разделы, соответствующие разысканию ρ, переходу от A_k, A_k', B_k, B_k' к величинам:

$$C_k = a_k - a_{-k},\ C_k' = a_k\rho^k - a_{-k}\rho^{-k},\ D_k = b_k + b_{-k},$$
$$D_k' = b_k\rho^k + b_{-k}\rho^{-k},$$

входящим в состав V_k и v_k.

Ниже мы приводим в сокращенном виде вычисления, относящиеся к конформному преобразованию квадрата с круговым отверстием на круговое кольцо.

Пусть квадрат отнесен к своим диагоналям. Длину диагонали мы примем равной 1,5. В центре квадрата вырезано круговое отверстие радиуса 0,2.

Область имеет 4 оси симметрии, и преобразующая функция будет поэтому иметь строение:

$$z = \zeta(\ldots + a_{-2}\zeta^{-8} + a_{-1}\zeta^4 + a_0 + a_1\zeta^4 + a_2\zeta^8 + \ldots).$$

Проведем семь лучей $\vartheta = \frac{\pi}{24}, \frac{2\pi}{24}, \ldots, \frac{\pi}{4}$ и построим для них исходные значения для U_k и u_k. Для квадрата мы строим их указанным способом, для окружности же полагаем все их равными радиусу.

Получаем следующую таблицу исходных значений:

$$U_0 = 0{,}750,\ U_1 = 0{,}593,\ U_2 = 0{,}566,\ U_3 = 0{,}544,\ U_4 = 0{,}539,$$
$$U_5 = 0{,}533,\ U_6 = 0{,}530;$$
$$u_0 = u_1 = \ldots = u_6 = 0{,}2.$$

По ним находим уже известным нам путем первые приближения для комбинаций A_k и A_k':

$$A_0 = 0{,}57,\quad A_1 = 0{,}0585,\ A_2 = 0{,}0338,\ A_3 = 0{,}0277,$$
$$A_4 = 0{,}0245,\ A_5 = 0{,}0238,\ A_6 = 0{,}0117,$$
$$A_1' = A_2' = \ldots = A_6' = 0.$$

Таблица вычисления величин:

$$C_k = \frac{A_k(\rho^k + \rho^{-k}) - 2A_k'}{\rho^{-k} - \rho^k}$$

и

$$C_k' = \frac{2A_k - A_k'(\rho^k + \rho^{-k})}{\rho^{-k} - \rho^k}$$

имеет следующий вид:

$$\rho = \frac{\sum u_k}{\sum U_k} = 0{,}351.$$

k	ρ^k	ρ^{-k}	$\rho^{-k}+\rho^k$	$\rho^{-k}-\rho^k$	A_k	A_k'	C_k	C_k'
1	0,351	2,85	3,2	2,50	0,0585	0	0,0468	0,0749
2	0,123	8,13	8,25	8,01	0,0338	0	0,00844	0,0348
3	0,0432	23,2	23,2	23,1	0,0277	0	0,00240	0,0278
4	0,0152	65,8	65,81	65,8	0,0245	0	0,000745	0,0245
5	0,00533	188	188	188	0,0238	0	0,000254	0,0238

По ним находим первые приближения для V_k и v_k:

$V_1 = 0{,}129$, $V_2 = 0{,}0539$, $V_3 = 0{,}0709$, $V_4 = 0{,}0354$, $V_5 = 0{,}0359$;

$v_1 = 0{,}0119$, $v_2 = 0{,}0164$, $v_3 = 0{,}0157$, $v_4 = 0{,}0118$, $v_5 = 0{,}0063$.

После этого наносим на чертеж точки $U_k + iV_k$ и $u_k + iv_k$, сносим их на контуры квадрата и круга и продолжаем вычисления. Приведем без пояснений нахождение второго и третьего приближений.

Второе приближение:

$U_0 = 0{,}750$; $U_1 = 0{,}583$; $U_2 = 0{,}577$; $U_3 = 0{,}546$; $U_4 = 0{,}539$;

$U_5 = 0{,}532$, $U_6 = 0{,}530$; $u_0 = u_1 = \ldots = u_6 = 0{,}2$;

$A_0 = 0{,}570$; $A_1 = 0{,}0578$; $A_2 = 0{,}0312$; $A_3 = 0{,}0240$; $A_4 = 0{,}0235$;

$A_5 = 0{,}0287$; $A_6 = 0{,}0158$;

$A_1' = A_2' = \ldots = A_6' = 0$.

$\rho = 0{,}351$.

k	ρ^k	ρ^{-k}	$\rho^{-k}+\rho^k$	$\rho^{-k}-\rho^k$	A_k	A_k'	C_k	C_k'
1	0,351	2,85	3,2	2,5	0,0578	0	0,0462	0,0740
2	0,123	8,13	8,25	8,01	0,0312	0	0,00779	0,0322
3	0,0432	23,2	23,2	23,1	0,0240	0	0,00208	0,0241
4	0,0152	65,8	65,8	65,8	0,0235	0	0,000715	0,02351
5	0,00533	188	188	188	0,0282	0	0,000301	0,0282

$V_1 = 0{,}123$; $V_2 = 0{,}0472$; $V_3 = 0{,}0782$; $V_4 = 0{,}0322$; $V_5 = 0{,}0269$;

$v_1 = 0{,}115$; $v_2 = 0{,}0162$; $v_3 = 0{,}0156$; $v_4 = 0{,}0119$; $v_5 = 0{,}00630$.

Третье приближение:

$U_0 = 0{,}750$; $U_1 = 0{,}583$; $U_2 = 0{,}578$; $U_3 = 0{,}543$; $U_4 = 0{,}540$;

$U_5 = 0{,}531$; $U_6 = 0{,}530$;

$u_0 = u_1 = \ldots = u_6 = 0{,}2$;

$A_0 = 0{,}569$; $A_1 = 0{,}0573$; $A_2 = 0{,}0300$; $A_3 = 0{,}0223$; $A_4 = 0{,}0223$;

$A_5 = 0{,}0303$; $A_6 = 0{,}0185$;

$A_1' = A_2' = \ldots = A_6' = 0$.

Остановимся на полученных результатах и перейдем к вычислению коэфициентов:

$$a_k = \frac{A_k \rho^{-k} - A_k'}{\rho^{-k} - \rho^k}, \quad a_{-k} = \frac{A_k' - \rho^k A_k}{\rho^{-k} - \rho^k}, \quad \rho = 0{,}3514$$

k	ρ	ρ^{-k}	$\rho^{-k} - \rho^k$	A_k	A_k'	a_k	a_{-k}
0	—	—	—	—	—	0,569	—
1	0,351	2,846	2,50	0,0573	0	0,0654	− 0,00807
2	0,124	8,10	7,97	0,0300	0	0,0305	− 0,000465
3	0,0434	23,04	23,0	0,0223	0	0,0223	− 0,0000421
4	0,0153	65,4	65,3	0,0223	0	0,0223	$-0{,}522 \cdot 10^{-5}$
5	0,0054	185	185	0,0303	0	0,0303	$-0{,}884 \cdot 10^{-6}$
6	0,0019	526	526	0,0185	0	0,0185	$-0{,}669 \cdot 10^{-7}$

Преобразующая функция таким образом будет:[1]

$$z = -\frac{0{,}669 \cdot 10^{-7}}{\zeta^{23}} - \frac{0{,}884 \cdot 10^{-6}}{\zeta^{19}} - \frac{0{,}522 \cdot 10^{-5}}{\zeta^{15}} -$$

$$- \frac{0{,}421 \cdot 10^{-4}}{\zeta^{11}} - \frac{0{,}465 \cdot 10^{-3}}{\zeta^{7}} - \frac{0{,}807 \cdot 10^{-3}}{\zeta^{3}} + 0{,}569\,\zeta +$$

$$+ 0{,}0654\,\zeta^5 + 0{,}0305\,\zeta^9 + 0{,}0223\,\zeta^{13} + 0{,}0223\,\zeta^{17} + 0{,}0303\,\zeta^{21} + 0{,}0185\,\zeta^{25}.$$

§ 8. Функция Грина и конформное преобразование

При решении ряда проблем математической физики, связанных с гармоническими функциями, во многих случаях бывают полезными специальные гармонические функции, которые получили название функций Грина, по имени английского физика, впервые введшего их в употреб-

[1] Приведенный пример заимствован нами из еще не опубликованной работы Б. Ф. Шилова Конформное преобразование двухсвязных областей.

ление. Определение и свойство их существенно зависят от числа измерений пространства. Нас будет интересовать сейчас плоский случай, применительно к нему мы и будем исследовать вопрос.

Пусть в плоскости, отнесенной к координатной системе xoy дана некоторая область B, ограниченная контуром L. Возьмем в ней точку $M_0(x_0, y_0)$. Под функцией Грина для области B с полюсом в M_0 подразумевают функцию $U(x, y; x_0, y_0)$, удовлетворяющую следующим требованиям:

1) U как функция от x, y гармоническая всюду в B за исключением точки M_0;

2) U на контуре L области B обращается в нуль;

3) вблизи точки M_0 U имеет строение

$$U = \ln r + u(x, y),$$

где $u(x, y)$ — функция гармоническая всюду в B, включая и точку M_0, и

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Опираясь на теорему о единственности решения задачи Дирихле, можно показать, что этими требованиями функция Грина определяется вполне.

Построение ее, как это видно из самого определения, сводится к решению частной задачи Дирихле об определении в области B гармонической функции, принимающей на контуре L значения $-\ln r$.

Если область B — односвязна и однолистна, то функция Грина тесно связана с конформным преобразованием ее на единичный круг. Мы установим сейчас, что она есть не что иное как логарифм модуля преобразующей функции.

Действительно, обозначим через $\zeta = \rho e^{i\theta} = f(z)$ функцию, доставляющую конформное преобразование B на круг радиуса, равного 1, плоскости ζ с центром в начале координат так, что z_0 переходит в $\zeta = 0$:

$$f(z_0) = 0.$$

Точка z_0 есть единственный нуль $f(z)$ и отношение $\dfrac{f(z)}{z - z_0} = \psi(z)$ есть функция, регулярная в B и нигде не обращающаяся там в нуль. Логарифм $\psi(z)$ будет, следовательно, регулярной в области B функцией. Обозначим ее через $u + iv$:

$$f(z) = (z - z_0)\, e^{u+iv};\ z - z_0 = re^{i\varphi};$$

отсюда

$$\ln \rho = R\,[\ln f(z)] = \ln r + u,$$

Совершенно ясно, что первому и третьему требованиям, наложенным на функцию Грина, $\ln \rho$ удовлетворяет. Очевидно также, что удовлетворяется и второе, ибо на контуре L $|\zeta|$ по условию должен равняться единице, и поэтому $\ln \rho$ наверное обращается там в нуль.

Для нашего порядка идей скорее важно обратное: именно, если известна функция Грина для однолистной односвязной области B, то можно построить функцию, совершающую конформное преобразование

ее на круг единичного радиуса, правда, с известным произволом, о котором мы скажем несколько слов ниже.

В самом деле, пусть дана $U = \ln r + u(x, y)$. Для каждого слагаемого мы можем определить сопряженную гармоническую функцию. Для $\ln r$ это будет угол φ. Что же касается сопряженной с $u(x, y)$ функции, то она восстановится при помощи хорошо известного криволинейного интеграла:

$$v = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx + c.$$

Функция, дающая требуемое преобразование, при этом будет равна

$$\zeta = re^{i\varphi} e^{u+iv} = (z - z_0)\, e^{u+iv}.$$

Входящее в состав $v(x, y)$ произвольное постоянное слагаемое соответствует вращению круга около центра. Наличие его можно бы было предвидеть заранее, так как функция Грина U определяет лишь соответствие внутренних точек при конформном преобразовании, оставляя совершенно произвольным соответствие направлений в этих точках.

Задача конформного преобразования области B на круг, таким образом, сводится к решению задачи Дирихле при граничном условии:

$$U|_L = -\ln r.$$

§ 9. Приложение интегральных уравнений к конформному преобразованию [1]

n° 1. Интегральное уравнение для преобразования внутренних областей. Мы будем иметь в виду преобразование односвязной области B плоскости z, ограниченной простым контуром L, на единичный круг с центром в начале координат в плоскости $\zeta = \rho e^{i\theta}$.

Известно, что если мы знаем соответствие между точками контура L и окружности единичного круга, т. е. знаем либо ζ как функцию от z на L, либо z как функцию от ζ на окружности, то отображающая функция может быть немедленно найдена, например, при помощи интеграла Коши или иным путем.

Поэтому для решения задачи о конформном преобразовании области B и круга друг в друга достаточно знания лишь упомянутого соответствия.

Для установления его можно прибегнуть к следующему способу.

Отображение будет вполне определенно, если задано соответствие между двумя внутренними и двумя граничными точками области B и круга.

---

[1] При составлении первых n°n° этого параграфа мы воспользовались работой С. А. Гершгорина, опубликованной в „Математическом сборнике" Моск. матем. об-ва, 1933 г.

Будем, ради определенности, предполагать, что некоторая точка z_0 из B переходит в центр $\zeta=0$ и точка z_1 на L переходит в $\zeta=1$.

Обозначим функцию, преобразующую B в круг, через $\zeta=\varphi(z)$ и рассмотрим:

$$F(z)=\ln\zeta=\ln\rho+i\vartheta. \tag{1}$$

В B функция $F(z)$ многозначна и имеет в точке z_0 логарифмическую особенность; на контуре же L, так как здесь $\rho=1$, ее вещественная часть $\ln\rho$ обратится в нуль.

Чтобы сделать $F(z)$ однозначной, мы проведем разрез от z_0 до z_1; на рис. 39 он изображен прямолинейным. В разрезанной области $F(z)$ будет однозначной функцией; ее значения в соответствующих точках $\bar z$ и $\dot z$ на сторонах разреза будут отличаться друг от друга на величину, равную приращению $i\vartheta$ при обходе около z_0, что соответствует обходу вокруг начала координат в плоскости ζ, т. е. на $2\pi i$:

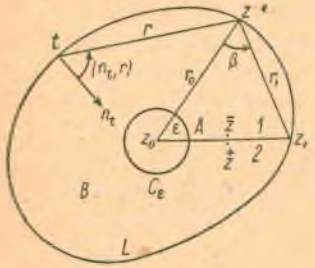


Рис. 39.

$$F^{+}(z)=F^{-}(z)+2\pi i. \tag{2}$$

Построим теперь контур L', состоящий из L, разреза от z_1 до A и малой окружности C_ε радиуса ε около z_0. По теореме Коши:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{F(t)}{t-z}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{F(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{F(t)}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{2-1}\frac{F(t)}{t-z}\,dt.$$

Будем теперь ε уменьшать до нуля. Покажем, что интеграл по окружности C_ε стремится к нулю. В самом деле, как уже говорилось выше, $F(z)$ имеет в z_0 логарифмическую особенность и будет отличаться от $\ln z$ голоморфным слагаемым.

Поэтому всегда можно указать такое число M, чтобы имела место оценка:

$$|F(z)|\leqslant M\ln\varepsilon.$$

Отсюда вытекает, так как $|t-z|$ не меньше некоторого $\delta>0$:

$$\left|\int_{C_\varepsilon}\frac{F(t)}{t-z}\,dt\right|\leqslant\frac{2\pi M}{\delta}\varepsilon\ln\varepsilon\to 0.$$

Далее, по положительной стороне разреза мы интегрируем от z_1 до A, по отрицательной же в противоположном направлении. В силу (2), интегралы, содержащие $F(z)$, сократятся, и останется лишь интеграл

от $2\pi i$ от z_1 до A, и после предельного перехода мы будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-1}\frac{F(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{z_1}^{z_0}\frac{2\pi i}{t-z}\,dt=-\ln\frac{z_1-z}{z_0-z}.$$

Наконец, если принять во внимание, что на контуре L $F(z)=i\vartheta$, получим:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\vartheta\,dt}{t-z}-\ln\frac{z_1-z}{z_0-z}. \tag{3}$$

Перепишем этот результат в иной форме. Положим $dt=e^{i\alpha}d\sigma$; здесь $d\sigma$ — элемент длины дуги кривой, отсчитываемой от некоторой точки, и α — угол, образуемый касательной к L в точке t с осью x.

$$t-z=re^{i\varphi};\ z_0-z=r_0e^{i\varphi_0};\ z_1-z=r_1e^{i\varphi_1},$$

$$\beta=\varphi_1-\varphi_0.$$

β — угол, под которым виден отрезок z_0z_1 из точки z, при этом отсчет угла идет от z_0 к z_1. Назовем далее через (n_t, r) угол между внутренней нормалью n_t к контуру L в точке t и r; отсчет угла будем делать от n_t к r. Очевидно:

$$\alpha-\varphi=\frac{\pi}{2}-(n_t, r).$$

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\vartheta e^{\frac{\pi i}{2}}e^{-i(n_t r)}}{r}\,d\sigma-\ln\frac{r_1}{r_0}-\beta i= \tag{4}$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int_L\frac{\vartheta e^{-i(n_t, r)}}{r}\,d\sigma-\ln\frac{r_1}{r_0}-\beta i.$$

Если же отделить здесь вещественную часть от мнимой, найдем:

$$\ln\rho=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\vartheta\sin(n_t, r)}{r}\,d\sigma-\ln\frac{r_1}{r_0}.$$

$$\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\vartheta\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma-\beta. \tag{5}$$

Из полученных формул видно, что если известны граничные значения функции ϑ, то $\ln\rho$ найдется сразу же.

Пользуясь вторым уравнением, можно легко построить интегральное уравнение для предельных значений ϑ.

Будем точку z приближать к точке контура, соответствующей длине дуги s. Интеграл, стоящий в правой части равенства, представляет потенциал двойного слоя с плотностью ϑ. Природа этой функции хорошо

изучена, и мы поэтому не входим в исследование предельного значения ее на границе области, отсылая читателя к специальным руководствам по математической физике или теории дифференциальных уравнений.[1] Мы приведем здесь без доказательства наглядный по своему геометрическому содержанию результат: при приближении z к контуру L изнутри, упомянутый интеграл стремится к

$$\int \frac{\vartheta(\sigma)\cos(n_t, r)}{r} d\sigma + \pi\vartheta(s),$$

если s не угловая точка; если же s — угловая точка, то второй член должен быть заменен на $(2\pi - \delta)\vartheta(s)$, где δ — внутренний угол области в точке s. Ниже нам потребуется знать, что при приближении к контуру L извне потенциал двойного слоя будет стремиться к

$$\int_L \frac{\vartheta(\sigma)\cos(n_t, r)}{r} d\sigma - \pi\vartheta(s);$$

если s — угловая точка, то второй член должен быть заменен на $\delta\vartheta(s)$. В обоих случаях интегральный член равен значению потенциала в точке контура с координатой s.

Подставив это выражение во второе равенство (5), мы придем к заключению, что $\vartheta(s)$ должно быть решением следующего интегрального уравнения второго рода типа Фредгольма:

$$\vartheta(s) = \int K(s, \sigma)\vartheta(\sigma)\, d\sigma - 2\beta(s), \tag{6}$$

$$K(s, \sigma) = \frac{1}{\pi}\frac{\cos(n_t, r)}{r}.$$

Для угловой точки это уравнение должно быть заменено следующим:

$$\frac{\delta}{\pi}\vartheta(s) = \int_L K(s, \sigma)\vartheta(\sigma)\, d\sigma - 2\beta(s). \tag{6'}$$

Уравнение (6) является частным случаем уравнения:

$$\vartheta(s) = \lambda\int_L K(s, \sigma)\vartheta(\sigma)\, d\sigma - 2\beta(s) \tag{7}$$

при $\lambda = 1$, которое будет для этого уравнения как раз собственным числом. В самом деле, до настоящего времени мы воспользовались в своих рассуждениях лишь тем, что точка z_0 переходит в центр круга, однако нигде не установили еще соответствия между двумя точками на границах преобразуемых областей, допуская этим самым вращение круга около начала координат, что отвечает прибавлению к $\vartheta(s)$ произвольной постоянной. Решение уравнения (6) поэтому наверное должно быть определено с точностью до постоянного слагаемого, что может быть только тогда, если 1 есть собственное число и однородное уравнение

$$\vartheta(s) = \int_L K(s, \sigma)\vartheta(\sigma)\, d\sigma$$

имеет произвольную постоянную своим решением, в чем убедиться не представляет труда, так как

$$\int_L K(s, \sigma)\, d\sigma = 1.$$

Это легко проверить, ибо написанный выше интеграл отличается от интеграла Гаусса для плоскости лишь множителем $\frac{1}{\pi}$. Можно показать, что однородное уравнение не имеет решения, отличного от постоянного.

Интегральное уравнение (6) может иметь, следовательно, решение в том и только в том случае, когда свободный член его — $2\beta(s)$ будет ортогонален ко всякому решению союзного однородного уравнения:

$$\mu(s) = \int_L K(\sigma, s)\mu(\sigma)\, d\sigma.$$

Мы предоставим читателю убедиться в этом непосредственными вычислениями и будем принимать существование решения как очевидный факт, являющийся простым следствием теоремы Римана о существовании функции, совершающей нужное нам конформное преобразование.

Задача о разыскании функции $\vartheta(s)$, удовлетворяющей соотношению (6), становится вполне определенной, если задать начальное значение для $\vartheta(s)$, например:

$$\vartheta(0) = 0.$$

№ 2. Замечания о решении интегрального уравнения и приближенном построении отображающей функции. Приближенное решение нашего интегрального уравнения может быть проведено по одному из развитых выше в главе II методов, куда мы и отсылаем читателя для ознакомления с ними.

Мы сделаем сейчас еще два замечания, могущие оказаться полезными в практических выкладках.

Выражение

$$\frac{\cos(n_t, r)}{r} d\sigma$$

имеет непосредственное геометрическое значение. Оно равно углу, под которым из точки s виден элемент длины дуги $d\sigma$. Будем обозначать угол между касательной к кривой L в точке s, направленной в сторону возрастания дуги, и r через $\omega(s, \sigma)$; тогда:

$$\int_L K(s, \sigma)\vartheta(\sigma)\, d\sigma$$

[1] См. Э. Гурса, Курс математического анализа, т. III, вып. I, или Кошляков Н. С. Основные дифференциальные уравнения математической физики.

будет равен интегралу

$$\frac{1}{\pi}\int_L \vartheta(\sigma)\,d\omega,$$

взятому по всей кривой L, и интегральное уравнение примет вид:

$$8)\qquad \vartheta(s)=\frac{1}{\pi}\int_L \vartheta(\sigma)\,d\omega-2\beta(s).$$

Последняя форма уравнения особенно важна в том отношении, что она по своему строению гораздо проще, чем (6). Когда требуемая точность допускает графические расчеты, величина ω может быть весьма легко снята с чертежа. Совершенно так же с чертежа может быть снят и угол β, равный углу, под которым виден из точки s отрезок z_0z_1, в направлении от z_0 к z_1.[1]

Пусть тем или иным путем мы свели задачу о решении интегрального уравнения к задаче о решении системы алгебраических линейных уравнений.

В силу того, что решение исходной проблемы не единственно, полученная алгебраическая система будет либо неопределенной, либо иметь определитель, близкий к нулю. К ней мы должны присоединить еще условие, фиксирующее начальное значение для ϑ : $\vartheta(0)=0$.

Например, если мы заменяем интеграл конечной суммой, то в полученной системе уравнений

$$\vartheta(s_i)=\sum_{j=1}^{n}{}'K(s_i,s_j)\,\vartheta(s_j)-2\beta(s_i),\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

мы можем выпустить одно из уравнений и к остальным присоединить дополнительное уравнение:

$$\sum_{j=1}^{n}{}'K(0,s_j)\,\vartheta(s_j)-2\beta(0)=0.$$

Наконец, если область имеет m осей симметрии, то, по совершенно понятным соображениям, число уравнений из-за симметрии значений $\vartheta(s)$, должно уменьшиться в $m+1$ раз.

Решив интегральное уравнение, мы найдем соответствие между точками контура L и окружности $|\zeta|=1$ в виде зависимости центрального угла ϑ от длины дуги s контура L. Пользуясь ею, мы сможем построить либо функцию, преобразующую область B на круг, либо наоборот функцию, преобразующую круг на область.

В первом случае для построения $F(z)$ можно воспользоваться, например, равенством (3). Интеграл, стоящий в правой части его, может

[1] Все это будет иметь силу для всех интегральных уравнений, с которыми мы встретимся ниже.

быть приближенно вычислен по одному из известных способов, например, путем замены его суммой:

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\vartheta_k\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\vartheta_k\ln\frac{t_{k+1}-z}{t_k-z}.$$

Наоборот, пусть нам нужно найти обратную функцию, преобразующую круг на область. Тогда мы можем воспользоваться сопряженными тригонометрическими рядами. Представим приближенно координаты x и y точек контура L, пользуясь установленной нами зависимостью между s и ϑ, хотя бы графически в форме функций от ϑ. Возьмем первую из них x и представим ее приближенно тригонометрическим полиномом:

$$x=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\cos\nu\vartheta+b_\nu\sin\nu\vartheta.$$

В силу сопряженности x и y мы должны иметь

$$y=\sum_{\nu=0}^{n}-b_\nu\cos\nu\vartheta+a_\nu\sin\nu\vartheta$$

и

$$z=x+iy=\sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu-ib_\nu)\,e^{i\nu\vartheta}.$$

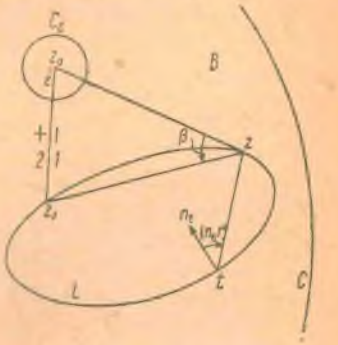


Рис. 40.

Для проверки вычислений можно найти несколько коэффициентов для y обычным путем и сравнить их с написанными выше.

n° 3. Интегральное уравнение для преобразования внешних областей. Обратимся сейчас к случаю преобразования области B, внешней по отношению к контуру L плоскости z, на внешность единичного круга плоскости ζ. Пусть при преобразовании (рис. 40) точка z_0 внутри области B переходит в бесконечно далекую точку плоскости ζ, и точка z_1 контура L — в $\zeta=1$. Подобно предыдущему нам удобно рассмотреть не самую функцию ζ, совершающую требуемое преобразование, а ее логарифм $\ln\zeta=\ln\rho+i\vartheta$. Чтобы установить интегральное уравнение для ϑ в разбираемом случае, построим контур L', состоящий из данной кривой L, разреза, идущего из z_1 к z_0, малой окружности C_ε около z_0 и окружности C большого радиуса R.

Внутри L' $\ln\zeta=F(z)$ будет регулярной и однозначной функцией:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{F(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{F(t)}{t-z}\,dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{F(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{F(t)}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{z-1}\frac{F(t)}{t-z}\,dt.$$

Так как вблизи точки z_0 $\zeta(z)$ имеет строение $\zeta(z)=\frac{a}{z-z_0}+$голоморфная функция, то на окружности C_ε радиуса ε около z_0 справедлива оценка $|F(x)|\leq M\ln\varepsilon$, и следовательно:

$$\left|\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{F(t)}{t-z}\,dt\right|\leq\frac{2\pi M}{\min|t-z|}\varepsilon\ln\varepsilon\to 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0.$$

Далее, в области бесконечно далекой точки плоскости функция $\zeta(z)$ голоморфна и может быть там разложена в ряд вида:

$$\zeta(z)=\zeta_\infty\left(1+\frac{\alpha}{z}+\ldots\right),\quad F(z)=\ln\zeta_\infty+\frac{\beta}{z}+\ldots;$$

Множитель $\frac{1}{t-z}$ имеет там представление:

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t}+\frac{z}{t^2}+\ldots$$

Поэтому

$$\frac{F(t)}{t-z}=\frac{\ln\zeta_\infty}{t}+\frac{\gamma}{t^2}+\ldots$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{F(t)}{t-z}\,dt=\ln\zeta_\infty.$$

Обходу около точки z_0 со стороны *2* разреза к стороне *1* соответствует обход бесконечно далекой точки плоскости ζ в положительном направлении, и стало быть:

$$F(z)=F(z)+2\pi i.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-1}\frac{F(t)}{t-z}\,dt=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{z_1}^{z_0}\frac{2\pi i}{t-z}\,dt=\ln\frac{z_1-z}{z_0-z}.$$

Наконец, ввиду того что на контуре L $F(z)=i\vartheta$, получаем:

$$F(z)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_L\frac{\vartheta\,dt}{t-z}+\ln\frac{z_1-z}{z_0-z}+\ln\zeta_\infty.$$

Если положить теперь $\zeta_\infty=\rho_\infty e^{i\vartheta_\infty}$, а в остальном сохранить старые обозначения, то мы будем иметь:

$$(9)\qquad F(z)=-\frac{i}{2\pi}\int\limits_L\frac{\vartheta e^{-i(n_t,\,r)}}{r}\,d\sigma+\ln\frac{r_1\rho_\infty}{r_0}\,e^{i(\beta+\vartheta_\infty)}.$$

Отделяя вещественную часть от мнимой, найдем:

$$(9')\qquad\begin{cases}\ln\rho=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_L\frac{\vartheta\sin(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma+\ln\frac{r_1\rho_\infty}{r_0},\\ \vartheta=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_L\frac{\vartheta\cos(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma+\beta+\vartheta_\infty.\end{cases}$$

β имеет здесь то же значение, что и в n° 1—это есть угол, под которым виден из точки z отрезок z_0z_1, отсчитываемый от z_0 к z_1.

Будем приближать точку z к точке s контура L. Предел, к которому стремится интеграл $\int\limits_L\frac{\vartheta\cos(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma$, так как мы приближаемся к контуру L извне, будет равен:

$$-\pi\vartheta(s)+\int\limits_L\frac{\vartheta\cos(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma.$$

В пределе получим следующее интегральное уравнение для $\vartheta(s)$:

$$(10)\qquad\vartheta(s)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_L\frac{\vartheta\cos(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma+2[\beta(s)+\vartheta_\infty].$$

Оно будет частным случаем уравнения:

$$(11)\qquad\vartheta(s)=\lambda\int\limits_L K(s,\,\sigma)\,\vartheta(\sigma)\,d\sigma+2[\beta(s)+\vartheta_\infty],$$

где $K(s,\,\sigma)$ имеет прежнее значение, при значении параметра $\lambda=-1$, не являющегося его собственным числом, и имеет поэтому единственное решение.

В правой части его входит неизвестная нам величина ϑ_∞, равная аргументу той точки, которая соответствует бесконечно далекой точке плоскости ζ. Изменению ϑ_∞ соответствует поворот всей плоскости ζ около начала координат. [1] Мы раньше делали конформное преобразование определенным, устанавливая соответствие между точкой контура L и точкой окружности $|\zeta|=1$. Того же можно однако достигнуть, задавая значение ϑ_∞. При решении уравнения (11) поэтому мы можем выбирать ϑ_∞ по произволу.

После того как найдена $\vartheta(s)$, функцию, совершающую преобразование внешности кривой на внешность окружности, можно искать при-

[1] Это видно и из уравнения (11), так как при изменении ϑ_∞ на некоторое число, в силу $\int\limits_L\frac{\cos(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma=\pi$, $\vartheta(s)$ изменится на столько же.

ближенно, либо пользуясь формулами (9), либо прибегая к интерполяции при помощи рациональных функций.

Перейдем теперь к случаю, когда бесконечно далекая точка плоскости z переходит в бесконечно далекую же точку плоскости ζ. Совершенно ясно, что здесь мы имеем дело с предельным случаем разбиравшейся нами в начале этого n° задачи, когда z_0 плоскости z, переходящая при отображении в точку $\zeta = \infty$, удаляется на бесконечность.

Соответствующее нашему случаю интегральное уравнение может быть поэтому получено предельным переходом из прежнего уравнения.

Будем в равенстве (9) удалять z_0 на бесконечность вдоль какого-нибудь направления. Читатель, внимательно следящий за изложением, без затруднения увидит из дальнейшего, что выбор этого направления ни в какой мере не отразится на результате; изменение в выборе направления будет компенсировано изменением предела ϑ_∞. То же, впрочем, ясно и из того обстоятельства, что в пределе мы должны всегда получить одну и ту же функцию $F(z)$, независимо от направления удаления z_0 на ∞. Интегральный член правой части равенства (9) никоим образом не связан с выбором точки z_0 и не изменится при предельном переходе. Выбор z_0 влияет только на свободный член:

$$\ln r_1 \frac{\rho_\infty}{r_0} e^{i(\beta+\vartheta_\infty)}.$$

Число r_1, являющееся модулем z_1, остается неизменным. Будут меняться лишь r_0, ρ_∞ и $\beta+\vartheta_\infty$; первые две из этих величин будут стремиться к ∞. Предел их отношения, — мы не входим в исследование его существования, — обозначим через C:

$$\frac{\rho_\infty}{r_0} \to C.$$

Находить его для нас бесполезно, ибо в окончательное уравнение C не войдет. β будет стремиться к углу, под которым видна из z полупрямая, идущая из z_1, в бесконечность в избранном нами направлении, отсчитываемом от ∞ до z_1. Предел, к которому стремится ϑ_∞, мы назовем ψ.

После предельного перехода (9) примет следующую форму:

$$F(z) = -\frac{i}{2\pi}\int_L \frac{\vartheta e^{-i(n_t,\, r)}}{r}\, d\sigma + \ln r_1 C e^{i(\beta+\psi)}.$$

Разделение вещественной и мнимой частей приводит к равенствам:

$$\ln\rho = -\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\vartheta \sin(n_t,\, r)}{r}\, d\sigma + \ln r_1 C,$$

$$\vartheta = -\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\vartheta \cos(n_t,\, r)}{r}\, d\sigma + \beta + \psi.$$

Поэтому интегральное уравнение для $\vartheta(s)$, получающееся в результате устремления z на контур L, примет вид:

$$\vartheta(s) = -\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\vartheta(\sigma)\cos(n_t,\, r)}{r}\, d\sigma + 2[\beta(s)+\psi]. \tag{12}$$

Оно имеет то же строение, что и (10). В правой части его содержится неизвестная величина ψ. Изменению ее соответствует, как можно видеть, вращение внешности окружности $|\zeta| = 1$ около бесконечности и вместо того, чтобы делать конформное преобразование определенным, устанавливая соответствие между точками z_1 и $\zeta = 1$, мы можем задать некоторое произвольное значение для ψ, положив его, например, равным нулю.

После нахождения $\vartheta(s)$ дальнейшее уже не представляет затруднений. Пусть, например, нам нужно преобразовать область $|\zeta| \geqslant 1$ на внешность контура L. Координаты x и y L находим как функции $x(\vartheta)$, $y(\vartheta)$ угла ϑ. Представляем первую из них приближенно тригонометрическим полиномом.

$$x(\vartheta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta.$$

В разложении же для $y(\vartheta) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cos k\vartheta + d_k \sin k\vartheta$ находим только два первых члена, т. е. вычисляем коэфициенты c_0, c_1, d_1.

Преобразующая функция тогда будет:

$$z = \alpha_{-1}\zeta + \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\zeta^k},$$

где

$$\alpha_{-1} = \frac{a_1+d_1}{2} + i\,\frac{c_1-b_1}{2};\quad \alpha_0 = a_0 + ic_0,$$

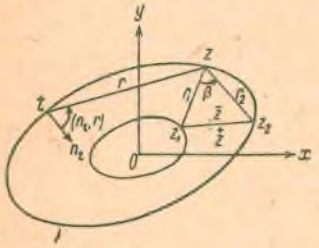
$$\alpha_1 = \frac{a_1-d_1}{2} + i\,\frac{b_1+c_1}{2};\quad \alpha_k = a_k + ib_k,\ k \geqslant 2.$$

n° 4. Преобразование двухсвязной области на круговое кольцо. Такой же порядок идей, что и в предшествующих n°n°, может быть применен к построению функции, преобразующей область между двумя кривыми L_2 и L_1, на кольцо между двумя концентрическими окружностями радиусов ρ_1, ρ_2.

Отношение радиусов окружностей кольца $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ вполне определенно, если заданы контуры L_1, L_2 и функция $\zeta(z)$, совершающая преобразование, определяется при известном ρ_2 с точностью до вращения кольца около центра $\zeta = 0$, т. е. с точностью до множителя $e^{i\varphi}$. Чтобы сде-

лать задачу определенной, мы установим соответствие между точкой z_2 одного из контуров, например, L_2, и точкой $\zeta = \rho_2$ соответствующей ему окружности.

Рассмотрим функцию $F(z) = \ln \zeta$; она не будет однозначной в B, ибо обходу по кольцу в положительном направлении будет соответствовать прибавление к $F(z)$ слагаемого $2\pi i$. Проведем разрез между точками z_1 и z_2 контуров L_1 и L_2 и к полученной области применим теорему Коши:



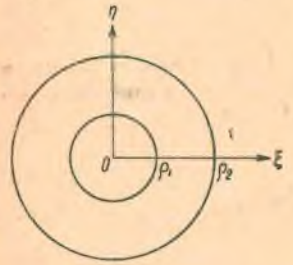


Рис. 41.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{F(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{F(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{1-2}\frac{F(t)}{t-z}\,dt.$$

Последний интеграл правой части берется по положительной стороне разреза от z_2 к z_1, и затем по отрицательной стороне от z_1 к z_2. Так как $F(\overset{+}{z}) = F(\overset{-}{z}) + 2\pi i$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-2}\frac{F(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_2}^{z_1}\frac{2\pi i}{t-z}\,dt = -\ln\frac{z_2-z}{z_1-z}.$$

С другой стороны, на L_2 $F(t) = \ln \rho_2 + i\vartheta_2$; поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{F(t)}{t-z}\,dt = \ln\rho_2 + \frac{1}{2\pi}\int_{L_2}\frac{\vartheta_2}{t-z}\,dt.$$

На L_1 $F(z) = \ln\rho_1 + i\vartheta_1$ и так как z лежит вне контура L_1, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{F(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{L_1}\frac{\vartheta_1}{t-z}\,dt.$$

Следовательно:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{L_2}\frac{\vartheta_2}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\vartheta_1}{t-z}\,dt - \ln\frac{z_2-z}{z_1-z} + \ln\rho_2. \tag{13}$$

Введя, как раньше, обозначения: $dt = e^{\alpha i}\,d\sigma$, $t - z = re^{i\varphi}$, $z_1 - z = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 - z = r_2 e^{i\varphi_2}$, $\varphi_2 - \varphi_1 = \beta$, причем, напоминаем, β — угол, под которым

из точки z виден отрезок z_1z_2 в направлении от z_1 к z_2, получим, после разделения вещественной и мнимой частей:

$$\begin{cases} \ln\rho = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{L_2}\frac{\vartheta_2\sin(n_t, r)}{r}\,d\sigma - \\ \quad - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{L_1}\frac{\vartheta_1\sin(n_t, r)}{r}\,d\sigma - \ln\frac{r_2}{r_1\rho_2}, \\ \vartheta = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{L_2}\frac{\vartheta_2\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma - \\ \quad - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{L_1}\frac{\vartheta_1\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma - \beta. \end{cases} \tag{14}$$

Будем сейчас приближать точку z к контуру L_2. Первое слагаемое в уравнении для ϑ будет стремиться к пределу, уже упоминавшемуся раньше:

$$\frac{1}{2}\vartheta(s) + \frac{1}{2\pi}\int_{L_2}\frac{\vartheta_2(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma,$$

остальные же члены равенства будут либо непрерывными функциями около L_2, либо иметь очевидный предел.

Немного иначе будет обстоять дело, когда мы приближаемся к внутреннему контуру L_1. Первое слагаемое правой части будет непрерывной функцией вблизи L_1, что же касается интеграла

$$\int_{L_1}\frac{\vartheta_1\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma,$$

то, ввиду того что мы стремимся здесь к контуру L_1 извне, его предельное значение будет:

$$\int_{L_1}\frac{\vartheta_1(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma - \pi\vartheta(s).$$

Приняв это во внимание, мы для значений ϑ_1 и ϑ_2 аргумента ζ на контурах L_1 и L_2 получим следующую систему интегральных урав-

нений:

$$(15)\quad \begin{cases} \vartheta_1(s) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{L_2} \frac{\vartheta_2(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\, d\sigma - \\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{L_1} \frac{\vartheta_1(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\, d\sigma - 2\beta_1(s), \\ \vartheta_2(s) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{L_2} \frac{\vartheta_2(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\, d\sigma - \\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{L_1} \frac{\vartheta_1(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\, d\sigma - 2\beta_2(s), \end{cases}$$ [1]

первое из которых относится к контуру L_1, и второе — к контуру L_2.

Полученная система неопределенна, и из нее функции $\vartheta_1(s)$ и $\vartheta_2(s)$ найдутся только с точностью до одного и того же для обеих функций произвольного постоянного слагаемого, соответствующего вращению кольца между окружностями около центра на произвольный угол. Чтобы сделать решение системы единственным, мы должны еще воспользоваться соответствием пары точек на границах преобразуемых областей. Для аргумента ϑ это равносильно заданию начального значения для одной из функций $\vartheta_1(s)$ или $\vartheta_2(s)$.

Методы решения систем уравнений — те же, что и одного уравнения, и на них мы не останавливаемся здесь, отсылая читателя к главе II.

Пусть тем или иным путем нам удалось найти $\vartheta_1(s)$ и $\vartheta_2(s)$. Для установления соответствия точек между контурами преобразуемой области и кольца нам необходимо еще определить радиусы ρ_1 и ρ_2 кольца.

Один из них, например, ρ_2, можно взять произвольным.

Для определения ρ_1 можно воспользоваться первым уравнением (14), переводя в нем точку z на контур L_1:

$$\ln\rho_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{L_2} \frac{\vartheta_2 \sin(n_t, r)}{r}\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_{L_1} \frac{\vartheta_1 \sin(n_t, r)}{r}\, d\sigma - \ln\frac{r_2}{r_1\rho_2}.$$

[1] Если s есть угловая точка контура L_1 и δ_1, внешний угол его (внутренний угол области) в этой точке, то левая часть первого уравнения системы должна быть заменена на $\frac{\delta_1}{\pi}\vartheta_1(s)$. Для второго же уравнения, если δ_2 — внутренний угол L_2 (вновь внутренний угол области), то в левой части второго уравнения опять должно стоять

$$\frac{\delta_2}{\pi}\vartheta_2(s).$$

Само собой разумеется, второй интеграл правой части должен пониматься в смысле его главного значения.

Левая часть (14) стремится всегда к $\ln\rho_1$, к какой бы точке s контура L мы ни приближались, и в практических вычислениях можно пользоваться этим упрощающим обстоятельством, выбирая каждый раз наиболее удобную в смысле простоты вычисления точку контура.

После нахождения ρ_1 по формулам (14) мы восстановим логарифм отображающей функции.

Знание $\vartheta_1(s)$ и $\vartheta_2(s)$ позволяет определить зависимость точек контуров L_1 и L_2 от полярного угла ϑ.

Преобразующая функция представима в кольце рядом Лорана:

$$z = \zeta\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu\zeta^\nu, \qquad a_\nu = a_\nu + ib_\nu.$$

При вычислениях в некоторых отношениях более удобно рассматривать не функцию z, а отношение:

$$w = \frac{z}{\zeta} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu\zeta^\nu.$$

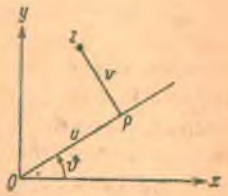


Рис. 42.

Проведем в плоскости z луч (черт. 42) под углом ϑ к вещественной оси и из точки z опустим перпендикуляр на него. Отрезок $u = OP$, взятый со знаком $+$, если P лежит на положительной части луча, и со знаком — в противном случае, деленный на ρ, будет равен вещественной части w; длина перпендикуляра $v = Pz$, взятая со знаком $+$ или —, смотря по тому, будет ли лежать z слева или справа от положительного направления луча, деленная на ρ, даст мнимую часть w:

$$u + iv = ze^{-i\vartheta}, \quad w = \frac{u+iv}{\rho}.$$

Пусть мы нашли каким-нибудь путем зависимость u и v от ϑ. Разделим вещественную и мнимую части в w:

$$\frac{u}{\rho} = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\rho^\nu a_\nu + \rho^{-\nu}a_{-\nu})\cos\nu\vartheta + (\rho^{-\nu}b_{-\nu} - \rho^\nu b_\nu)\sin\nu\vartheta,$$

$$\frac{v}{\rho} = b_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\rho^\nu b_\nu + \rho^{-\nu}b_{-\nu})\cos\nu\vartheta + (\rho^\nu a_\nu - \rho^{-\nu}a_{-\nu})\sin\nu\vartheta.$$

Переходя в этих равенствах на контуры L_1 и L_2, мы получим разложения значений u_1 и u_2 в тригонометрические ряды:

$$\frac{u_1}{\rho_1} = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\rho_1^{\nu} a_\nu + \rho_1^{-\nu} a_{-\nu}) \cos \nu\vartheta + (\rho_1^{-\nu} b_{-\nu} - \rho_1^{\nu} b_\nu) \sin \nu\vartheta,$$

$$\frac{u_2}{\rho_2} = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\rho_2^{\nu} a_\nu + \rho_2^{-\nu} a_{-\nu}) \cos \nu\vartheta + (\rho_2^{-\nu} b_{-\nu} - \rho_2^{\nu} b_\nu) \sin \nu\vartheta.$$

Аналогично для v_1 и v_2.

a_0 находится дважды как свободный член обоих рядов

$$a_0 = \frac{1}{2\pi\rho_1} \int_0^{2\pi} u_1 d\vartheta = \frac{1}{2\pi\rho_2} \int_0^{2\pi} u_2 d\vartheta,$$

откуда определяется отношение радиусов кольца:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\int_0^{2\pi} u_1 d\vartheta}{\int_0^{2\pi} u_2 d\vartheta}.$$

Вычисление дальнейших коэфициентов приводит нас к следующей системе уравнений для a_ν и b_ν:

$$\rho_1^{-\nu} a_{-\nu} + \rho_1^{\nu} a_\nu = \frac{1}{\pi\rho_1} \int_0^{2\pi} u_1 \cos \nu\vartheta d\vartheta,$$

$$\rho_2^{-\nu} a_{-\nu} + \rho_2^{\nu} a_\nu = \frac{1}{\pi\rho_2} \int_0^{2\pi} u_2 \cos \nu\vartheta d\vartheta,$$

$$\rho_1^{-\nu} b_{-\nu} - \rho_1^{\nu} b_\nu = \frac{1}{\pi\rho_1} \int_0^{2\pi} u_1 \sin \nu\vartheta d\vartheta,$$

$$\rho_2^{-\nu} b_{-\nu} - \rho_2^{\nu} b_\nu = \frac{1}{\pi\rho_2} \int_0^{2\pi} u_2 \sin \nu\vartheta d\vartheta,$$

составление которой требует применения лишь хорошо известных методов гармонического анализа. Из этих уравнений найдутся все коэфициенты, за исключением b_0. Последний определяется как свободный член разложений $\frac{v_1}{\rho_1}$ и $\frac{v_2}{\rho_2}$:

$$b_0 = \frac{1}{2\pi\rho_1} \int_0^{2\pi} v_1 dv = \frac{1}{2\pi\rho_2} \int_0^{2\pi} v_2 d\vartheta$$

Для нахождения b_0 можно воспользоваться также соответствием точек контуров. Пусть известно, что точка $\zeta = \rho_2$ переходит в

$$z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2 \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (a_\nu + ib_\nu) \rho_2^{\nu}.$$

Приравнивая мнимые части, найдем:

$$b_0 = \frac{y_2}{\rho_2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} (b_\nu \rho_2^{\nu} + b_{-\nu} \rho_2^{-\nu}).$$

Преобразование на кольцо $\rho_1 < |\zeta| < \rho_2$ двухсвязной области в том случае, когда она содержит внутри себя бесконечно далекую точку, производится аналогичным способом. Контуры области мы вновь будем означать через L_1 и L_2.

Проведем разрез между точками z_1 и z_2 контуров и опишем окружность C большого радиуса R (черт. 43). В полученной области $\ln \zeta = F(z)$ будет однозначной и регулярной функцией. По формуле Коши:

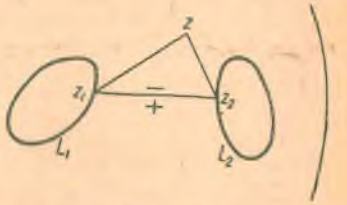


Рис. 43.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_C \frac{F(t)}{t-z} dt - \int_{L_1} \frac{F(t)}{t-z} dt - \int_{L_2} \frac{F(t)}{t-z} dt + \int_{1-2} \frac{F(t)}{t-z} dt \right\}.$$

Так как здесь опять

$$F(\overset{+}{z}) = F(\overset{-}{z}) + 2\pi i,$$

то

$$\int_{1-2} \frac{F(t)}{t-z} dt = -2\pi i \ln \frac{z_2 - z}{z_1 - z}.$$

Рассмотрим интеграл по окружности C. В области бесконечно далекой точки ζ имеем разложение:

$$\zeta = \zeta_\infty \left(1 + \frac{C_1}{\zeta} + \dots\right),$$

откуда

$$F(z) = \ln \zeta = \ln \zeta_\infty + \frac{c}{z} + \dots$$

и так как

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \dots$$

то

$$\int_C \frac{F(t)}{t-z} dt = 2\pi i \ln \zeta_\infty.$$

Наконец, ввиду того что точка z лежит вне обоих контуров, интегралы по ним от $\ln \rho_1$ и $\ln \rho_2$ обратятся в нуль, и мы будем иметь:

$$F(z) = \ln \zeta_\infty - \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{\vartheta_1}{t-z}\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{L_2} \frac{\vartheta_2}{t-z}\, dt - \ln \frac{z_2 - z}{z_1 - z}.$$

Разделение вещественной и мнимой частей приводит к уравнениям:

$$\ln \rho = \ln \rho_\infty - \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{\vartheta_1 \sin (n_t, r)}{r}\, ds - \frac{1}{2\pi} \int_{L_2} \frac{\vartheta_2 \sin (n_t, r)}{r}\, ds - \ln \frac{r_2}{r_1},$$

$$\vartheta = \vartheta_\infty - \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{\vartheta_1 \cos (n_t, r)}{r}\, ds - \frac{1}{2\pi} \int_{L_2} \frac{\vartheta_2 \cos (n_t, r)}{r}\, ds - \beta$$

и, наконец, предельный переход, когда z стремится к точкам контуров L_1 и L_2 во втором из них, приводит к следующей системе интегральных уравнений для $\vartheta_1(s)$ и $\vartheta_2(s)$;

$$\text{на } L_1: \quad \vartheta_1(s) = 2[\vartheta_\infty - \beta_1(s)] - \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\vartheta_1 \cos (n_t, r)}{r}\, ds - \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{\vartheta_2 \cos (n_t, r)}{r}\, ds,$$

(16)

$$\text{на } L_2: \quad \vartheta_2(s) = 2[\vartheta_\infty - \beta_2(s)] - \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\vartheta_1 \cos (n_t, r)}{r}\, ds - \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{\vartheta_2 \cos (n_t, r)}{r}\, ds.$$

Система имеет единственное решение, как это не трудно показать. В правую часть ее входит неизвестная нам величина ϑ_∞. Изменение ее соответствует, очевидно, вращению кольца, и потому при решении написанной системы мы можем просто отбросить эту величину или задать ей любое удобное для вычислений значение.

Еще одно замечание. В выражении для $\ln \rho$ содержится неизвестный член $\ln \rho_\infty$. Путем подобного преобразования плоскости z можно всегда добиться того, чтобы ρ_∞ равнялось любому наперед заданному числу, и мы можем, следовательно, при розыскании наперед фиксировать значение $\ln \rho_\infty$, положив его, например, равным нулю. Радиусы же окружностей кольца при этом вполне определятся.

Мы ограничимся только этими краткими указаниями, ибо последующие рассуждения весьма сходны с теми, которые мы проводили выше и всякий, кто внимательно прочел предыдущие строки, без труда

[1] Когда s — угловая точка, то в левых частях вместо $\vartheta(s)$ должно стоять $\frac{\delta}{\pi}\vartheta(s)$, где δ — угол области в этой точке.

сможет указать все дальнейшие шаги, необходимые для проведения разбираемой задачи к форме, пригодной для вычислений.

n° 5. Преобразование области на плоскость с разрезами. В некоторых вопросах, например, при изучении обтекания плоско-параллельным потенциальным потоком жидкости различных препятствий, бывает необходимо находить функцию, совершающую конформное преобразование заданной многосвязной области на плоскость с разрезами, параллельными какому-либо направлению, которое можно всегда считать совпадающим с направлением вещественной оси.

Мы получим сейчас интегральное уравнение для вещественной части преобразующей функции.

Пусть дело идет о нахождении функции $\zeta = \xi + i\eta$, преобразующей внешность B системы контуров L_1, $L_2 \ldots L_n$ на плоскость ζ с разрезами, параллельными вещественной оси:

$$\eta = \eta_k \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{17}$$

при этом так, что бесконечно далекие точки соответствуют друг другу:

$$\zeta(\infty) = \infty.$$

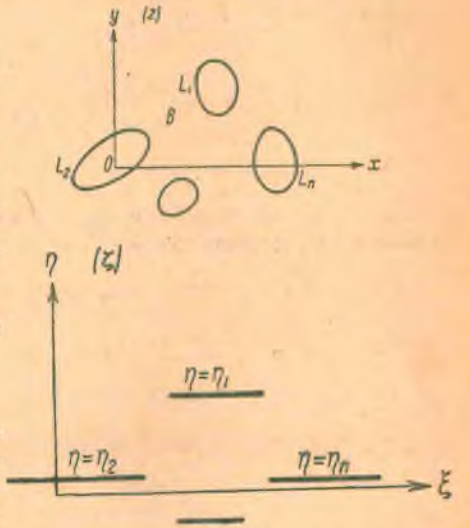


Рис. 44.

Опишем окружность C настолько большого радиуса R, чтобы все контуры L_k попали внутрь ее, и применим теорему Коши к лежащей внутри C части области B:

$$\zeta = f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_C \frac{f(t)}{t-z}\, dt - \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} \frac{f(t)}{t-z}\, dt \right\}.$$

Так как в области бесконечно далекой точки $f(z)$ имеет очевидно разложение вида:

$$f(z) = cz + c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots, \quad c_0 = \gamma_0 + i\delta_0,$$

то интеграл по окружности C даст:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(t)}{t-z}\, dt = cz + c_0.$$

Если же принять кроме того во внимание, что на контуре L_k $\zeta = \xi_k + i\eta_k$, и точка z лежит вне всех контуров L_k, так что

$$\int_{L_k} \frac{\eta_k}{t-z}\, dt = 0,$$

мы получим следующее выражение для преобразующей функции через значения ее вещественной части на контурах:

$$f(z) = cz + c_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\xi_k}{t - z}\, dt. \tag{18}$$

Отделение вещественной и мнимой частей приводит к равенствам:

$$\begin{cases} \xi = R[cz] + \gamma_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \frac{\xi_k \cos(n_t, r)}{r}\, d\sigma, \\ \eta = I[cz] + \delta_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \frac{\xi_k \sin(n_t, r)}{r}\, d\sigma. \end{cases} \tag{19}$$

Переходя в первом из них к пределу при z, стремящемся к точке s контура L_k и имея в виду, что

$$\int_{L_k} \frac{\xi_k \cos(n_t, r)}{r}\, d\sigma \to \int_{L_k} \frac{\xi_k \cos(n_t, r)}{r}\, d\sigma - \pi\xi_k(s),$$

получим следующие интегральные уравнения для $\xi_k(s)$:

$$\xi_k(s) = 2R[cz]_s + 2\gamma_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{L_j} \frac{\xi_j(\sigma) \cos(n_t, r)}{r}\, d\sigma, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{20}$$

где значок s у вещественной части cz показывает, что она должна быть вычислена, когда z совпадает с точкой s контура L_k. С подобного рода системой мы встречались в предыдущем n°, когда исследовали вопрос о конформном преобразовании двухсвязной области на кольцо, с иным только свободным членом и при $n = 2$. Мы отмечали там, что она имеет единственное решение. Решая ее, мы найдем граничные значения вещественной части преобразующей функции. Внося же найденные выражения в формулу (18), восстановим по ним саму преобразующую функцию. Из рассуждений видно, что она будет найдена лишь с точностью до остающегося произвольным линейного слагаемого $cz + c_0$.

Изменению постоянной c_0 соответствует, очевидно, параллельный перенос плоскости ζ. Далее, если мы одновременно изменим модули c и c_0 в несколько раз, то во столько же раз изменятся все ξ_k, что вытекает из уравнений (20) и, следовательно, во столько же раз изменится и $\zeta = f(z)$, как это видно из (18). Наконец, аргумент c определяет направление, в которое переходит направление вещественной оси на бесконечности плоскости z в точке $\zeta = \infty$ после преобразования. c и c_0 можно задавать произвольно. Проще всего естественно считать $c_0 = 0$, $c = 1$. После определения $\xi_k(s)$ из системы (20) мнимая часть η функции $f(z)$ найдется из второго равенства (19), сама же функция может быть найдена по формуле (18).

Для приближенного построения ζ можно воспользоваться интерполяцией при помощи рациональных функций. Возьмем внутри каждого из контуров L_k точку a_k. Для достаточно широкого класса областей B можно подобрать такую рациональную функцию вида

$$cz + c_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{m_k} \frac{\alpha_s^{(k)}}{(z - a_k)^s}, \tag{21}$$

которая отличалась бы от функции $f(z)$, совершающей требуемое конформное преобразование, на величину как угодно малую. Мы предположим, что это различие лежит за границей допустимой погрешности так, что вещественная часть написанной рациональной функции совпадает с ξ_k и мнимая часть с η_k на контурах. Для определения соответствующих такому выбору рациональной функции коэфициентов можно поступить следующим образом. Умножим предыдущее выражение на $(z - a_k)^{s-1}$ и проинтегрируем по контуру L_k; пользуясь известными теоремами вычетов, мы можем написать:

$$\int_{L_k} \zeta (z - a_k)^{s-1}\, dz = 2\pi i a_s^{(k)}.$$

Но на L_k $\zeta = \zeta_k + i\eta_k$, и так как $\int_{L_k} \eta_k (z - a_k)^{s-1}\, dz = 0$, в силу постоянства η_k, имеем:

$$a_s^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L} \xi_k (z - a_k)^{s-1}\, dz.$$

Подобным же способом можно построить интегральное уравнение для того случая, когда при преобразовании в бесконечно далекую точку плоскости ζ переходит точка z_0, лежащая на конечном расстоянии. В окрестности z_0 $f(z)$ должна иметь разложение вида:

$$f(z) = \frac{c}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots$$

Пусть далее ζ_∞ та точка плоскости ζ, в которую переходит $z = \infty$, так что $f(\infty) = \zeta_\infty$.

[1] Когда s — угловая точка контура, то в левой части должно стоять $\frac{\delta}{\pi}\xi_k(s)$, где δ — внешний угол контура в точке s. Подобное замечание относится и ко всем другим интегральным уравнениям в этом n°.

Применение формулы Коши приводит здесь нас к равенству:

$$f(z)=\frac{c}{z-z_0}+\zeta_\infty-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\xi_k}{t-z}\,dt,$$

равносильному двум следующим:

$$\xi=R\left[\frac{c}{z-z_0}+\zeta_\infty\right]-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\frac{\xi_k(\sigma)\cos(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma,$$

$$\eta=I\left[\frac{c}{z-z_0}+\zeta_\infty\right]+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\frac{\xi_k(\sigma)\sin(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma,$$

Отсюда путем предельного перехода на контур L_k получается система уравнений для $\xi_k(s)$:

$$\xi_k(s)=2R\left[\frac{c}{z-z_0}+\zeta_\infty\right]_s-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{L_j}\frac{\xi_j(\sigma)\cos(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma. \tag{22}$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

Эта система содержит в правой части выражение $\frac{c}{z-z_0}+\zeta_\infty$, остающееся произвольным в вычислениях. Постоянные c и ζ_∞ имеют значения, аналогичные значениям c и c_0 в предыдущей задаче. Система имеет, при фиксированном свободном члене, единственное решение.

Мы остановимся еще на том случае преобразования многосвязной области на плоскость с разрезом, когда бесконечно далекая точка не принадлежит области.

Пусть область B ограничена внешним контуром L_0 и несколькими внутренними контурами $L_1,\ldots L_n$. Будем искать функцию, преобразующую ее на плоскость с разрезом так, чтобы заданная точка z_0 переходила бы в бесконечно далекую точку плоскости ζ. При этом границы области перейдут в разрезы:

$$\eta=\eta_k \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Опишем около точки z_0 окружность C_ε малого радиуса ε и для полученной после этого области применим интеграл Коши:

$$\zeta=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{L_0}\frac{f(t)}{t-z}\,dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k}\frac{f(t)}{t-z}\,dt-\int_{C_\varepsilon}\frac{f(t)}{t-z}\,dt\right\}.$$

В окрестности точки z_0 $f(z)$ должна иметь строение:

$$f(z)=\frac{c}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots$$

и поэтому

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=-2\pi i\,\frac{c}{z-z_0},$$

остальные же интегралы имеют там вид:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=i\eta_0+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\xi_0}{t-z}\,dt,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\xi_k}{t-z}\,dt,$$

и мы получим следующее выражение преобразующей функции через граничные значения ее вещественной части:

$$f(z)=\frac{c}{z-z_0}+i\eta_0+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\xi_0}{t-z}\,dt-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\xi_k}{t-z}\,dt. \tag{23}$$

Разделение вещественной и мнимой частей дает:

$$\left\{\begin{aligned}\xi&=R\left[\frac{c}{z-z_0}\right]+\\&+\frac{1}{2\pi}\int_{L_0}\frac{\xi_0\cos(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\frac{\xi_k\cos(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma,\\ \eta&=I\left[\frac{c}{z-z_0}\right]+\eta_0-\frac{1}{2\pi}\int_{L_0}\frac{\xi_0\sin(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma+\\&+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\frac{\xi_k\sin(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma.\end{aligned}\right. \tag{24}$$

Предельный переход в первом из них на контур L_k позволяет построить интегральные уравнения для $\xi_k(s)$:

$$\xi_k(s)=2R\left[\frac{c}{z-z_0}\right]_s+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\frac{\xi_0(\sigma)\cos(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{L_j}\frac{\xi_j(\sigma)\cos(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma. \tag{25}$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

В правых частях системы содержится остающийся неопределенным коэфициент c, о значении которого мы упоминали выше. После выбора его, система все же не будет иметь единственного решения, ибо соответствующая однородная система будет, как легко видеть, иметь решение $\xi_0 = \xi_1 = \ldots = \xi_n = \text{const}$. Причину этого внимательный читатель вероятно уже заметил. Во всех предыдущих формулах у нас входило лишь одно постоянное слагаемое η_0, соответствующее параллельному переносу разрезов вдоль мнимой оси; возможность же переноса их вдоль оси ξ и послужила, очевидно, причиной неопределенности системы (25). Чтобы сделать задачу определенной, мы должны к (25) добавить еще начальное значение для одного из ξ_k, положив, например, $\xi_0(0) = 0$.

§ 10. Отображение полуплоскости на многоугольник

n° 1. Вывод формулы Кристоффеля-Шварца. Конформное преобразование верхней полуплоскости на многоугольник с заданными внутренними углами совершается при помощи некоторой определенной функции, для которой можно получить явное выражение. Получим его. Пусть это будет функция $z = f(t)$. Она совершает конформное преобразование верхней полуплоскости плоскости t на многоугольник A плоскости z. Величины внутренних углов этого многоугольника обозначим через $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots \alpha_n\pi$. Вершины многоугольника назовем $A_1, A_2, \ldots A_n$. Они соответствуют некоторым точкам $a_1, a_2, \ldots a_n$ вещественной оси плоскости t. Будем считать, что все эти точки лежат на конечном расстоянии и выбраны таким образом, что

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Исследуем поведение функции $f(t)$ в окрестности этих точек. Рассмотрим некоторую точку a_k. Функция $z = f(t)$ отображает окрестность точки a_k на окрестность точки b_k (b_k — комплексная координата вершины A_k). Углу π в плоскости t соответствует в плоскости z угол $\alpha_k\pi$.

Рассмотрим функцию

$$W = (z - b_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}.$$

Эта функция окрестность точки b_k плоскости z будет отображать на окрестность нулевой точки плоскости W. Углу $\alpha_k\pi$ в плоскости z будет соответствовать в плоскости W угол π. Часть многоугольника A, лежащая вблизи вершины A_k, будет отображаться на часть плоскости W, лежащую около нулевой точки по одну сторону прямой l, проходящей через нулевую точку. (Эта прямая является отображением сторон $A_{k-1}A_k$ и A_kA_{k+1}). Два последовательных отображения с помощью функций:

$$z = f(t) \text{ и } W = (z - b_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}$$

преобразуют конформно и однозначно окрестность точки a_k, лежащую по одну сторону вещественной оси, в окрестность точки $W = 0$, лежащую по одну сторону прямой l. Пользуясь принципом симметрии, мы можем утверждать, что функция

$$W = [f(t) - b_k]^{\frac{1}{\alpha_k}}$$

будет отображать конформно и однозначно полную окрестность точки $t = a_k$ на полную окрестность точки $W = 0$. W должна быть поэтому регулярной функцией t в окрестности $t = a_k$. Следовательно, имеет место разложение

$$W = c_1(t - a_k) + c_2(t - a_k)^2 + \ldots$$

или

$$(z - b_k)^{\frac{1}{\alpha_k}} = c_1(t - a_k) + c_2(t - a_k)^2 + \ldots$$

Возведем обе части последнего равенства в степень α_k. Тогда получим:

$$z = b_k + d_1(t - a_k)^{\alpha_k}\left\{1 + \frac{c_2}{c_1}(t - a_k) + \ldots\right\}^{\alpha_k},$$

или

$$f(t) = b_k + d_1(t - a_k)^{\alpha_k} f_1(t),$$

где функция $f_1(t)$ регулярна около точки $t = a_k$:

$$f_1(t) = 1 + d_2'(t - a_k) + \ldots$$

Составим

$$\varphi(t) = \frac{f''(t)}{f'(t)}.$$

$$f'(t) = \alpha_k d_1(t - a_k)^{\alpha_k - 1} f_1(t) + d_1(t - a_k)^{\alpha_k} f_1'(t),$$

$$f''(t) = \alpha_k(\alpha_k - 1) d_1(t - a_k)^{\alpha_k - 2} f_1(t) + 2\alpha_k d_1(t - a_k)^{\alpha_k - 1} f_1'(t) + d_1(t - a_k)^{\alpha_k} f_1''(t).$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{t - a_k} \cdot \frac{\alpha_k(\alpha_k - 1) f_1(t) + 2\alpha_k(t - a_k) f_1'(t) + (t - a_k)^2 f_1''(t)}{\alpha_k f_1(t) + (t - a_k) f_1'(t)}.$$

Второй множитель есть регулярная функция в окрестности точки $t = a_k$. Его значение в этой точке равно $\alpha_k - 1$. Следовательно, точка $t = a_k$ является простым полюсом функции $\varphi(t)$ с вычетом, равным $\alpha_k - 1$. Функция $\varphi(t)$ в окрестности точки a_k имеет разложение:

$$\varphi(t) = \frac{\alpha_k - 1}{t - a_k} + \textit{регулярная функция}.$$

Полагая $k = 1, 2, \ldots n$ убеждаемся, что в точках $t = a_1$, $t = a_2, \ldots t = a_n$ $\varphi(t)$ имеет простые полюсы с вычетами:

$$\alpha_1 - 1, \quad \alpha_2 - 1, \ldots \alpha_n - 1.$$

$f'(t)$ обращается в нуль или бесконечность только в этих точках;

поэтому $\varphi(t)$ никаких других особых точек на конечном расстоянии не имеет. Таким образом, на всей плоскости t имеет место разложение:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{t - a_k} + \varphi_1(t),$$

где $\varphi_1(t)$ — функция, регулярная на всей плоскости t. Далее, бесконечно далекая точка плоскости t перейдет в определенную конечную точку на стороне многоугольника и является точкой регулярности функции $f(t)$. Отсюда легко убедиться, что $\varphi_1(t) = 0$.

Для $\frac{f''(t)}{f'(t)}$ имеем выражение:

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{t - a_k}.$$

Интегрируя два раза, последовательно получим:

$$\ln f'(t) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1) \ln (t - a_k) + \ln c_1 =$$

$$= \ln c_1 (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (t - a_n)^{\alpha_n - 1}$$

$$f(t) = c_1 \int_0^t (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + c_2. \tag{1}$$

Это и дает требуемое аналитическое выражение $f(t)$.

Ограничение, что точки $t = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ лежат на конечном расстоянии, легко устранить. Если точка, соответствующая вершине A_n многоугольника, находится на бесконечности, то выражение для отображающей функции может быть получено из (1) при помощи замены переменной:

$$t = -\frac{1}{\tau} + a_n.$$

Пользуясь равенством

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n - 2,$$

после элементарных преобразований получим:

$$f(\tau) =$$

$$= c_1' \int_0^{\tau} (\tau - a_1')^{\alpha_1 - 1} (\tau - a_2')^{\alpha_2 - 1} \ldots (\tau - a'_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} d\tau + c_2', \tag{2}$$

где $a_1', a_2', \ldots a'_{n-1}$ — точки вещественной оси плоскости τ, соответствующие точкам $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ плоскости t. Выведенные нами формулы (1) и (2) обычно называют интегралом Кристоффеля-Шварца. Явное выражение для функции, совершающей конформное преобразование верхней полуплоскости на многоугольник, впервые опубликовал в 1868 г. цюрихский профессор Кристоффель в статье „Sul problema delle temperature stationarie e la rappresentazione di una data superficie". (Ann. di Matem. pura et applic., ser. 2, Tomo I, 1867—8, Milano).

Позднее берлинский профессор Шварц в ряде мемуаров дал этой формуле функционально-теоретическое обоснование. В одном из этих мемуаров, [1] относящемся к 1869 году, Шварц заявляет, что он еще весной 1864 г. докладывал на математическом семинарии Берлинского университета о своих результатах по составлению функции, отображающей полуплоскость на треугольник, и о распространении этой функции для отображения полуплоскости на прямоугольник и что в 1866 г. эти результаты были сообщены Вейерштрассом Берлинской академии наук.

n° 2. Замечание о постоянных в интеграле Кристоффеля-Шварца. Функция

$$z = f(t) = c_1 \int_0^t (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + \tag{3}$$

совершает конформное преобразование верхней полуплоскости на многоугольник, внутренние углы которого равны $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\ldots$ $\alpha_n\pi$. Определим координаты вершин и длины сторон этого многоугольника. Координаты вершин определяются равенствами:

$$b_k = c_1 \int_0^{a_k} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + c_2 \quad [k = 1, 2 \ldots n] \tag{4}$$

Длина какой-нибудь стороны, например, стороны $A_k A_{k+1}$, может быть определена следующим образом:

$$\text{дл. } A_k A_{k+1} = |b_{k+1} - b_k| =$$

$$= \Big| c_1 \int_0^{a_{k+1}} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt +$$

$$+ c_2 - c_1 \int_0^{a_k} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt - c_2 \Big| = \tag{5}$$

$$= |c_1| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (t - a_k)^{\alpha_k - 1} (a_{k+1} - t)^{\alpha_{k+1} - 1} \ldots$$

$$\ldots (a_n - t)^{\alpha_n - 1} dt.$$

[1] H. A. Schwarz, Ueber einige Abbildungsaufgaben, Ges. Math. Abh., Bd. II, стр. 65—83.

На основании формул (4) и (5) очень легко выяснить роль постоянных, входящих в интеграл Кристоффеля-Шварца. Постоянная c_2 входит в качестве слагаемого в выражение координаты каждой вершины; поэтому с изменением c_2 координаты всех вершин изменяются на одну и ту же величину и весь многоугольник, как целое, смещается. Постоянная c_1 входит в качестве множителя в выражение длины каждой стороны многоугольника, и поэтому при изменении c_1 длины всех сторон изменяются в одинаковое число раз, и кроме того многоугольник поворачивается и мы получаем подобный многоугольник. Изменению постоянных $a_1, a_2, \ldots a_n$ соответствует относительное изменение длин сторон многоугольника.

До сих пор мы занимались лишь многоугольником с заданными углами и совсем не заботились о сторонах многоугольника. В практических вопросах обычно требуется найти функцию, совершающую конформное преобразование полуплоскости (или круга) на заданный определенным образом многоугольник A.

Углы многоугольника, как и раньше, обозначим через $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots \alpha_n\pi$, а отношения 2-й, 3-й, $\ldots (n-2)$-й стороны к первой стороне через $\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_{n-2}$, т. е.

$$(6)\qquad \frac{\text{дл. } A_2A_3}{\text{дл. } A_1A_2}=\lambda_2;\ \frac{\text{дл. } A_3A_4}{\text{дл. } A_1A_2}=\lambda_3,\ \ldots,\ \frac{\text{дл. } A_{n-2}A_{n-1}}{\text{дл. } A_1A_2}=\lambda_{n-2},$$

где $A_1, A_2, \ldots A_n$ — вершины многоугольника. Заметим, что отношения последних двух сторон $A_{n-1}A_n$ и A_nA_{n+1} к первой определяются на основании этих данных. Если мы в формуле (3) числа $a_1, a_2, \ldots a_n$ подберем таким образом, чтобы удовлетворялись соотношения (6), и за $a_1, a_2, \ldots a_n$ возьмем отношения углов заданного многоугольника к углу π, то составленная таким образом функция $z=f(t)$ вида (3) будет совершать конформное преобразование верхней полуплоскости на многоугольник A^*, подобный A. От A^* к A мы можем перейти следующим образом. Перенесем какую-нибудь вершину, например A_k^*, многоугольника A^* в соответствующую вершину A_k многоугольника A, повернем многоугольник A^* около этой вершины таким образом, чтобы его стороны стали параллельны сторонам многоугольника A и, наконец, не изменяя положения вершины A_k^*, изменим длину сторон многоугольника A^* таким образом, чтобы он совпал с A. Все это может быть достигнуто линейным преобразованием

$$Z=c_1^*Z^*+c_2^*.$$

Постоянные c_1^* и c_2^* определяются из сопоставления положения и линейных размеров многоугольников A^* и A.

Для определения неизвестных $a_1, a_2, \ldots a_n$ мы имеем только $(n-3)$ уравнения. Поэтому три из них могут быть взяты совершенно произвольно. Это соответствует тому факту, что мы можем верхнюю полуплоскость перевести саму в себя, причем так, чтобы три точки вещественной оси перешли в три любые наперед заданные точки той же оси. За эти произвольные точки возьмем $t=a_1$, $t=a_2$ и $t=a_n$ и

обозначим их, в отличие от других точек, подлежащих определению, через p_1, p_2, p_3. Напишем соотношения (6) в раскрытом виде:

$$(7)\qquad \begin{cases} J_2(a_3, a_4, \ldots a_{n-1})=\lambda_2 J_1(a_3, a_4, \ldots a_{n-1}), \\ J_3(a_3, a_4, \ldots a_{n-1})=\lambda_3 J_1(a_3, a_4, \ldots a_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ J_{n-2}(a_3, a_4, \ldots a_{n-1})=\lambda_{n-2} J_1(a_3, a_4, \ldots a_{n-1}), \end{cases}$$

где

$$(8)\qquad \begin{cases} J_1=\int_{p_1}^{p_2}(t-p_1)^{\alpha_1-1}(p_2-t)^{\alpha_2-1}(a_3-t)^{\alpha_3-1}\ldots \\ \qquad\ldots(a_{n-1}-t)^{\alpha_n-1}(p_3-t)^{\alpha_n-1}\,dt, \\ J_2=\int_{p_3}^{a_2}(t-p_1)^{\alpha_1-1}(t-p_2)^{\alpha_2-1}(a_3-t)^{\alpha_3-1}\ldots \\ \qquad\ldots(a_{n-1}-t)^{\alpha_n-1}(p_3-t)^{\alpha_n-1}\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ J_{n-2}=\int_{a_{n-2}}^{a_{n-1}}(t-p_1)^{\alpha_1-1}(t-p_2)^{\alpha_2-1}(t-a_3)^{\alpha_3-1}\ldots \\ \qquad\ldots(t-a_{n-2})^{\alpha_{n-2}-1}(a_{n-1}-t)^{\alpha_{n-1}-1}\cdot(p_3-t)^{\alpha_n-1}\,dt. \end{cases}$$

n° 3. О методе Ньютона для системы уравнений (7) и вычислении несобственных интегралов. В предыдущем параграфе было показано, что для составления функции, совершающей конформное преобразование верхней полуплоскости на многоугольник с заданными углами и заданным отношением сторон, необходимо знать постоянные $a_3, a_4, \ldots a_{n-1}$, являющиеся решением системы уравнений:

$$\begin{cases} J_2(a_3, a_4, \ldots a_{n-1})=\lambda_2 J_1(a_3, a_4, \ldots a_{n-1}), \\ J_3(a_3, a_4, \ldots a_{n-1})=\lambda_3 J_1(a_3, a_4, \ldots a_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ J_{n-2}(a_3, a_4, \ldots a_{n-1})=\lambda_{n-2} J_1(a_3, a_4, \ldots a_{n-1}). \end{cases}$$

На основании теоремы единственности функции, совершающей конформное преобразование двух заданных областей друг на друга, можем утверждать, что при выбранных p_1, p_2, p_3 эта система имеет решение и при этом единственное. Будем решать эту систему по методу, называемому обычно методом Ньютона-Фурье.

Пусть $a_3^*, a_4^*, \ldots a_{n-1}^*$ — решение системы. За начальные значения возьмем числа $a_3^{(0)}, a_4^{(0)}, \ldots a_{n-1}^{(0)}$, мало отличающиеся от a_3^*,

$a_4^*, \ldots a^*_{n-1}$. Разложим каждое уравнение системы (7) в ряд Тэйлора по степеням разностей:

$$(9) \qquad a_3^* - a_3^{(0)},\ a_4^* - a_4^{(0)}, \ldots a^*_{n-1} - a^{(0)}_{n-1}$$

и оборвем эти ряды на первых степенях разностей. Тогда мы получим систему уравнений:

$$J_2^{(0)} + \alpha_3^{(1)} \frac{\partial J_2^{(0)}}{\partial a_3} + \alpha_4^{(1)} \frac{\partial J_2^{(0)}}{\partial a_4} + \ \ldots\ + \alpha^{(1)}_{n-1} \frac{\partial J_2^{(0)}}{\partial a_{n-1}} =$$

$$= \lambda_2 \left[J_1^{(0)} + \alpha_3^{(1)} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial a_3} + \alpha_4^{(1)} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial a_4} + \ \ldots\ + \alpha^{(1)}_{n-1} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial a_{n-1}} \right]$$

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$J^{(0)}_{n-2} + \alpha_3^{(1)} \frac{\partial J^{(0)}_{n-2}}{\partial a_3} + \alpha_4^{(1)} \frac{\partial J^{(0)}_{n-2}}{\partial a_4} + \ldots + \alpha^{(1)}_{n-1} \frac{\partial J^{(0)}_{n-2}}{\partial a_{n-1}} =$$

$$= \lambda_{n-2} \left[J_1^{(0)} + \alpha_3^{(1)} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial a_3} + \alpha_4^{(1)} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial a_4} + \ldots + \alpha^{(1)}_{n-1} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial a_{n-1}} \right].$$

$$\alpha_k^{(1)} = a_k^* - a_k^{(0)}.$$

В этой системе уравнений неизвестными являются искаженные значения разностей (9), свободными членами и коэфициентами при неизвестных—значения $J_1, \ldots J_{n-2}$ и значения первых производных от $J_1, J_2, \ldots J_{n-2}$ по $a_3, a_4, \ldots a_{n-1}$ при $a_3 = a_3^{(0)}$, $a_4 = a_4^{(0)}, \ldots a_{n-1} = a^{(0)}_{n-1}$. Приведем эту систему к обычному виду и решим.

По найденным значениям $\alpha_3^{(1)}, \alpha_4^{(1)}, \ldots \alpha^{(1)}_{n-1}$ и начальным значениям $a_3^{(0)}, a_4^{(0)} \ldots a^{(0)}_{n-1}$ построим первые приближения:

$$a_3^{(1)} = a_3^{(0)} + \alpha_3^{(1)},$$
$$a_4^{(1)} = a_4^{(0)} + \alpha_4^{(1)}, \ldots$$
$$a^{(1)}_{n-1} = a^{(0)}_{n-1} + \alpha^{(1)}_{n-1}.$$

Затем, раскладывая уравнения системы (7) в ряды Тэйлора по степеням

$$(11) \qquad a_3^* - a_3^{(1)},\ a_4^* - a_4^{(1)}, \ldots a^*_{n-1} - a^{(1)}_{n-1}$$

и обрывая эти ряды на первых степенях разностей, построим систему уравнений (10′), аналогичную системе (10).

В системе (10′) неизвестными будут $\alpha_3^{(2)}, \alpha_4^{(2)}, \ldots \alpha^{(2)}_{n-1}$ искаженные значения разностей (11), а свободными членами и коэфициентами при неизвестных те же выражения, что и в системе (10), но только вычисленные при

$$a_3 = a_3^{(1)},\ a_4 = a_4^{(1)}, \ldots a_{n-1} = a^{(1)}_{n-1}.$$

Из системы (10′) найдем $\alpha_3^{(2)}, \alpha_4^{(2)}, \ldots \alpha^{(2)}_{n-1}$ и затем построим вторые приближения:

$$a_3^{(2)} = a_3^{(1)} + \alpha_3^{(2)},$$
$$a_4^{(2)} = a_4^{(1)} + \alpha_4^{(2)}, \ldots$$
$$a^{(2)}_{n-1} = a^{(1)}_{n-1} + \alpha^{(2)}_{n-1}.$$

Продолжая этот процесс, мы при некоторых ограничениях начальных значений можем подойти к корню $a_3^*, a_4^*, \ldots, a^*_{n-1}$ сколь угодно близко.

Для определения координат вершин многоугольника, длин его сторон и осуществления только что изложенного метода решения системы (7) необходимо уметь вычислять интегралы вида:

$$E = \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t-p_1)^{\alpha_1 - 1} (t-p_2)^{\alpha_2 - 1} (t-a_3)^{\alpha_3 - 1} \ldots$$

$$\ldots (t-a_k)^{\alpha_k - 1} (a_{k+1} - t)^{\alpha_{k+1} - 1} \ldots (p_3 - t)^{\alpha_n - 1}\, dt.$$

Эти интегралы несобственные. Подинтегральная функция каждого из них обращается в бесконечность в двух точках — при t, равном нижнему и верхнему пределам интегрирования. Однако эти несобственные интегралы существуют. Это непосредственно вытекает из признака Коши, так как числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ всегда меньше 2.

Этот интеграл может быть вычислен по методу, предложенному Л. В. Канторовичем.[1] Идея этого метода состоит в следующем. Разобьем интеграл E на два интеграла E_1 и E_2 так, чтобы подинтегральная функция каждого из этих интегралов имела особенность только в одной точке: интеграла E_1 в точке $t = a_k$ и интеграла E_2 в точке $t = a_{k+1}$. Для этого достаточно весь интервал интегрирования разделить на две части от a_k до a_{k_0} и от a_{k_0} до a_{k+1}, где a_{k_0} — некоторое постоянное число, большее a_k и меньшее a_{k+1}. Тогда

$$E_1 = \int_{a_k}^{a_{k_0}} (t-p_1)^{\alpha_1 - 1} (t-p_2)^{\alpha_2 - 1} (t-a_3)^{\alpha_3 - 1} \ldots$$

$$\ldots (t-a_k)^{\alpha_k - 1} (a_{k+1} - t)^{\alpha_{k+1} - 1} \ldots (p_3 - t)^{\alpha_n - 1}\, dt,$$

$$E_2 = \int_{a_{k_0}}^{a_{k+1}} (t-p_1)^{\alpha_1 - 1} (t-p_2)^{\alpha_2 - 1} (t-a_3)^{\alpha_3 - 1} \ldots$$

$$\ldots (t-a_k)^{\alpha_k - 1} (a_{k+1} - t)^{\alpha_{k+1} - 1} \ldots (p_3 - t)^{\alpha_n - 1}\, dt.$$

[1] Л. В. Канторович, О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов..., Матем. сборн., т. 4, в. 2.

Займемся сначала интегралом E_1. Подинтегральную функцию обозначим через $F(t)$. Ее можно представить следующим образом:

$$F(t) = (t-p_1)^{\alpha_1-1}\,(t-p_2)^{\alpha_2-1}\,(t-a_3)^{\alpha_3-1}\,\ldots$$
$$\ldots\,(t-a_k)^{\alpha_k-1}\,(a_{k+1}-t)^{\alpha_{k+1}-1}\,\ldots\,(p_3-t)^{\alpha_n-1} =$$
$$= (t-a_k)^{\alpha_k-1}\,\psi(t),$$

где

$$\psi(t) = (t-p_1)^{\alpha_1-1}\,(t-p_2)^{\alpha_2-1}\,(t-a_3)^{\alpha_3-1}\,\ldots$$
$$\ldots\,(t-a_{k-1})^{\alpha_{k-1}-1}\,(a_{k+1}-t)^{\alpha_{k+1}-1}\,\ldots\,(p_3-t)^{\alpha_n-1};$$

или же

$$F(t) = (t-a_k)^{\alpha_k-1}\,[\psi(a_k) + (t-a_k)\,\psi'(a_k)] +$$
$$+ (t-a_k)^{\alpha_k-1}\,[\psi(t) - \psi(a_k) - \psi'(a_k)\,(t-a_k)].$$

E_1 можно еще разбить на два интеграла E_1' и E_1'', при этом:

$$E_1' = \int_{a_k}^{a_{k_0}} (t-a_k)^{\alpha_k-1}[\psi(a_k) + (t-a_k)\,\psi'(a_k)]\,dt,$$

$$E_1'' = \int_{a_k}^{a_{k_0}} (t-a_k)^{\alpha_k-1}\,[\psi(t) - \psi(a_k) - \psi'(a_k)\,(t-a_k)]\,dt.$$

Интеграл E_1' легко находится в конечном виде, а интеграл E_1'' совсем не имеет особенностей, так как квадратная скобка начинается с члена

$$\frac{\psi''(a_k)}{2}\,(t-a_k)^2 + \ldots$$

Поэтому E_1' вычисляется точно, а E_1'' — можно находить приближенно по какой-нибудь из известных формул приближенного вычисления определенных интегралов. Точно так же обстоит дело и с E_2.

п° 4. Примеры. Применим рассуждения предыдущих параграфов к двум частным случаям.

1. Многоугольником A является треугольник с углами $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$ и $\alpha_3\pi$. Так как два треугольника, имеющие равные углы, всегда подобны, то в этом случае не надо заботиться о выборе постоянных a. За точки $t=a_1$, $t=a_2$ и $t=a_3$ могут быть взяты три произвольных точки вещественной оси. Положим $a_1=0$, $a_2=1$ и $a_3=\infty$. Согласно формуле (2) отображающая функция будет иметь вид

$$Z = C_1\int_0^t t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,dt + C_2.$$

Для полного определения отображающей функции еще необходимо найти постоянные C_1 и C_2.

Определим C_1 и C_2 для случая равнобедренного прямоугольного треугольника, вершинами которого служат точки $A_1(0)$, $A_2(1)$ и $A_3(i)$.

Точке $t=0$ пусть соответствует вершина A_1, а точке $t=1$ вершина A_2.

Тогда $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{1}{4}$ и отображающей функцией будет

$$Z = C_1\int_0^t t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\,dt + C_2.$$

Так как по условию $t=0$ должно соответствовать $z=0$, то $C_2=0$. При $t=1$ мы должны получить координату вершины A_2; следовательно, C_1 должно быть таким, что

$$C_1\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\,dt = 1,$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\,dt}.$$

Займемся вычислением интеграла, стоящего в знаменателе. Обозначим его через J.

$$J = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\,dt =$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\,dt = J_1 + J_2.$$

Вычислим сначала J_1.

Подинтегральную функцию представим следующим образом:

$$t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{4}} = t^{-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{3}{4}t\right] + t^{-\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{-\frac{3}{4}} - 1 - \frac{3}{4}t\right].$$

Тогда

$$J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{3}{4}t\right]dt + \int_0^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{-\frac{3}{4}} - 1 - \frac{3}{4}t\right]dt.$$

Первый интеграл вычисляется непосредственно; он равен 1,5910. Второй вычислим по формуле Симпсона.

Обозначим $t^{-\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{-\frac{3}{4}}-1-\frac{3}{4}t\right]$ через $y(t)$, тогда

$$y(0)=0, \qquad y\left(\frac{1}{16}\right)=0{,}0104, \quad y\left(\frac{1}{8}\right)=0{,}328,$$

$$y\left(\frac{3}{16}\right)=0{,}0644, \quad y\left(\frac{1}{4}\right)=0{,}1066, \quad y\left(\frac{5}{16}\right)=0{,}1612,$$

$$y\left(\frac{3}{8}\right)=0{,}2309, \quad y\left(\frac{7}{16}\right)=0{,}3198, \quad y\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}4339.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} y(t)\,dt=0{,}0707.$$

$$J_1=1{,}5910+0{,}0707=1{,}6617.$$

Перейдем к вычислению J_2.

Подинтегральную функцию представим следующим образом:

$$t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}=(1-t)^{-\frac{3}{4}}\left[1+\frac{1}{2}(1-t)\right]+$$

$$+(1-t)^{-\frac{3}{4}}\left[t^{-\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2}(1-t)\right],$$

$$J_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\left[1+\frac{1}{2}(1-t)\right]dt+$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\left[t^{-\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2}(1-t)\right]dt.$$

Первый интеграл равен 3,5318.

Второй интеграл вычисляется так же, как и вторая часть интеграла J_1. Он равен 0,0506.

$$J_2=3{,}5824, \quad J=J_1+J_2=5{,}2441.$$

Таким образом,

$$C_1=\frac{1}{5{,}2441}=0{,}1907.$$

Задача полностью решена.

Для проверки вычислим еще гипотенузу треугольника:

$$A_2A_3=0{,}1907\int_1^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{-\frac{3}{4}}\,dt.$$

$$\int_1^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{-\frac{3}{4}}\,dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{4}}(1-\tau)^{-\frac{3}{4}}\,d\tau\left[\text{Замена } \tau=\frac{1}{t}\right],$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{4}}(1-\tau)^{-\frac{3}{4}}\,d\tau=\int_0^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{4}}\left[1+\frac{3}{4}\tau\right]d\tau+$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{4}}\left[(1-\tau)^{-\frac{3}{4}}-1-\frac{3}{4}\tau\right]d\tau=3{,}6158+0{,}0922=3{,}7080.$$

$$A_2A_3=0{,}1907\cdot 2\cdot 3{,}7080=1{,}4142.$$

Точное значение A_2A_3 равно $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$

2. Многоугольником A является прямоугольник, вершинами которого служат точки $A_1(-\omega)$, $A_2(+\omega)$, $A_3(\omega+\omega i)$ и $A_4(-\omega+\omega i)$, где ω — вещественная постоянная. Предположим сначала, что правая половина верхней полуплоскости ($R[t]>0$ $I[t]>0$) отображена на правую часть прямоугольника так, что точка $t=0$ перешла в $z=0$, $t=1$ в $z=\omega$ и $t=\infty$ в $z=\omega i$. Сделаем отражение в мнимых осях на плоскости t и на плоскости z. Тогда по принципу симметрии будем иметь отображение всей верхней полуплоскости на весь прямоугольник, причем $t=0$ будет соответствовать $z=0$; $t=1$, $z=\omega$; $t=-1$, $z=-\omega$; $t=\infty$, $z=\omega i$. Вершины A_3 и A_4 будут соответствовать точкам, симметричным относительно мнимой оси; пусть это будут точки $\frac{1}{K}$ и $-\frac{1}{K}$, где $K<1$. Отображающая функция будет иметь вид:

$$z=C_1\int_0^{t}(t+1)^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{-\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{K}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t+\frac{1}{K}\right)^{-\frac{1}{2}}dt,$$

или

$$z=C_1'\int_0^{t}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Определим K таким образом, чтобы отношение

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3}=\frac{2\omega}{\omega}=2.$$

Система (7) в этом случае сводится к одному уравнению:

$$\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=2\int_{1}^{\frac{1}{K}}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

$\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt$ может быть заменен

$$2\int_{0}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Подставляя в уравнение для определения K и сокращая на 2, получим

$$\int_{0}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\int_{1}^{\frac{1}{K}}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Введем обозначения:

$$\int_{0}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=J_1(K),$$

$$\int_{1}^{\frac{1}{K}}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=J_2(K).$$

Уравнение $J_1(K)=J_2(K)$ будем решать по методу Ньютона-Фурье. Нам придется иметь дело только с одной поправкой α_1, а поэтому будем ее называть h со значком внизу, указывающим на номер приближения. За первое приближение возьмем $K=\frac{1}{2}$. Для определения h_1 будем иметь уравнение

$$J_1\left(\frac{1}{2}\right)+h_1\frac{dJ_1^{(0)}}{dK}=J_2\left(\frac{1}{2}\right)+h_1\frac{dJ_2^{(0)}}{dK}.$$

Вычислим свободный член и коэфициенты этого уравнения:

$$J_1\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{0}^{1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[(1+t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]dt.$$

Пусть

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\psi(t).$$

Тогда $\psi(1)=\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\psi'(1)=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Подинтегральная функция $J_1\left(\frac{1}{2}\right)$ может быть представлена следующим образом:

$$(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[(1+t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{12}(1-t)\right]+$$

$$+(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[(1+t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{12}\sqrt{\frac{2}{3}}(1-t)\right],$$

$$J_1\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}\int_{0}^{1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{12}(1-t)\right]dt+$$

$$+\int_{0}^{1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[(1+t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{12}\sqrt{\frac{2}{3}}(1-t)\right]dt.$$

Первый интеграл $=1{,}5877$.

Второй интеграл вычислим по формуле Симпсона с тремя промежуточными точками. Подинтегральную функцию обозначим через $y(t)$.

$$y(0)=0{,}2515,\quad y\left(\frac{1}{4}\right)=0{,}1571,\quad y\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}0860,$$

$$y\left(\frac{3}{4}\right)=0{,}0318,\quad y(1)=0.$$

$$\int_{0}^{1}y(t)\,dt=\frac{1}{12}[0{,}2515+4\cdot0{,}1571+2\cdot0{,}0860+4\cdot0{,}0318]=0{,}0983$$

$$J_1\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}6860.$$

Дифференцируя $J_1(K)$ по K, получим:

$$\frac{dJ_1}{dK}=\int_0^1 \frac{Kt^2dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dJ_1^{(0)}}{dK}=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{4}t^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

и вычисляя с помощью того же метода, найдем $\frac{dJ_1^{(0)}}{dK}=0{,}54$.

Перейдем к вычислению $J_2\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\frac{dJ_2^{(0)}}{dK}$.

Имея в виду дифференцирование $J_2(K)$ по K, преобразуем этот интеграл от интервала $\left(1, \frac{1}{k}\right)$ к интервалу $(0, 1)$. Сделаем замену переменной

$$t=\frac{(1-K)t_1+K}{K}.$$

Тогда

$$J_2(K)=$$

$$=\int_0^1 [(1-K)t_1^2+2Kt_1]^{-\frac{1}{2}}[(1+K)-2Kt_1-(1-K)t_1^2]^{-\frac{1}{2}}dt_1$$

и

$$\frac{dJ_2(K)}{dK}=$$

$$=\int_0^1 [(1-K)t_1^2-(1-3K)t_1-(1+2K)]t_1^{-\frac{1}{2}}(1-t_1)^{-\frac{1}{2}}[(1-K)t_1+$$

$$+2K]^{-\frac{3}{2}}[(1+K)+(1-K)t_1]^{-\frac{3}{2}}dt_1,$$

$$J_2\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^1\left(\frac{1}{2}t_1^2+t_1\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}-t_1-\frac{1}{2}t_1^2\right)^{-\frac{1}{2}}dt_1=$$

$$=2\int_0^1 t_1^{-\frac{1}{2}}(2+t_1)^{-\frac{1}{2}}(1-t_1)^{-\frac{1}{2}}(3+t_1)^{-\frac{1}{2}}dt_1=$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}} t_1^{-\frac{1}{2}}(2+t_1)^{-\frac{1}{2}}(1-t_1)^{-\frac{1}{2}}(3+t_1)^{-\frac{1}{2}}dt_1+$$

$$+2\int_{\frac{1}{2}}^1 t_1^{-\frac{1}{2}}(2+t_1)^{-\frac{1}{2}}(1-t_1)^{-\frac{1}{2}}(3+t_1)^{-\frac{1}{2}}dt_1.$$

Каждый из последних интегралов разбиваем на два, первые из которых вычисляются непосредственно, а вторые по формуле Симпсона. Выполнив все вычисления, получим:

$$J_2\left(\frac{1}{2}\right)=2{,}1570.$$

Вычисление $\frac{dJ_2^{(0)}}{dK}$ производится совершенно так же, как и вычисление всех предыдущих интегралов, а поэтому мы его опускаем:

$$\frac{dJ_2^{(0)}}{dK}=-1{,}76.$$

Подставляя найденные значения $J_1\left(\frac{1}{2}\right)$, $\frac{dJ_1^{(0)}}{dK}$, $J_2\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\frac{dJ_2^{(0)}}{dK}$ в уравнение для h_1, получим:

$$1{,}6860+0{,}54\,h_1=2{,}1570-1{,}76\,h_1,$$

откуда $h_1=0{,}2$. Первое приближение будет равно $0{,}5+0{,}2=0{,}7$. Для определения h_2 будем иметь уравнение:

$$J_1(0{,}7)+h_2\frac{dJ_1^{(1)}}{dK}=J_2(0{,}7)+h_2\frac{dJ_2^{(1)}}{dK}.$$

Вычисление свободного члена и коэфициента этого уравнения производится так же, как и для случая $K=\frac{1}{2}$. Выполнив все вычисления, получим

$$J_1(0{,}7)=1{,}8458,\quad J_2(0{,}7)=1{,}8631,^1$$

$$\frac{dJ_1^{(1)}}{dK}=1{,}18,\quad \frac{dJ_2^{(1)}}{dK}=-1{,}21.$$

Уравнение для h_2 поэтому может быть написано следующим образом:

$$1{,}8458+h_2\,1{,}18=1{,}8631-h_2\,1{,}21$$

или

$$2{,}39h_2=0{,}0173,$$

откуда $h_2=0{,}0072$. Второе приближенное значение K равно 0,7072.

Легко найти точное значение K. Во второй интеграл нашего уравнения для определения K, т. е. в

$$J_2(K)=\int_1^{\frac{1}{K}}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt,$$

[1] Заметим, что в данном частном примере требуемые интегралы можно найти, не пользуясь указанным выше методом, а с помощью таблиц эллиптических интегралов.

введем новую переменную интегрирования x по формуле:

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-K_1^2x^2}},\ \text{где}\ K_1^2=1-K^2.$$

Тогда

$$J_2(K_1)=\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K_1^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Наше уравнение будет иметь вид:

$$\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt=\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K_1^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Следовательно,

$$K=K_1,\ \text{или}\ K^2=1-K^2,$$

откуда

$$K=\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}7071.$$

Сравнивая приближенное значение K с точным, видим, что во втором приближении мы допускаем ошибку, меньшую 0,0002.

n° 5. Отображение произвольного четырехугольника. В n° 3 был указан метод последовательных приближений для определения координат точек, соответствующих вершинам многоугольника, но не было дано доказательства сходимости последовательных приближений к истинному значению решения системы (7). Сейчас мы займемся доказательством сходимости для случая произвольного четырехугольника.

Пусть верхняя полуплоскость конформно отображена на четырехугольник с углами $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$ и $\alpha_4\pi$ и отношением первой стороны ко второй, равным λ. Нумерацию углов предполагаем выбранной так, что $\alpha_1>\alpha_2$. Пусть вершины четырехугольника соответствуют точкам -1, $+1$, $\frac{1}{K}$ и ∞. Отображающая функция будет иметь вид:

$$z=C_1\int_0^t(t+1)^{\alpha_1-1}(t-1)^{\alpha_2-1}\left(t-\frac{1}{K}\right)^{\alpha_3-1}dt+C_2.$$

Для определения K имеем уравнение:

$$\int_{-\infty}^{-1}(-1-t)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K}-t\right)^{\alpha_3-1}dt=$$

$$=\lambda\int_{-1}^{+1}(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K}-t\right)^{\alpha_3-1}dt.$$

Запишем это уравнение символически следующим образом:

$$J_1(K)=\lambda J_2(K).$$

Не трудно показать, что $J_1(K)$, $J_2(K)$, $\frac{dJ_1}{dK}$, $\frac{dJ_2}{dK}$ непрерывные функции параметра K.

Докажем, что уравнения:

$$J_1(K)=\lambda J_2(K)$$

и

$$\frac{dJ_1(K)}{dK}=\lambda\frac{dJ_2(K)}{dK}$$

не совместны.

Предварительно в интеграле $J_1(K)$ заменим переменную по формуле $t=-\frac{1}{z}$, тогда найдем:

$$J_1(K)=\int_{-\infty}^{-1}(-1-t)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K}-t\right)^{\alpha_3-1}dt=$$

$$=K^{1-\alpha_3}\int_0^1(1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K)^{\alpha_3-1}z^{\alpha_4-1}dz;$$

$$\frac{dJ_1}{dK}=\frac{1-\alpha_3}{K^{\alpha_3}}\int_0^1(1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K)^{\alpha_3-1}z^{\alpha_4-1}dz-$$

$$-(1-\alpha_3)K^{1-\alpha_3}\int_0^1(1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K)^{\alpha_3-2}z^{\alpha_4-1}dz;$$

$$\frac{dJ_2}{dK}=\frac{1-\alpha_3}{K^2}\int_{-1}^{1}(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K}-t\right)^{\alpha_3-2}dt.$$

Таким образом, второе уравнение после сокращения на $1-\alpha_3$ может быть написано в виде:

$$\frac{1}{K^{\alpha_3}}\int_0^1(1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K)^{\alpha_3-1}z^{\alpha_4-1}dz-$$

$$-K^{1-\alpha_3}\int_0^1(1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K)^{\alpha_3-2}z^{\alpha_4-1}dz=$$

$$=\frac{\lambda}{K^2}\int_{-1}^{+1}(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K}-t\right)^{\alpha_3-2}dt.$$

В первом интеграле левой части $(z+K)^{\alpha_3-1}$ заменим на $(z+K)^{\alpha_3-2}(z+K)=z(z+K)^{\alpha_3-2}+K(z+K)^{\alpha_3-2}$.

Тогда только что упомянутый интеграл разобьется на два интеграла:

$$\frac{1}{K^{\alpha_3}}\int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K)^{\alpha_3-2}z^{\alpha_4}\,dz+$$

$$+K^{1-\alpha_3}\int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K)^{\alpha_3-2}z^{\alpha_4-1}\,dz.$$

и после подстановки второе уравнение будет иметь вид:

$$\frac{1}{K^{\alpha_3}}\int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K)^{\alpha_3-2}z^{\alpha_4}\,dz=$$

$$=\frac{\lambda}{K^2}\int_{-1}^{+1}(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K}-t\right)^{\alpha_3-2}dt.$$

Займемся первым уравнением.

$$J_1(K)=K^{1-\alpha_3}\int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K)^{\alpha_3-1}z^{\alpha_4-1}\,dz=$$

$$=K^{1-\alpha_3}\int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K)^{\alpha_3-2}z^{\alpha_4}\,dz+$$

$$+K^{2-\alpha_3}\int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K)^{\alpha_3-2}z^{\alpha_4-1}\,dz.$$

$$J_2(K)=\int_{-1}^{+1}(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K}-t\right)^{\alpha_3-1}dt=$$

$$=\frac{1}{K}\int_{-1}^{+1}(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K}-t\right)^{\alpha_3-2}dt-$$

$$-\int_{-1}^{+1}t(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K}-t\right)^{\alpha_3-2}dt.$$

Первое уравнение будет иметь вид:

$$K^{1-\alpha_3}\int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K)^{\alpha_3-2}z^{\alpha_4}\,dz+$$

$$+K^{2-\alpha_3}\int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K)^{\alpha_3-2}z^{\alpha_4-1}dz=$$

$$=\frac{\lambda}{K}\int_{-1}^{+1}(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K}-t\right)^{\alpha_3-2}dt-$$

$$-\lambda\int_{-1}^{+1}t(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K}-t\right)^{\alpha_3-2}dt.$$

Допустим, что уравнения совместны и что K^* решение, справедливое для обоих уравнений. Тогда умножив второе тождество на K и вычтя его из первого, получим:

$$K^{*2-\alpha_3}\int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K^*)^{\alpha_3-2}z^{\alpha_4-1}\,dz+$$

$$+\lambda\int_{-1}^{+1}t(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K^*}-t\right)^{\alpha_3-2}dt=0.$$

Первое слагаемое положительно. Покажем, что и второе также положительно:

Интеграл

$$\int_{-1}^{+1}t(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K^*}-t\right)^{\alpha_3-2}dt$$

разобьем на два: $\int_{-1}^{0}$ и $\int_0^1$, причем в первом интеграле t заменим на $-t$. В результате

$$\int_{-1}^{+1}t(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K^*}-t\right)^{\alpha_3-2}dt=$$

$$=-\int_0^1 t(1-t)^{\alpha_1-1}(1+t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K^*}+t\right)^{\alpha_3-2}dt+$$

$$+\int_0^1 t(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K^*}-t\right)^{\alpha_3-2}dt.$$

Покажем, что при всяком t интервала (0,1) подинтегральная функция первого интеграла меньше подинтегральной функции второго:

$$\left(\frac{1}{K^*}+t\right)^{\alpha_3-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{K^*}+t\right)^{2-\alpha_3}}<\frac{1}{\left(\frac{1}{K^*}-t\right)^{2-\alpha_3}}=$$

$$=\left(\frac{1}{K^*}-t\right)^{\alpha_3-2}.$$

$$(1-t)^{\alpha_1-1}(1+t)^{\alpha_2-1}<(1+t)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}$$

для всех $0<t<1$, так как

$$\frac{(1-t)^{\alpha_1-1}(1+t)^{\alpha_2-1}}{(1+t)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}}=\frac{(1-t)^{\alpha_1-\alpha_2}}{(1+t)^{\alpha_1-\alpha_2}}<1.$$

Поэтому интеграл

$$\int_{-1}^{+1} t\,(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K^*}-t\right)^{\alpha_3-2}dt$$

больше нуля. Следовательно,

$$K^{*2-\alpha_3}\int_0^1(1-z)^{\alpha_1-1}(1+z)^{\alpha_2-1}(z+K^*)^{\alpha_3-2}z^{\alpha_4-1}dz+$$

$$+\lambda\int_{-1}^{+1} t\,(t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\left(\frac{1}{K^*}-t\right)^{\alpha_3-2}dt,$$

отлично от нуля, и предположение, что уравнения $J_1K=\lambda J_2(K)$ и $\frac{dJ_1}{dK}=\lambda\frac{dJ_2}{dK}$ имеют совместный корень $K=K^*$ — не верно.

Если для краткости обозначим $J_1(K)-\lambda J_2(K)$ через $\Phi(K)$, то доказанное предложение можно формулировать следующим образом.

Около корня уравнения $\Phi(K)=0$ (из теоремы единственности функции, отображающей две заданных области друг на друга, следует, что это уравнение имеет решение и притом единственное) существует некоторый интервал, в котором $\Phi'(K)$ отлична от нуля.

Уравнение $\Phi(K)=0$ будем решать по методу Ньютона-Фурье. Пусть K^* — решение этого уравнения. Очевидно, что существует постоянное число L такое, что

$$|\Phi'(K^*)|\geqslant 4L.$$

В силу непрерывности $\Phi'(K)$ можно около K^* выбрать такой интервал γ, что, при изменении K внутри этого интервала, $|\Phi'(K)|$ будет изменяться менее чем на $\frac{1}{4}$ своего значения в корне уравнения

$\Phi(K)=0$, т. е. что при изменении K внутри γ все время будут выполняться неравенства:

$$3L<|\Phi'(K)|<5L.$$

Предположим теперь, что за начальное значение K взято число a_0, лежащее внутри интервала γ. Следующие последовательные приближения обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Разности (K^*-a_k) обозначим через h'_{k+1}, а разности $(a_{k+1}-a_k)$ через h_{k+1} $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Докажем, что

$$|h'_{k+2}|<|h'_{k+1}|.$$

Сначала докажем это для $k=1$; h_1 мы определяем из уравнения

$$\Phi(a_0)+h_1\Phi'(a_0)=0;$$

h_1' по теореме о среднем может быть определено из уравнения:

$$\Phi(a_0)+h_1'\Phi'(a_0+\vartheta h_1')=0 \qquad 0<\vartheta<1.$$

Следовательно:

$$h_1=-\frac{\Phi(a_0)}{\Phi'(a_0)}$$

и

$$h_1'=-\frac{\Phi(a_0)}{\Phi'(a_0+\vartheta h')},$$

$$h_1'-h_1=\Phi(a_0)\left[\frac{1}{\Phi'(a_0)}-\frac{1}{\Phi'(a_0+\vartheta h')}\right].$$

Но $h_1'-h_1=h_2'$, и поэтому

$$|h_2'|<|\Phi(a_0)|\cdot\left[\frac{1}{3L}-\frac{1}{5L}\right],$$

то есть

$$|h_2'|<\frac{2|\Phi(a_0)|}{15L}<\frac{2}{3}|h_1'|.$$

Таким же образом можно доказать, что

$$|h_3'|<\frac{2}{3}|h_2'|, \qquad |h_4'|<\frac{2}{3}|h_3'|, \ldots, |h'_{k+1}|<\frac{2}{3}|h_k'|.$$

При k достаточно большом, h'_{k+1} может быть сколь угодно малым, т. е. при $k\to\infty$ мы получим $h_k'\to 0$.

Итак, если начальное приближение достаточно близко к искомому корню, то метод Ньютона-Фурье в данном случае наверное приводит к нужному результату.

Настоящий параграф составлен аспирантом Института математ. и мех. Лен. унив. Стениным Н.

ГЛАВА VI

ПРИНЦИПЫ ПРИЛОЖЕНИЯ КОНФОРМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

§ 1. Введение

n° 1. О преобразовании оператора Лапласа. В предыдущей главе мы исследовали конформное преобразование областей друг в друга. Сейчас мы имеем в виду дать принципы его приложения к решению ряда задач математической физики.

В задачах интересующего нас типа, как мы уже имели случай отмечать, решение определяется тремя обстоятельствами: уравнением, определяющим класс функций, отвечающих изучаемому процессу; областью, для которой ищется решение, зависящей от формы изучаемого объекта, и, наконец, предельными условиями.

Пусть вместо старых независимых переменных x и y мы ввели новые переменные ξ и η при помощи равенств:

$$\xi = \xi(x, y),$$
$$\eta = \eta(x, y).$$

Искомая функция $u(x, y)$ перейдет в некоторую новую функцию u от ξ и η. При этом, вообще говоря, изменяется как дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция u, так и область, в которой она ищется, и предельные условия, которые должны быть соблюдены на границе области. Может оказаться, при надлежащем выборе новых переменных ξ и η, что новая преобразованная задача будет проще исходной, и поставленная проблема, трудно разрешимая в старых переменных, станет легко разрешимой в новых.

Оставляя в стороне общую теорию подобного рода преобразований, мы займемся сейчас так называемыми конформными преобразованиями, доставляемыми парами сопряженных гармонических функций или, что то же самое, аналитическими функциями комплексной переменной.

Пусть $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x};$$

$f(z) = \xi + i\eta$ будет моногенной функцией комплексной переменной

$z = x + iy$. Посмотрим, как преобразуется оператор Лапласа. Легко видеть, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} +$$
$$+ 2\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} +$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial \xi}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)$$

или, если воспользоваться уравнениями Коши-Римана и гармоничностью ξ и η,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

Таким образом, оператор Лапласа $\Delta_{xy} u$ в старых переменных после преобразования принимает вид:

$$\Delta_{xy} u = |f'(z)|^2 \Delta_{\xi\eta} u. \tag{1}$$

Отсюда следует тот известный результат, что функция, гармоническая до преобразования, будет гармонической и после него, ибо $|f'(z)|$ вообще отличен от нуля.

Отметим еще один важный с точки зрения практических приложений факт. Пусть в переменных x, y нам задано уравнение Пуассона

$$\Delta_{xy} u = \varphi,$$

где φ — известная функция от x и y.

После преобразования это уравнение примет вид:

$$\Delta_{\xi\eta} u = \frac{1}{|f'(z)|^2}\varphi = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 \varphi, \qquad \zeta = \xi + i\eta.$$

Мы получили вновь уравнение Пуассона, правда с измененной правой частью. Это обстоятельство дает возможность широко применять конформное преобразование к исследованию задач, связанных с уравнением Пуассона, например, задач о кручении однородных изотропных балок и стержней.

n° 2. О преобразовании бигармонического оператора. Формула Гурса. Связь бигармонических функций с плоской задачей теории упругости. Под именем бигармонического оператора понимают оператор вида:

$$\Delta_{xy}\Delta_{xy} = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Функции же, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta_{xy}\Delta_{xy} u = 0, \tag{2}$$

носят название бигармонических.

Из результата, установленного нами относительно оператора Лапласа в прошлом n°, вытекает, что после преобразования области B плоскости $z = x + iy$ при помощи функции $\zeta = f(z) = \xi + i\eta$ бигармонический оператор примет вид:

$$\Delta_{xy}\Delta_{xy}u = |f'(z)|^2 \Delta_{\xi\eta}(|f'(z)|^2 \Delta_{\xi\eta}u). \tag{3}$$

Отсюда видно, что функция $u(x, y)$ бигармоническая до преобразования, вообще говоря, не будет бигармонической по переменным ξ, η. Бигармонический характер ее сохранится лишь в том случае, когда $|f'(z)| = \text{const}$, т. е. при линейном преобразовании вида $\zeta = \alpha z + \beta$.

Э. Гурса [1] была впервые установлена чрезвычайно важная в теории бигармонических функций формула, позволяющая весьма просто выразить эти функции через две аналитических функции комплексного переменного.

Согласно (2), $\Delta_{xy}u = r(x, y)$ должна быть гармонической функцией. Обозначим через $s(x, y)$ сопряженную с ней функцию.

$$f(z) = r + is$$

будет аналитической функцией от z. Введем функцию:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}\int f(z)\,dz = p + iq,$$

причем

$$\Delta p = \Delta q = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4}r, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{4}s.$$

На основании этих равенств без затруднений можно проверить, что $u - xp - yq$ будет гармонической функцией. Назовем ее p_1 и обозначим $\chi(z)$ функцию комплексной переменной, для которой p_1 является вещественной частью:

$$u = xp + yq + p_1 = R[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]. \tag{4}$$

Можно показать, что и обратно при всяких аналитических функциях $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ формула (4) дает бигармоническую функцию.

Отметим еще, что при заданной функции u, входящие в формулу (4) $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ определяются не вполне и содержат некоторый произвол. В самом деле, по известной $r(x, y)$ функция $f(z)$ определится с точностью до чисто мнимого слагаемого ai, и поэтому $\varphi(z)$ найдется только с точностью до слагаемого вида

$$C + aiz,$$

где C — произвольная комплексная постоянная. Его мы можем фиксировать, задав произвольно в какой-либо точке z_0 значение самой функции $\varphi(z)$ и мнимой части ее производной, например:

$$\varphi(z_0) = 0, \qquad I[\varphi'(z_0)] = 0.$$

[1] E. Goursat, Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$, Bull. de la Soc. Math. de France, 1898, Vol. 26.

Далее, функция $\chi(z)$ найдется с точностью до чисто мнимой постоянной, которую можно определить, задав значение мнимой части $\chi(z)$ в z_0, например, подчинив ее требованию:

$$I[\chi(z_0)] = 0.$$

Уравнение (4) позволяет просто определить вид функций, в которые перейдут бигармонические функции в плоскости $z = x + iy$ после конформного преобразования.

Обозначим через $z = \omega(\zeta)$ функцию, обратную $\zeta = f(z)$, и положим:

$$\varphi[\omega(z)] = \Phi(\zeta), \qquad \chi[\omega(\zeta)] = \mathrm{X}(\zeta).$$

$u(x, y)$ после преобразования примет вид:

$$u = R[\overline{\omega(\zeta)}\,\Phi(\zeta) + \mathrm{X}(\zeta)], \tag{5}$$

где $\Phi(\zeta)$ и $\mathrm{X}(\zeta)$ — произвольные аналитические функции переменной ζ, причем первая из них определяется при заданной функции u с точностью до слагаемого вида $C + ai\omega(\zeta)$, вторая же с точностью до мнимой постоянной.

Укажем вкратце на связь между плоской задачей теории упругости и функциями комплексной переменной. Для более обстоятельного знакомства с этим вопросом мы отсылаем читателя к прекрасной книге Н. И. Мусхелишвили „Некоторые задачи теории упругости“, изд. Академии наук СССР, 1933 г., глава II.

В случае отсутствия внешних сил уравнения плоской задачи имеют, если сохранить обычные обозначения, следующий вид:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0,$$
$$X_x = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Y_y = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{6}$$
$$X_y = Y_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$
$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Кроме того должны быть выполнены так называемые условия совместности Бельтрами-Мичеля, которые в нашем случае приводятся к одному уравнению

$$\Delta(X_x + Y_y) = 0. \tag{7}$$

Первое из написанных уравнений дает необходимое и достаточное условие того, чтобы существовала некоторая функция B, удовлетворяющая условию:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -X_y, \qquad \frac{\partial B}{\partial y} = X_x.$$

Совершенно так же из второго вытекает существование функции A, для которой

$$\frac{\partial A}{\partial x} = Y_y, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = -X_y = -Y_x.$$

Сравнение двух выражений для X_y покажет, что

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Следовательно, должна существовать функция двух переменных $U(x, y)$ такая, что

$$A = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Компоненты напряжения выражаются через нее по формулам:

$$X_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \qquad X_y = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \qquad Y_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \tag{8}$$

$U(x, y)$ называется функцией Эри, по имени знаменитого английского астронома Дж. Бидделя Эри, впервые обратившего внимание на ее существование.

Из условия Бельтрами-Мичеля вытекает, так как $X_x + Y_y = \Delta U$, что $U(x, y)$ должна быть бигармонической

$$\Delta\Delta U = 0. \tag{9}$$

В силу полученных в n° 2 результатов найдутся две аналитические функции комплексной переменной $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ такие, что

$$U = R[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]. \tag{10}$$

Нам ниже потребуются еще выражения для частных производных от $U(x, y)$.

Дифференцируя (10) по x и y и [полагая всюду $\chi'(z) = \psi(z)$, получим:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = R[\varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \psi(z)],$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = R[-i\varphi(z) + \bar{z}i\varphi'(z) + i\psi(z)].$$

Удобнее, однако, часто пользоваться не этими формулами, а следующими их комбинациями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} + i\dfrac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} - i\dfrac{\partial U}{\partial y} = \overline{\varphi(z)} + \bar{z}\varphi'(z) + \psi(z). \end{cases} \tag{11}$$

Дадим комплексное представление смещений и напряжений:

$$\begin{cases} X_x + iX_y = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} - i\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -i\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + i\dfrac{\partial U}{\partial y}\right), \\ X_x + iX_y = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)}; \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} Y_y - iX_y = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + i\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + i\dfrac{\partial U}{\partial y}\right), \\ Y_y - iX_y = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}. \end{cases} \tag{12'}$$

Из формул (12) и (12′) легко получаются два следующих более простых выражения:

$$X_x + Y_y = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4R[\varphi'(z)],$$

$$Y_y - X_y + 2iX_y = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)].$$

Вопрос о выражении компонентов смещения u и v через бигармоническую функцию U приводится к задаче о нахождении u и v из уравнений:

$$\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \qquad \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Первые два из них, решенные относительно $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, дают:

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}\Delta U, \tag{13}$$

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}\Delta U,$$

или, так как

$$\Delta U = r = 4\frac{\partial p}{\partial x} = 4\frac{\partial q}{\partial y},$$

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Интегрируя эти равенства соответственно по x и y, получим:

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}p + F_1(y),$$

$$2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}q + F_2(x).$$

Подставив найденные выражения в третье из уравнений, после сокращений имеем:

$$F_1'(y) + F_2'(x) = 0,$$

откуда вытекает, что

$$F_1(y) = -\gamma y + \alpha, \qquad F_2(x) = \gamma x + \beta,$$

где α, β и γ — произвольные постоянные. Эти выражения дают жесткое смещение тела, не имеющее значения при исследовании его упругих свойств. Отбрасывая их, окончательно получим:

$$(14) \quad \begin{cases} 2\mu u = -\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} p, \\ 2\mu v = -\dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} q. \end{cases}$$

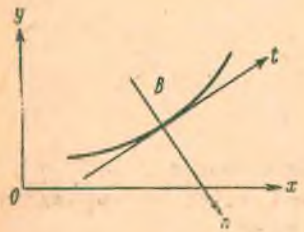


Рис. 45

Умножим вторую формулу на i и сложим с первой:

$$2\mu(u+iv) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\varphi(z),$$

откуда, ввиду (11), если положить

$$\varkappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu},$$

вытекает следующая очень удобная формула:

$$(15) \qquad 2\mu(u+iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}.$$

Основными задачами теории упругости являются две следующие:

1) определение упругого равновесия по заданным внешним напряжениям, приложенным к границе L тела B;

2) определение упругого равновесия по заданным смещениям точек границы L тела B.

Получим предельные условия для первой из них.

Примем за положительное направление нормали внешнее относительно области B, как это обычно делается в теории упругости, с тем, чтобы направления нормали и касательной были расположены относительно друг друга так же, как оси x и y.

Под напряжением $X_n ds$ и $Y_n ds$, действующими на элемент контура, будем подразумевать, как обычно, напряжение, действующее со стороны положительной нормали:

$$X_n = X_x\cos(n,x) + X_y\cos(n,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\cos(n,x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cos(n,y),$$

$$Y_n = Y_x\cos(n,x) + Y_y\cos(n,y) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cos(n,x) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cos(n,y),$$

или, так как для внешней нормали

$$\cos(n,x) = \cos(t,y) = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos(n,y) = -\cos(t,x) = -\frac{dx}{ds},$$

имеем:

$$X_n = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

$$Y_n = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

В комплексной же форме

$$X_n + iY_n = -i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = i\int_{s_0}^{s}(X_n + iY_n)\,ds + \text{const}.$$

Обозначив интеграл, стоящий в правой части, через $f_1(s) + if_2(s)$ и внося в предыдущее равенство вместо левой части ее выражение (11), получаем предельное условие задачи в форме:

$$(16) \qquad \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f_1(s) + if_2(s) + \text{const на } L.$$

Комбинация $\dfrac{\partial U}{\partial x} + i\dfrac{\partial U}{\partial y}$ определена лишь с точностью до постоянного слагаемого, и поэтому постоянную в правой части мы можем фиксировать произвольно.

Предельные условия во второй основной задаче являются прямым следствием формулы (15). Если через $g_1(s)$ и $g_2(s)$ обозначить компоненты смещения точек контура, получим:

$$(17) \qquad \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2\mu(g_1 + ig_2).$$

Кроме написанных предельных условий (16) или (17), функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ должны внутри области удовлетворять еще некоторым требованиям, вытекающим из физического смысла проблемы. Не входя в подробности, мы перечислим их.

Если область ограничена и односвязна, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ должны быть однозначны и регулярны во всей области.

Пусть область многосвязна и ограничена внутренними контурами $L_1, L_2, \ldots L_m$ и внешним L_{m+1}. Функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ в этом случае будут, вообще говоря, многозначны.

Обозначим через X_k и Y_k главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру L_k. Можно показать, что при условии однозначности

смещений и напряжений здесь:

$$(18)\quad \begin{cases} \varphi(z) = -\dfrac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} (X_k + iY_k) \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \\ \psi(z) = \dfrac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} (X_k - iY_k) \ln(z - z_k) + \psi^*(z), \end{cases}$$

где $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ — однозначные аналитические функции в B, а z_k — точка, лежащая внутри контура L_k.

Если же потребовать однозначности только напряжений, допустив многозначность смещений, $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ будут иметь вид:

$$(18)'\quad \begin{cases} \varphi(z) = z \displaystyle\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} (a_k + ib_k) \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \\ \chi(z) = z \displaystyle\sum_{k=1}^{m} (a_k' + i b_k') \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} (a_k'' + ib_k'') \ln(z - z_k) + \psi^*(z); \end{cases}$$

A_k, a_k, b_k, a_k', b_k', a_k'', b_k'', — некоторые постоянные, механического значения которых мы приводить не станем и которые должны быть определены из условий задачи.

Представляет существенный интерес случай бесконечной области. Ограничимся тем случаем, когда область состоит из внешности нескольких замкнутых контуров $L_1, L_2, \ldots L_m$.

Пусть X, Y суть компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных к границе области, так что

$$X = \sum_{k=1}^{m} X_k, \qquad Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k.$$

Если предположить ограниченность компонентов напряжения вблизи бесконечно далекой точки, то функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ должны иметь строение:

$$(19)\quad \begin{cases} \varphi(z) = -\dfrac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)} \ln z + (B + iC) z + \varphi_0(z), \\ \psi(z) = \dfrac{\varkappa(X - iY)}{2\pi(1+\varkappa)} \ln z + (B' + iC') z + \psi_0(z). \end{cases}$$

При этом $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ — функции, голоморфные в области бесконечно далекой точки:

$$\varphi_0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$$

$$\psi_0(z) = a_0' + \frac{a_1'}{z} + \frac{a_2'}{z^2} + \ldots$$

и начало координат считается лежащим вне области.

Постоянные B, C, B', C', входящие в формулы (19), имеют простой физический смысл. Если обозначить через $X_x(\infty)$, $Y_y(\infty)$, $X_y(\infty)$ пределы, к которым стремятся X_x, Y_y, X_y при удалении точки на бесконечность, то

$$X_x(\infty) = 2B - B', \qquad Y_y(\infty) = 2B + B', \qquad X_y(\infty) = C'.$$

Отсюда следует, если N_1 и N_2 — суть главные напряжения на бесконечности и α — угол, который образует главная ось, соответствующая N_1, с осью x,

$$B = \frac{N_1 + N_2}{4}, \quad B' = -\frac{N_1 - N_2}{2} \cos 2\alpha, \quad C' = \frac{N_1 - N_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Постоянная C не влияет на напряжения и связана с вращением бесконечно далекой точки плоскости:

$$\frac{1+\varkappa}{2\mu} C = \lim_{z \to \infty} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Мы имели случай выше отметить, что функции φ и ψ содержат произвольные элементы. Чтобы сделать задачу определенной, необходимо фиксировать каким-либо способом этот произвол. Само собой разумеется, число произвольных элементов будет зависеть от рода задачи.

Так, в первой основной задаче для ограниченных областей мы можем фиксировать произвольно в какой-либо точке области значения φ, ψ и мнимую часть φ', положив, например:

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad I[\varphi'(0)] = 0.$$

Если же мы фиксировали постоянную в равенстве (16), то можно распоряжаться выбором лишь одной из постоянных $\varphi(0)$ и $\psi(0)$.

Отметим здесь же, что, когда область многосвязна, постоянную равенства (16) мы имеем право задавать произвольно лишь на одном из контуров L_k. Значения ее на остальных контурах должны быть определены при решении задачи.

Когда область бесконечна, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют строение (19). В этих формулах мы можем считать:

$$\varphi_0(\infty) = 0, \qquad \psi_0(\infty) = 0, \qquad C = 0,$$

с аналогичной оговоркой для постоянной условия (16).

Во второй основной задаче для ограниченных областей можно фиксировать только одно из значений $\varphi(0)$ или $\psi(0)$, например, считая

$$\varphi(0) = 0.$$

Аналогично для бесконечной области:

$$\varphi_0(\infty) = 0.$$

Более подробное изложение всех приведенных результатов читатель может найти в указанной нами книге Н. И. Мусхелишвили.

n° 3. Преобразование предельных условий. Наиболее простым случаем изменения предельных условий при конформном преобразовании будет тот, когда эти условия относятся только к искомым функциям, как это имеет место, например, в задачах Дирихле и Гильберта.

Чтобы составить предельные условия, которым должна удовлетворять искомая функция после преобразования, здесь достаточно знать соответствие между точками границ преобразуемых областей.

Немного более сложным является случай, когда в предельные условия входят производные по какому-либо направлению от искомой функции.

Рассмотрим производную $\frac{\partial u}{\partial l}$ в направлении l от функции u. Совершим конформное преобразование плоскости z при помощи функции $\zeta = f(z)$. Направление l при преобразовании перейдет в некоторое направление λ плоскости ζ, при этом производные по обоим направлениям будут связаны друг с другом следующим очевидным равенством:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dl},$$

где $\frac{d\lambda}{dl}$ — коэфициент растяжения в соответствующих направлениях. В силу конформности он не будет зависеть от направлений и будет изменяться лишь при изменении рассматриваемой точки плоскости. Численно он равен, как известно, модулю производной $f'(z)$.

Таким образом, мы имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial \lambda} |f'(z)| = \frac{\partial u}{\partial \lambda} \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|.$$

Пользуясь этим результатом, можно, например, показать, что, если искомая функция на контуре L области B до преобразования должна была удовлетворять соотношению:

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + l \frac{\partial u}{\partial s} + mu = d,$$

где k, l, m, d — заданные функции положения точки контура, то на границе преобразованной области должно быть соблюдено равенство:

$$k \frac{\partial u}{\partial \nu} + l \frac{\partial u}{\partial \sigma} + m \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| u = d \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|,$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ и $\frac{\partial}{\partial \sigma}$ производные по нормали и дуге преобразованного контура.

Среди обширного класса проблем, приводящих к бигармоническим функциям и соответствующих им различных предельных условий, мы остановимся лишь на наиболее часто встречающихся задачах.

Рассмотрим первую основную задачу:

1. **Найти функцию u, бигармоническую внутри области, по заданным значениям на контуре самой функции и ее нормальной производной:**

$$u = \omega_1(s), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \omega_2(s). \tag{20}$$

Мы сформулировали задачу в обычном виде. Для нас, однако, удобнее несколько иная формулировка. Легко видеть, что условия (20) дают нам значения на контуре области частных производных от искомой функции по координатным осям. Действительно:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial s}\cos(s,x) + \dfrac{\partial u}{\partial n}\cos(n,x) = \\ = \omega_1'(s)\cos(s,x) + \omega_2(s)\cos(n,x) = \omega_3(s), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial s}\cos(s,y) + \dfrac{\partial u}{\partial n}\cos(n,y) = \\ = \omega_1'(s)\cos(s,y) + \omega_2(s)\cos(n,y) = \omega_4(s). \end{cases} \tag{21}$$

Воспользовавшись формулой Гурса и равенствами (11), мы можем новые предельные условия записать в форме:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \omega_2 + i\omega_4 = F, \tag{22}$$

что вполне совпадает с (16).

Обратимся ко второй основной задаче.

2. **Нужно найти бигармоническую функцию, если известно, что входящие в состав ее функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ удовлетворяют на границе области условию:**

$$\varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = \Phi, \tag{23}$$

где Φ — заданная функция комплексной переменной.

Посмотрим, как изменятся предельные условия (22) и (23) при конформном преобразовании.

Введем вместо переменной z новую переменную ζ при помощи соотношения:

$$z = \omega(\zeta),$$

преобразующего область G в B.

Результат подстановки в $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ вместо z его значения обозначим через $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$:

$$\varphi[\omega(\zeta)] = \varphi_1(\zeta), \qquad \psi[\omega(\zeta)] = \psi_1(\zeta).$$

Так как

$$\varphi'(z) = \frac{d\varphi}{dz} = \varphi_1'(\zeta)\frac{1}{\omega'(\zeta)},$$

равенства (22) и (23) примут вид:

$$\varphi_1(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi_1'(\zeta)} + \overline{\psi_1(\zeta)} = F, \tag{24}$$

$$\varkappa\varphi_1(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi_1'(\zeta) - \overline{\psi(\zeta)} = \Phi. \tag{25}$$

Замечание. Для существования решения первой основной задачи для ограниченных областей необходимо соблюдение равенства нулю главного вектора всех внешних усилий, приложенных к контуру области, и равенства нулю главного момента этого вектора.

Главный вектор $X+iY$ очевидно имеет следующее выражение:

$$X+iY = \int_L (X_n+iY_n)\,ds = \frac{1}{i}\Big|_L (f_1+if_2) = \frac{1}{i}\Big|_L F,$$

поэтому равенство нулю его приводит к равенству нулю интеграла:

$$\int_L (X_n+iY_n)\,ds, \tag{26}$$

взятого по всему контуру области, или, что то же самое, к равенству нулю приращения $f_1(s)+if_2(s)=F$ при обходе по контуру:

$$\Big|_L F = \Big|_L f_1(s)+if_2(s) = 0. \tag{26'}$$

После конформного преобразования это сведется к равенству нулю приращения функции F, стоящей в правой части равенства (24).

Что касается главного момента, то равенство его нулю после интегрирования по частям принимает следующий вид:

$$0 = \int_L (xY_n - yX_n)\,ds = -\int_L (x\,df_1 + y\,df_2) =$$
$$= -\Big|_L xf_1 + yf_2 + \int_L f_1\,dx + f_2\,dy,$$

или, если главный вектор равен нулю и приращения функций f_1 и f_2 вдоль контура равны нулю:

$$\int_L f_1\,dx + f_2\,dy = 0. \tag{27}$$

С другой стороны, как сразу же видно, для функции F, стоящей в правой части равенства (24), это сводится к следующему:

$$R\left[\int_L F\,\overline{dz}\right] = 0. \tag{28}$$

После же конформного преобразования области B при помощи равенства $z=\omega(\zeta)$ последнее условие сведется к следующему:

$$R\left[\int_\Gamma F\omega'(\zeta)\,\overline{d\zeta}\right] = 0. \tag{29}$$

n° 4. Интегралы типа Коши. Их вычисление. Позже, при исследовании вопроса о приведении задач математической физики к функциональным, в частности интегральным, уравнениям, нам придется иметь дело с интегралами специального вида, которые ввиду аналогии их строения со строением широко известного интеграла Коши, получили название интегралов типа Коши.

Пусть L произвольная спрямляемая кривая и $F(z)$ — произвольная функция комплексной переменной z, определенная в точках L и абсолютно интегрируемая вдоль нее, т. е. такая, что сходится интеграл:

$$\int_L |F(z)|\,ds.$$

Под интегралом типа Коши подразумевают интеграл следующего вида:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(t)}{t-z}\,dt. \tag{30}$$

Он, очевидно, абсолютно сходится при всяком z, лежащем вне L, и будет аналитической функцией от z. Однако, характер зависимости его от z может быть весьма сложным.

Так, если L — простая разомкнутая кривая, интеграл представляет собой одну только аналитическую функцию, определенную во всех точках плоскости, за исключением точек L, которые, вообще говоря, для этой функции являются особыми. Если L — простая замкнутая кривая, то интеграл будет представлять собой две функции, различные между собой — одну внутри контура L, другую же вне его. Ни одна из них не является, за исключением тривиального случая $F(t)=0$, продолжением другой. Однако, между предельными значениями их на L и функцией $F(t)$ существует определенное соотношение, справедливое при частных предположениях о функции $F(t)$.

Мы приведем его без доказательства, отсылая читателя, желающего ознакомиться с его доказательством, к специальной литературе.[1]

Сейчас и всюду ниже, где нам придется иметь дело с интегралами типа Коши и переходить к пределу на контур, мы будем предполагать функцию $F(t)$, стоящую под знаком этого интеграла, непрерывной и удовлетворяющей условию Гельдера, которое заключается в следующем: существуют два положительных числа M и α

[1] См. например E. Picard, Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles, Gauthier-Villars, 1927, стр. 67, или Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, стр. 205, где этот вопрос исследован для частного случая, когда L — окружность.

таких, что для всякой пары точек z' и z'' на L выполнено неравенство:

$$|F(z') - F(z'')| \leq M |z' - z''|^{\alpha}.$$

Контур L будем считать, простоты ради, кусочно гладким. Когда точка z лежит на самом контуре, интеграл (30) лишен смысла, ибо функция $\frac{F(t)}{t-z}$ не интегрируема вдоль L. Под значением интеграла понимают тогда его главное значение. Отложим от точки z в ту и другую сторону дугу длины ε. Оставшуюся часть назовем L_ε. Интеграл вдоль нее имеет смысл, ибо точка z лежит вне L_ε. Будем ε уменьшать до нуля. Предел, к которому стремится интеграл по L_ε, и будет главным значением (30) в точке z на L.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{F(t)}{t+z}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)}{t-z}\, dt.$$

Назовем $f_i(z_0)$ и $f_e(z_0)$ пределы, к которым стремится (30) при приближении z к z_0 соответственно изнутри и извне L.[1]

Предположение, которое мы имеем в виду сформулировать, дается двумя следующими равенствами:

$$(31)\quad \begin{cases} f_i(z_0) = \dfrac{1}{2} F(z_0) + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_L \frac{F(t)}{t-z_0}\, dt, \\ f_e(z_0) = -\dfrac{1}{2} F(z_0) + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_L \frac{F(t)}{t-z_0}\, dt. \end{cases}$$

Формулы (31) имеют место, если z_0 не угловая точка. В противном случае они должны быть заменены двумя следующими:

$$(31')\quad \begin{cases} f_i(z_0) = \dfrac{\delta_{z_0}}{2\pi} F(z_0) + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_L \frac{F(t)}{t-z_0}\, dt, \\ f_i(z_0) = -\dfrac{2\pi - \delta_{z_0}}{2\pi} F(z_0) + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_L \frac{F(t)}{t-z_0}\, dt, \end{cases}$$

где δ_{z_0} — внешний угол области в точке z_0.

Исследуем поведение производной

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)}{(t-z)^2}\, dt$$

[1] Можно показать, что эти пределы существуют при приближении z к z_0 по любому некасательному пути.

вблизи L. Допустим, что $F(t)$ имеет непрерывную производную по t вдоль контура L, удовлетворяющую условию Гельдера. Вычислим интеграл по частям следующим приемом:

$$f'(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L F(t) \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t-z}\right) dt = -\frac{1}{2\pi i} \left| \frac{F(t)}{t-z} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_t'(t)}{t-z}\, dt. \right.$$

Внеинтегральное слагаемое правой части, ввиду однозначности $F(t)$ на L, дает нуль; интеграл же имеет уже рассмотренный вид, с той только разницей, что теперь под знаком его стоит не $F(t)$, а $F'(t)$. При приближении к контуру L $f'(t)$ будет стремиться к интегралу, вычислить который, пользуясь формулами (31), не представит труда.

Тот же прием мы, очевидно, можем применить и к производной порядка n. Если $F(t)$ имеет производную n-го порядка вдоль контура L, удовлетворяющую условию Гельдера, то

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)}{(t-z)^{n+1}}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_t^{(n)}(t)}{t-z}\, dt$$

стремится к определенному пределу, когда z приближается к точке z_0 контура L по любому некасательному пути.

Несколько слов о вычислении интегралов типа Коши. Если положить $dt = e^{i\alpha}\, ds$, $t - z = re^{i\varphi}$ и обозначить через (n_t, r) угол, образуемый внутренней нормалью n_t с r — отрезком, соединяющим точки z и t, считаемый в направлении от нормали n_t к r, то, как мы подробно выясняли в главе V § 9 п° 1:

$$\frac{dt}{t-z} = \frac{i}{r} e^{-i(n_t, r)}\, ds = \frac{i}{r} [\cos(n_t, r) - i \sin(n_t, r)].$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)}{t-z}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{F \cos(n_t, r)}{r}\, ds - \frac{i}{2\pi} \int_L \frac{F \sin(n_t, r)}{r}\, ds.$$

Первый интеграл, представляющий собою логарифмический потенциал двойного слоя, весьма упрощается в смысле его вычисления, если его представить под видом интеграла Стильтьеса:

$$\frac{\cos(n_t, r)}{r}\, ds = d\omega,$$

где $d\omega$ — элементарный угол, под которым виден элемент дуги ds из

точки z, и поэтому первый интеграл может быть записан в следующей гораздо более простой и удобной для вычисления форме:

$$\frac{1}{2\pi}\int_L F(t)\,d\omega.$$

Если ω есть монотонная функция длины дуги s, то последний интеграл обращается просто в интеграл Римана, взятый по углу ω в пределах от нуля до 2π, соответствующих обходу по всему контуру:

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{F\cos(n_t, r)}{r}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\,d\omega.$$

Иначе говоря, величина интеграла есть среднее арифметическое значение функции $F(t)$, взятое по углу ω.

Второй интеграл представляет в смысле вычислений несколько большие затруднения. Если его преобразовать, как и первый, к углу ω, он примет вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{F\sin(n_t, r)}{r}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_L F\operatorname{tg}(n_t, r)\,d\omega.$$

Для частного случая монотонности ω как функции s интеграл будет равен также среднему арифметическому, но уже не от функции $F(t)$, а от произведения $F(t)\operatorname{tg}(n_t, r)$.

Подобное преобразование особенно выгодно в том случае, когда r не будет касаться кривой L, т. е. $(n_t, r) \neq \frac{\pi}{2}$; в противном случае $\operatorname{tg}(n_t, r)$ обращается в бесконечность и интеграл становится несобственным.

В приложениях интеграла Коши к задачам математической физики и механики весьма важную роль играет теорема, впервые высказанная в 1855 году Гарнаком, которая говорит следующее:[1]

Пусть L — окружность радиуса R, и $F(\vartheta)$ — вещественная кусочно непрерывная функция полярного угла ϑ.

Если равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(\vartheta)}{t-z}\,dt = 0, \qquad t = Re^{i\vartheta}$$

имеет место для всяких z, лежащих внутри круга $|z| < R$, то $F(\vartheta) = 0$ всюду, за исключением может быть точек разрыва.

Если же написанное равенство имеет место для всяких z, лежащих вне круга, то $F(\vartheta)$ равно постоянной, опять может быть за исключением точек разрыва.

[1] Мы даем формулировку теоремы Гарнака в упрощенной, но достаточно общей для приложений форме.

Ввиду аналогии доказательства обеих частей теоремы, мы установим, например, лишь первую часть ее.

Разложим $f(z)$ по степеням z.

Так как

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \frac{z^2}{t^3} + \dots,$$

имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(\vartheta)}{t-z}\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu,$$

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_L F(\vartheta)\,t^{-\nu-1}\,dt = \frac{1}{2\pi R^\nu}\int_0^{2\pi} F(\vartheta)\,e^{-i\nu\vartheta}\,d\vartheta.$$

В силу равенства нулю степенного ряда, все коэфициенты a_ν его должны равняться нулю, т. е. должны равняться нулю все коэфициенты ряда Фурье для функции $F(\vartheta)$, что может быть лишь в том случае, когда $F(\vartheta)$ либо всюду нуль, либо отлична от нуля только в точках разрыва. Этим все доказано.

Из теоремы Гарнака вытекают два простые, но существенные для нас следствия:

1) Если $F_1(\vartheta)$ и $F_2(\vartheta)$ две вещественные кусочно непрерывные функции и равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_1(\vartheta)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_2(\vartheta)}{t-z}\,dt$$

имеет место для всяких $|z| < R$, то

$$F_1(\vartheta) = F_2(\vartheta),$$

за исключением может быть точек разрыва функций $F_1(\vartheta)$ и $F_2(\vartheta)$.

Если это равенство имеет место для всяких $|z| > R$, то

$$F_1(\vartheta) = F_2(\vartheta) + \text{const},$$

за возможным исключением точек разрыва.

2) Если $F_1(\vartheta)$ и $F_2(\vartheta)$ две произвольные кусочно непрерывные комплексные функции от ϑ и равенства:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_1(\vartheta)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_2(\vartheta)}{t-z}\,dt,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{F_1(\vartheta)}}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{F_2(\vartheta)}}{t-z}\,dt$$

имеют место при всяких $|z|<R$, то

$$F_1(\vartheta)=F_2(\vartheta).$$

Если же оно имеет место при $|z|>R$, то

$$F_1(\vartheta)=F_2(\vartheta)+\text{const}.$$

Исключение в обоих случаях могут составлять точки разрыва.

Первое следствие совершенно очевидно. Второе может быть сведено к первому путем сложения и вычитания входящих в его формулировку интегральных равенств.

Причина важности роли теоремы Гарнака в приложениях заключается в том обстоятельстве, что она дает возможность свести граничные условия, выраженные некоторым функциональным равенством, к интегральным условиям, справедливым уже не на контуре, а во всей рассматриваемой области.

§ 2. Задача Дирихле

n° 1. Интеграл Пуассона. Задача Дирихле об определении значений гармонической функции внутри круга, если известны ее значения на границе, решается, как известно, интегралом Пуассона:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\psi)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi, \tag{1}$$

где r, φ — полярные координаты той точки, где ищется значение решения; R — радиус окружности и $u(\vartheta)$ — граничные значения $u(r,\varphi)$ в функции от полярного угла ϑ.

Когда нужно найти функцию, гармоническую всюду в круге и отличающуюся от $u(r,\varphi)$ не больше чем на заданную величину, наиболее просто, повидимому, будет воспользоваться тригонометрическими рядами. Без труда можно проверить, что ядро интеграла, т. е. дробь, стоящая множителем при $u(\vartheta)$ под знаком интеграла, есть вещественная часть следующей аналитической функции:

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}=R\left(\frac{t+z}{t-z}\right),\qquad z=re^{i\varphi},\ t=Re^{i\psi}.$$

Разложив правую часть в ряд Тэйлора около начала координат и отделив в результате вещественную часть, получим:

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(\psi-\varphi).$$

Поэтому $u(r,\varphi)$ представима следующим рядом:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\psi)\,d\psi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\psi)\cos n(\psi-\varphi)\,d\psi=$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi),$$

a_n и b_n суть коэфициенты Фурье $u(\vartheta)$:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\psi)\,d\psi;\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\psi)\cos n\psi\,d\psi;\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\psi)\sin n\psi\,d\psi.$$

Взяв достаточно большой отрезок ряда, мы можем, вообще говоря, представить $u(r,\varphi)$ как угодно точно во всем круге. В самом деле, разница между $u(r,\varphi)$ и суммой N первых членов ряда будет функцией, гармонической внутри и на границе принимающей значения:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi).$$

Так как гармоническая функция достигает своего максимума на границе области, то

$$|u(r,\varphi)-\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)|\leqslant\max\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\right|,$$

и если ряд Фурье для $u(\vartheta)$ сходится равномерно, то правая часть путем выбора N может быть сделана как угодно малой для всех φ.

В том случае, когда нужно не общее приближенное представление $u(r,\varphi)$, а ее значения в отдельных точках внутри, было бы бесполезно прибегать к тригонометрическому ряду. Здесь проще воспользоваться интегральной формулой (1). Мы не будем останавливаться на методах непосредственного вычисления интеграла Пуассона в том его виде, какой он имеет в формуле (1), так как она имеет совершенно ясное строение и применение ее не требует никаких пояснений.

Наше внимание мы сосредоточим на ином методе, связанном с предварительным преобразованием или, если угодно, с представлением интеграла в форме Стильтьеса. Этот путь нам кажется более эффективным, чем прямое пользование формулой (1).

Основная мысль способа весьма проста и основана на приведении (1) к простейшему случаю.

В центре окружности при $r=0$ мы получаем:

$$u(0,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\psi)\,d\psi. \tag{3}$$

Равенство представляет известную теорему Гаусса о том, что значение гармонической функции в центре окружности есть среднее арифметическое значений на самой окружности.

Интеграл, стоящий в правой части, имеет строение, гораздо более простое, чем (1), и к вычислению интегралов такого рода пытаются свести (1) в общем случае.

Допустим, что мы при помощи дробно-линейного преобразования отобразили круг $|t| \leqslant R$ на единичный круг плоскости ζ так, что точка $z = re^{i\varphi}$ перешла в центр $\zeta = 0$. Функция u, гармоническая в круге $|t| \leqslant R$, перейдет в функцию, гармоническую в единичном круге плоскости ζ. Граничные значения ее на окружности $|t| = R$ перейдут в граничные значения на единичной окружности $|\zeta| = 1$. Зависимость их от полярного угла ϑ мы будем знать, если определим зависимость ψ от ϑ. Последняя в аналитической форме может быть представлена следующим образом.

Функция, доставляющая требуемое конформное преобразование, если поставить условие, чтобы луч $\psi = \varphi$ переходил в вещественную ось, имеет вид:

$$\zeta = Re^{-i\varphi}\frac{t - z}{R - tz}.$$

На границе круга, когда $t = Re^{i\psi}$:

$$e^{i\vartheta} = e^{-i\varphi}\frac{\frac{R}{r}e^{i\psi} - e^{i\varphi}}{\frac{R}{r} - e^{i(\psi-\varphi)}},$$

или, если положить $\frac{R}{r} = e^{\alpha}$, $\alpha = \ln\frac{R}{r}$,

$$e^{i\vartheta} = \frac{e^{\alpha}e^{i(\psi-\varphi)} - 1}{e^{\alpha} - e^{i(\psi-\varphi)}}.$$

Отсюда получается следующая формула:

$$\frac{e^{i\vartheta} - 1}{e^{i\vartheta} + 1} = \frac{[e^{i(\psi-\varphi)} - 1][e^{\alpha} + 1]}{[e^{i(\psi-\varphi)} + 1][e^{\alpha} - 1]},$$

иначе

$$\operatorname{tg}\frac{\psi - \varphi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}. \tag{4}$$

Она дает зависимость между ϑ, ψ и α в весьма простом виде.

В плоскости ζ та точка, для которой мы должны разыскать значение гармонической функции u, расположена в центре круга, и поэтому по теореме о среднем значении имеем:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u[\psi(\vartheta)]\,d\vartheta. \tag{5}$$

Последняя формула позволяет указать способ вычисления интеграла, гораздо более простой, чем предыдущие. Разделим промежуток $(-\pi, \pi)$ изменения ϑ на равные части точками $\vartheta_0 = -\pi$, $\vartheta_1 = -\frac{(n-2)\pi}{n}, \ldots \vartheta_{n-1} = \frac{(n-2)\pi}{n}$. Соответствующие им значения ψ и $u(\psi)$ обозначим через

$$\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{n-1} \text{ и } u_0 = u(\psi_0),\ u_1 = u(\psi_1), \ldots\ u_{n-1} = u(\psi_{n-1}).$$

Применим теперь к вычислению интеграла один из приближенных способов, например, способ прямоугольников, положив:

$$u = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{n}(u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}) = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}}{n}. \tag{6}$$

$u(r, \varphi)$ будет равно среднему арифметическому значений функции $u(\psi)$ на контуре; однако, не в равноотстоящих точках, как это мы получили бы при вычислении u в центре круга плоскости z, пользуясь формулой (3), а в точках, расположение которых на окружности зависит от положения той точки, где мы ищем решение, и которые соответствуют равноотстоящим значениям ϑ. Найти их мы можем легко, пользуясь соотношением (4). В практике, повидимому, наиболее быстро приводящим к цели будет простой графический прием, основанный на применении неравномерных шкал.[1]

Увеличению аргумента z, т. е. передвижению точки z вдоль окружности с центром в начале координат соответствует вычитание из ψ постоянного числа, равного углу поворота. Последнее же равносильно просто передвижению шкалы $\psi(\vartheta)$ вдоль самой себя. Поэтому мы всегда в праве считать $\varphi = 0$, и формулу (4) брать в виде:

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \operatorname{th}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}.$$

Изготовим шаблон, представляющий в координатной системе ψ, r линии уровня ϑ. Разобьем для этого интервал $(-\pi, +\pi)$ изменения ϑ на четное число n частей и в прямоугольнике $0 \leqslant r \leqslant 1$, $-\pi \leqslant \psi \leqslant \pi$ начертим те линии, для которых ϑ сохраняет постоянные значения:

$$\vartheta = 0,\quad \vartheta = \pm\frac{2\pi}{n},\ \vartheta = \pm 2\frac{2\pi}{n}, \ldots \vartheta = \pm\pi.$$

Прилагая к такому шаблону на надлежащей высоте равномерную шкалу для ψ в промежутке $(-\pi, +\pi)$, мы можем по этой шкале отсчитать те значения ψ, которые соответствуют взятым выше значениям ϑ при любом r.

---

[1] См. об этом статью C. Runge, Graphische Lösung von Randwertaufgaben der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1911.

После этого находятся $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$, и u во взятой точке определится как среднее арифметическое их по формуле (6).

Подобные упрощения можно сделать и для других методов приближенного вычисления интеграла (5).

n° 2. Интеграл Пуассона для внешности круга. Пусть нужно будет найти функцию, гармоническую и ограниченную вне окружности $|z| = R$ и принимающую на самой окружности заданные значения:

$$u(R, \varphi) = u(\varphi).$$

Сейчас мы покажем, что искомая функция может быть представлена интегралом типа Пуассона, который может быть получен из (1) весьма простым способом.

Введем для этого новую независимую переменную:

$$\zeta = \frac{1}{z} = \rho e^{i\vartheta}.$$

Функция $u(r, \varphi)$, гармоническая вне окружности $|z| = R$, перейдет в функцию $u^*(\rho, \vartheta) = u\left(\frac{1}{\rho}, -\vartheta\right)$, гармоническую внутри круга радиуса $\frac{1}{R}$, принимающую на границе его значения:

$$u^*\left(\frac{1}{R}, \vartheta\right) = u(R, -\vartheta) = u(-\vartheta).$$

По формуле (1) она при $\rho < \frac{1}{R}$ представима интегралом Пуассона:

$$u^*(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(-\psi^*) \frac{\frac{1}{R^2} - \rho^2}{\frac{1}{R^2} - 2\frac{1}{R}\rho\cos(\psi^* - \vartheta) + \rho^2} d\psi^*.$$

Если в этом равенстве подставить вместо ρ и ϑ их значения через r и φ и заменить переменную интегрирования, положив $\psi^* = -\psi$, мы получим формулу:

$$(7) \qquad u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\psi) \frac{r^2 - R^2}{r^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + R^2} d\psi,$$

решающую поставленную задачу. Она отличается от (1) только тем, что в ней R и r переменились местами, так что ядро интеграла (7) отличается от ядра интеграла Пуассона (1) только знаком.

Разложение искомой функции в тригонометрический ряд, подобный ряду (2), представляющий ее вне окружности, может быть получено поэтому из (2) путем замены r на R и наоборот:

$$(7') \qquad u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

при этом a_n и b_n имеют прежние значения.

Будем в равенстве (7') увеличивать r до бесконечности. В пределе мы получим равенство, представляющее теорему Гаусса для внешности окружности:

$$(8) \qquad u_\infty = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\psi)\, d\psi,$$

т. е. значение гармонической функции на бесконечности есть среднее арифметическое ее значений на граничной окружности.

На этой формуле может быть, как и в предыдущем n°, основан простой метод нахождения $u(r, \varphi)$ в любой точке внешности окружности.

Преобразуем внешность круга $|t| \leqslant R$ плоскости, в которой мы вычисляем значения $u(r, \varphi)$, на внешность единичного круга плоскости ζ так, чтобы точка z перешла в бесконечно далекую точку. Будем кроме того требовать, чтобы луч $\arg t = \psi = \varphi$ перешел в вещественную ось. Преобразующая функция имеет вид:

$$\zeta = \frac{e^{i\varphi}}{R} \frac{t\bar{z} - R^2}{t - z};$$

на окружности $t = Re^{i\psi}$

$$d\vartheta = |d\zeta| = \frac{1}{R} \frac{r^2 - R^2}{|t - z|^2} |dt| = \frac{r^2 - R^2}{r^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + R^2} d\psi.$$

Зависимость между ψ и ϑ, если ввести обозначение $\alpha = \ln \frac{r}{R}$, может быть приведена к равенству:

$$(9) \qquad \operatorname{tg} \frac{\psi - \varphi}{2} = \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}.$$

Применение формулы (8) в плоскости ζ дает нам следующее выражение для $u(r, \varphi)$:

$$(10) \qquad u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u[\psi(\vartheta)]\, d\vartheta.$$

К нему может быть применено все, что мы говорили об интеграле (5) в предыдущем n°.

n° 3. Задача Дирихле для полуплоскости. В некоторых вопросах проще бывает преобразовывать заданную область не на круг, а на полуплоскость или, наоборот, полуплоскость на область. Представляет поэтому известный интерес аналитический аппарат, позволяющий представить гармоническую функцию внутри верхней полуплоскости по известным граничным значениям ее на вещественной оси. Его можно получить из интеграла Пуассона путем преобразования круга радиуса R плоскости z на верхнюю полуплоскость плоскости ζ при помощи функции $\zeta = \frac{1}{i}\frac{z-R}{z+R}$. Граничные значения на окружности перейдут в граничные значения на вещественной оси. После несложных вычислений мы получим искомую формулу в виде:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\,\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\,d\xi = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x+\xi')\,\frac{d\xi'}{\xi'^2+y^2}. \tag{11}$$

При неточных графических расчетах ее удобнее употреблять в ином виде, взяв за переменную интегрирования не ξ, а угол ψ, который образует прямая $z\xi$ с перпендикуляром zx к оси ξ, опущенным из точки z:

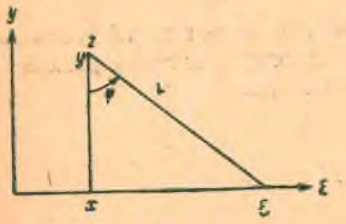


Рис. 46.

$$\operatorname{arctg}\frac{\xi - x}{y} = \operatorname{arctg}\frac{\xi'}{y} = \psi,$$

$$d\psi = \frac{y\,d\xi}{\xi'^2 + y^2}.$$

Поэтому равенство (11) принимает следующую простую форму:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u[x + \xi'(\psi)]\,d\psi. \tag{12}$$

Искомая величина $u(x, y)$ опять определяется как среднее арифметическое контурных значений, при этом среднее берется по углу ψ. Все элементы, нужные для вычисления интеграла, могут быть сняты с чертежа.

n° 4. Задача Дирихле для кольца. Граничные значения гармонической функции $u(r, \varphi)$ на окружностях кольца $R_1 \leqslant |z| \leqslant R_2$ мы будем предполагать заданными в форме функций от полярного угла φ и обозначим их соответственно через $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$.

Сопряженная с $u(r, \varphi)$ гармоническая функция $v(r, \varphi)$ будет, вообще говоря, не однозначной, и функция комплексной переменной $f(z) = u + iv$ будет состоять из двух слагаемых: однозначной составляющей, могущей

быть разложенной в ряд Лорана в кольце, и логарифма z с вещественным коэфициентом:

$$u + iv = A\ln z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\gamma_n z^n, \quad \gamma_n = \alpha_n + i\beta_n \tag{13}$$

Отделяя вещественную и мнимую части, будем иметь:

$$\begin{cases} u = A\ln r + \alpha_0 + \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty}[(\alpha_n r^n + \alpha_{-n} r^{-n})\cos n\varphi - (\beta_n r^n - \beta_{-n} r^{-n})\sin n\varphi], \\ v = A\varphi + \beta_0 + \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty}[(\beta_n r^n + \beta_{-n} r^{-n})\cos n\varphi + (\alpha_n r^n - \alpha_{-n} r^{-n})\sin n\varphi]. \end{cases} \tag{14}$$

Если теперь в первом из полученных равенств перейти на границы кольца, положив там $r = R_1$ и $r = R_2$, мы должны получить разложение в ряд Фурье функций $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$. Это дает:

$$\begin{cases} A\ln R_1 + \alpha_0 = a_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u_1(\psi)\,d\psi, \\ A\ln R_2 + \alpha_0 = a_0^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u_2(\psi)\,d\psi, \\ \alpha_n R_1^n + \alpha_{-n} R_1^{-n} = a_n^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u_1(\psi)\cos n\psi\,d\psi, \\ \alpha_n R_2^n + \alpha_{-n} R_2^{-n} = a_n^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u_2(\psi)\cos n\psi\,d\psi, \\ \beta_{-n} R_1^{-n} - \beta_n R_1^n = b_n^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u_1(\psi)\sin n\psi\,d\psi, \\ \beta_{-n} R_2^{-n} - \beta_n R_2^n = b_n^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u_2(\psi)\sin n\psi\,d\psi. \end{cases} \tag{15}$$

Отсюда получаем:

$$(16)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\alpha_0^{(2)} - \alpha_0^{(1)}}{\ln R_2 - \ln R_1}, & \alpha_0 = \dfrac{a_0^{(1)} \ln R_2 - a_0^{(2)} \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1} \\ \alpha_n = \dfrac{a_n^{(1)} R_2^{-n} - a_n^{(2)} R_1^{-n}}{R_1^{n} R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^{n}}, & \alpha_{-n} = \dfrac{a_n^{(1)} R_2^{n} - a_n^{(2)} R_1^{n}}{R_2^{n} R_1^{-n} - R_2^{-n} R_1^{n}} \\ \beta_n = \dfrac{b_n^{(2)} R_1^{-n} - b_n^{(1)} R_2^{-n}}{R_1^{n} R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^{n}}, & \beta_{-n} = \dfrac{b_n^{(2)} R_1^{n} - b_n^{(1)} R_2^{n}}{R_2^{n} R_1^{-n} - R_2^{-n} R_1^{n}} \end{cases}$$

Ряд (16) суммируется в более сложных функциях, чем аналогичный ряд для круга. Формула Шварца для кольца была получена впервые, насколько нам известно, H. Villat. Для ознакомления с нею мы отсылаем читателя к мемуару этого ученого „Sur le problème de Dirichlet dans une aire circulaire" в Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 1912 г., или в его книге „Leçons sur l'hydrodynamique" 1929 г. Paris, стр. 12.

n° 5. Формула Шварца. Нахождение сопряженной гармонической функции. По заданным граничным значениям вещественной части функция комплексной переменной находится, как известно, с точностью до чисто мнимого слагаемого. Аналитический аппарат, дающий выражение функции $f(z) = u + iv$, регулярной в области, через значения u на контуре в том случае, когда область есть круг,—известен; это есть так называемый интеграл Шварца:[1]

$$(17)\quad u + iv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\psi) \frac{Re^{i\psi} + z}{Re^{i\psi} - z} d\psi.$$

Полагая здесь $z = 0$, мы найдем для $u + iv$ чисто вещественное значение, и написанная выше формула дает такое значение $f(z)$, для которого мнимая часть обращается в нуль в начале координат. Чтобы получить общее решение, мы должны добавить к правой части произвольное мнимое слагаемое Ci:

$$(18)\quad u + iv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\psi) \frac{Re^{i\psi} + z}{Re^{i\psi} - z} d\psi + Ci.$$

Разделим в (17) вещественную и мнимую части; так как

$$\frac{Re^{i\psi} + z}{Re^{i\psi} - z} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2} - i \frac{2Rr \sin(\psi - \varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2},$$

[1] См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, том III, стр. 378, или Р. Курант, Геометрическая теория функций комплексной переменной, ГТТИ, 1934, стр. 95.

то вещественная часть даст нам интеграл Пуассона для u, мнимая же часть доставляет выражение $v(r, \varphi)$ через $u(\psi)$:

$$(19)\quad v(r, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\psi) \frac{2Rr \sin(\psi - \varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2} d\psi.$$

Тригонометрический ряд для $v(r, \varphi)$, будет сопряженным с рядом для $u(r, \varphi)$ без свободного члена:

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (-b_n \cos n\varphi + a_n \sin n\varphi).$$

Составление его не требует никаких новых операций.

Если нужно знать приближенно v не всюду в круге, а лишь значения ее в отдельных точках внутри круга, то естественно воспользоваться интегральной формулой (19). Вычисления по ней однако проводить проще, если ее предварительно преобразовать, введя вместо переменной интегрирования ψ новую переменную ϑ, как указано в предыдущем параграфе.

Так как

$$d\vartheta = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2} d\psi,$$

что видно из сопоставления формул (1) и (5) § 2, мы получаем следующее выражение для $v(r, \varphi)$:

$$(20)\quad v(r, \varphi) = -\frac{Rr}{\pi(R^2 - r^2)} \int_{-\pi}^{+\pi} u[\psi(\vartheta)] \sin(\psi - \varphi) d\vartheta.$$

Подобные формулы можно указать и для внешности круга. Из (7′) n°2 видно, что гармоническая вне окружности $|z| = R$ функция $u(r, \varphi)$, принимающая заданные значения при $r = R$, есть вещественная часть следующей функции комплексной переменной:

$$u + iv = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \left(\frac{R}{z}\right)^n.$$

Сопряженная функция $v(r, \varphi)$ представляется, следовательно, рядом:

$$v(r, \varphi) = b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n (b_n \cos n\varphi - a_n \sin n\varphi).$$

Мы уже имели случай отметить в n° 2, что ядро интеграла Пуассона для внешности круга будет отличаться от ядра для внутренности только

знаком, поэтому формула Неймана для внешности получится из (18) путем изменения в правой части знака на обратный:

$$u + iv = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\psi)\,\frac{z + Re^{i\psi}}{z - Re^{i\psi}}\,d\psi + Ci$$

и

$$v(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\psi)\,\frac{Rr\sin(\psi-\varphi)}{r^2 - 2Rr\cos(\psi-\varphi) + R^2}\,d\psi + C.$$

Наконец, если вместо переменной ψ ввести новую переменную интегрирования ϑ, как это мы делали в конце n° 2, для численного нахождения $v(r,\varphi)$ мы получим следующую более удобную формулу:

$$v(r,\varphi) = \frac{Rr}{\pi(r^2 - R^2)}\int_{-\pi}^{+\pi} u[\psi(\vartheta)]\sin(\psi-\vartheta)\,d\vartheta.$$

Обратимся к случаю полуплоскости. Для построения интеграла Шварца воспользуемся формулой (11) n° 3. Так как

$$\frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} = R\left[\,i\left(\frac{1}{z-\xi} + c(\xi)\right)\right],$$

где $c(\xi)$ — произвольная вещественная функция вещественной переменной ξ, функция $f(z) = u + iv$, голоморфная в верхней полуплоскости, представится через значения своей вещественной части на оси $y = 0$ следующим интегралом:

$$f(z) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\left\{\frac{1}{z-\xi} + c(\xi)\right\}d\xi.$$

За $c(\xi)$ естественно выбрать такую функцию, которая была бы регулярна на вещественной оси и по возможности усиливала бы сходимость интеграла. Вблизи бесконечно далекой точки первое слагаемое подинтегральной скобки имеет разложение:

$$\frac{1}{z-\xi} = -\frac{1}{\xi} - \frac{z}{\xi^2} - \dots$$

Возьмем $c(\xi)$ такой, чтобы вся скобка имела при $\xi = \infty$ нуль второго порядка, т. е. чтобы $c(\xi)$ имела на бесконечности главный член $\frac{1}{\xi}$. Наиболее простой функцией, обладающей перечисленными свойствами, будет $c(\xi) = \frac{\xi}{1+\xi^2}$. Мы поэтому будем полагать:

(21)
$$f(z) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\,\frac{1+\xi z}{z-\xi}\,\frac{d\xi}{1+\xi^2}.$$

Если же $u(\xi)$ достаточно быстро убывает при $\xi \to \infty$, например, удовлетворяет неравенству $|u(\xi)| \leqslant \frac{M}{|\xi|^{\alpha}}$, $\alpha > 0$, то более просто положить $c(\xi) = 0$ и $f(z)$ взять в форме:

(21)
$$f(z) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\,\frac{d\xi}{z-\xi}.$$

§ 3. Задача Неймана

n° 1. Формула Дини. Наряду с задачей Дирихле часто приходится решать задачу Неймана, состоящую в определении значений гармонической функции внутри области по известным значениям ее нормальной производной на границе.

Известно, что решение не всегда существует. Условием, необходимым и достаточным для его существования, является выполнение, очевидного с физической точки зрения, требования равенства нулю интеграла от граничных значений нормальной производной. Если оно выполнено, то само решение определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Для круга задача Неймана имеет простое решение и искомая функция представляется в замкнутой форме при помощи так называемого интеграла Дини, который может быть получен элементарным путем из теории тригонометрических рядов. Ниже мы будем предполагать, что нам задана на границе производная по внутренней нормали.

Всякая функция, гармоническая в круге $|z| < R$, может быть представлена там рядом:

(1)
$$u = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k (a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi).$$

Производная по внутренней нормали будет отличаться в случае круга от производной по r лишь знаком, так как ее направление прямо противоположно направлению возрастания r. Дифференцируя предыдущее равенство по r, полагая затем в нем $r = R$ и приравнивая результат $-\frac{\partial u}{\partial n}$, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{R}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi) = -\frac{\partial u}{\partial n},$$

откуда

(2)
$$a_k = -\frac{R}{k\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\cos k\psi\,d\psi,\quad b_k = -\frac{R}{k\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\sin k\psi\,d\psi,\ [k = 1, 2, \dots]$$

и, следовательно, если отбросить остающийся неопределенным a_0:

$$u = -\frac{R}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{r}{R}\right)^k\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\cos k(\psi-\varphi)\,d\psi =$$

$$= -\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{r}{R}\right)^k\cos k(\psi-\varphi)\,d\psi.$$

Заметив, что сумма, стоящая под знаком интеграла, есть вещественная часть ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{t}\right)^k = -\ln\left(1-\frac{z}{t}\right),\quad z = re^{i\varphi},\quad t = Re^{i\psi},$$

имеем:

$$u = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{R}\left[\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right]d\psi \tag{3}$$

или, так как

$$\mathrm{R}\left[\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right] = \ln|t-z| - \ln R$$

и

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\ln R\,d\psi = \ln R\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\psi = 0,$$

$$u = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\ln|t-z|\,d\psi. \tag{3'}$$

Ряд (1) и формула (3′) имеют весьма простое строение, и пользование ими не представит никаких затруднений.

По известному $\frac{\partial u}{\partial n}$ сопряженная с u гармоническая функция v определится с точностью до постоянного слагаемого и может быть найдена либо как тригонометрический ряд, сопряженный с (1), либо из формулы (3):

$$v = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\,I\left[\ln\left(\frac{t-z}{t}\right)\right]d\psi = \tag{4}$$

$$= \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\{\arg(t-z) - \arg t\}\,d\psi.$$

Если же отбросим здесь постоянное слагаемое, равное

$$\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\psi\,d\psi,$$

то будем иметь:

$$v = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\arg(t-z)\,d\psi.$$

Наконец, аналитическая функция комплексной переменной, для которой заданы значения нормальной производной ее вещественной части $\frac{\partial u}{\partial n}$ на границе, определится с точностью до произвольного комплексного слагаемого и в замкнутой форме представится либо интегралом:

$$f(z) = u + iv = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)d\psi, \tag{5}$$

когда мы имеем в виду нормирование $f(0) = 0$; либо, если отбросить постоянную $\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\ln t\,d\psi$, интегралом:

$$f(z) = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\ln(t-z)\,d\psi. \tag{5'}$$

Замечание. Интеграл (3′), если в нем заменить $\frac{\partial u}{\partial n}$ произвольной функцией $F(\psi)$ даст гармоническую функцию:

$$u = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\psi)\ln|t-z|\,d\psi. \tag{*}$$

Но, однако, граничные значения его нормальной производной, вообще говоря, не будут совпадать с $F(\varphi)$, а будут равны:

$$F(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\psi)\,d\psi,$$

что легко проверяется путем разложения предшествующего интеграла в ряд по степеням z.

n° 2. Внешность окружности. Формула Дини для внешности круга может быть получена из (3) или (3′) путем, подобным тому, который мы употребляли для интеграла Дирихле в n° 2 § 1.

Пусть вне окружности $|z|=R$ ищется гармоническая функция, регулярная в бесконечно далекой точке и удовлетворяющая на границе при $r=R$ условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{r=R}=F(\varphi),$$

причем n — внутренняя нормаль области. В нашем случае производная по нормали будет одновременно производной по радиусу, и поэтому условие на контуре может быть переписано в форме:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R}=F(\varphi),$$

При помощи функции $\zeta=\rho e^{i\vartheta}=\frac{1}{z}$ преобразуем заданную область во внутренность окружности $|\zeta|=\frac{1}{R}$.

Искомая гармоническая функция $u(r, \varphi)$ перейдет в функцию $u\left(\frac{1}{\rho}, -\vartheta\right)$, граничные условия для которой будут:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{\rho=\frac{1}{R}}=-\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_{\rho=\frac{1}{R}}=\left(r^2\frac{\partial u(r,-\vartheta)}{\partial r}\right)_{r=R}=R^2F(-\vartheta).$$

Применив к ней формулу (3), получим:

$$u\left(\frac{1}{\rho}, -\vartheta\right)=\frac{1}{\pi R}\int_{-\pi}^{+\pi}R^2F(-\chi)\ln\left|1-\frac{\zeta}{\tau}\right|d\chi, \qquad \tau=\frac{1}{R}e^{i\chi},$$

или, если заменить переменную интегрирования, положив $\tau=\frac{1}{t}=$ $=\frac{1}{R}e^{-i\psi}$ и возвратиться к прежней переменной z:

$$u(r,\varphi)=\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\psi)\ln\left|1-\frac{t}{z}\right|d\psi. \tag{6}$$

Наконец, в силу того, что $\int_{-\pi}^{+\pi}F(\psi)\,d\psi=0$,

$$u(r,\varphi)=\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\psi)\ln|t-z|\,d\psi. \tag{6′}$$

Функция же комплексной переменной, имеющая $u(r, \varphi)$ своей вещественной частью, как видно из этих формул, представится интегралами вида (5) и (5′).

n° 3. Задача Неймана для полуплоскости. Пусть область, для которой мы решаем задачу Неймана, есть полуплоскость:

$$J[z]=y>0.$$

Производная по нормали к границе здесь есть вместе с тем производная по y, и поэтому граничное условие может быть взято в форме.

$$u_y(x,0)=F(x). \tag{7}$$

Функцию $F(x)$, простоты ради, мы будем предполагать непрерывной и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяющей условию:

$$|F(x)|\leqslant\frac{M}{|x|^p}, \quad \text{где} \quad p>1.$$

Наиболее просто формула, аналогичная формуле Дини для круга, может быть получена в разбираемом случае, повидимому, путем применения равенства (11) n° 3 § 2, решающего задачу Дирихле для полуплоскости.

Рассмотрим гармоническую функцию $\frac{\partial u}{\partial y}$. По известным значениям ее (7) на вещественной оси она может быть восстановлена путем применения указанного нами равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\xi)\,\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}\,d\xi.$$

Интеграл, стоящий в правой части, является производной по y от $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\xi)\ln\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}\,d\xi$, в чем можно легко убедиться в силу наложенных на $F(x)$ ограничений. Поэтому искомая функция $u(x, y)$ отличается от последнего интеграла слагаемым $\omega(x)$, зависящим только от x; с другой стороны $\omega(x)$ должна, очевидно, быть гармонической функцией, и так как среди функций от одной переменной гармонической будет лишь линейная функция, должно быть:

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\xi)\ln\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}\,d\xi+Ax+B= \tag{8}$$

$$=R\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\xi)\ln(\xi-z)\,d\xi+Az+B\right].$$

Отсюда вытекает аналог формулы Дини

$$(8') \qquad f(z) = u + iv = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \ln(\xi - z)\, d\xi + Az + B.$$

Наши рассуждения мы приводили в простейших предположениях относительно контурных значений $\frac{\partial u}{\partial n}$. Если воспользоваться тем обстоятельством, что при восстановлении $u(x, y)$ по известной $\frac{\partial u}{\partial y}$ мы можем прибавлять, не изменяя гармонического характера u, под знаком интеграла (8) произвольную функцию от ξ, линейно зависящую от x, можно построить формулу, позволяющую решать задачу Неймана для полуплоскости при гораздо более общих предположениях.

Вблизи бесконечно далекой точки $\ln\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}$ имеет разложение вида:

$$\ln\sqrt{(x-\xi)^2+y^2} = \ln\sqrt{\xi^2} - \frac{x}{\xi} + \frac{y^2-x^2}{\xi^2} + \dots$$

Вычтем отсюда функцию $\ln\sqrt{1+\xi^2} - \frac{x\xi}{1+\xi^2}$, имеющую в разложении около бесконечности такие же два первых члена, как и $\ln\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}$. В результате получим функцию, имеющую для всяких x и y в точке $\xi = \infty$ нуль второго порядка.

Гармоническая функция

$$(9) \qquad u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \left[\ln\sqrt{(x-\xi)^2+y^2} - \ln\sqrt{1+\xi^2} + \frac{x\xi}{1+\xi^2} \right] d\xi$$

имеет, очевидно, ту же производную по y, что и (8), и, следовательно, удовлетворяет поставленным требованиям, однако формула (9) сохраняет смысл при гораздо более общих предположениях, чем (8); интеграл в правой части ее остается абсолютно сходящимся в том случае, когда

$$|F(\xi)| \leqslant M|\xi|^{\alpha}, \quad \text{при} \quad \alpha < 1.$$

n° 4. Задача Неймана для кольца. Обозначим через $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$ значения нормальной производной гармонической функции $u(r, \varphi)$ на граничных окружностях $|z| = R_1$ и $|z| = R_2$ кольца.

Сопряженная с $u(r, \varphi)$ функция $v(r, \varphi)$, вообще говоря, не будет однозначной в кольце, и аналитическая функция $f(z) = u + iv$ будет иметь внутри кольца разложение вида:

$$(9') \qquad f(z) = A \ln z + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k z^k, \qquad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k.$$

Разделение вещественной и мнимой частей приводит к равенствам (14) n° 4 § 2. Напомним, что в наших исследованиях сейчас мы имеем в виду внутреннюю нормаль; производная по ней на меньшей окружности кольца будет совпадать с производной по радиусу, на большей же отличаться от нее знаком.

Таким образом функция u, определяемая первым рядом (14), должна на внешнем и внутреннем контурах кольца удовлетворять условиям:

$$F_1(\varphi) = \frac{A}{R_1} + \sum_{k=1}^{\infty} k\left[(\alpha_k R_1^{k-1} - \alpha_{-k} R_1^{-k-1})\cos k\varphi - (\beta_k R_1^{k-1} + \beta_{-k} R_1^{-k-1})\sin k\varphi\right],$$

$$F_2(\varphi) = -\frac{A}{R_2} - \sum_{k=1}^{\infty} k\left[(\alpha_k R_2^{k-1} - \alpha_{-k} R_2^{-k-1})\cos k\varphi - (\beta_k R_2^{k-1} + \beta_{-k} R_2^{-k-1})\sin k\varphi\right].$$

Коэфициент A находится двояким образом, и равенство обоих полученных выражений есть известное условие возможности решения задачи Неймана:

$$(10) \qquad A = \frac{R_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F_1(\psi)\, d\psi = -\frac{R_2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F_2(\psi)\, d\psi.$$

Что касается остальных коэфициентов, то они должны удовлетворять следующей системе равенств:

$$(11) \quad \begin{cases} k(\alpha_k R_1^{k-1} - \alpha_{-k} R_1^{-k-1}) = a_k^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F_1(\psi)\cos k\psi d\psi, \\ -k(\alpha_k R_2^{k-1} - \alpha_{-k} R_2^{-k-1}) = a_k^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F_2(\psi)\cos k\psi d\psi, \\ -k(\beta_k R_1^{k-1} + \beta_{-k} R_1^{-k-1}) = b_k^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F_1(\psi)\sin k\psi d\psi, \\ k(\beta_k R_2^{k-1} + \beta_{-k} R_2^{-k-1}) = b_k^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F_2(\psi)\sin k\psi d\psi. \end{cases}$$

После решения их относительно a_k, a_{-k}, b_k, b_{-k} получим:

$$\alpha_k = \frac{1}{k}\,\frac{a_k^{(1)} R_1 R_2^{-k} + a_k^{(2)} R_2 R_1^{-k}}{R_1^k R_2^{-k} - R_2^k R_1^{-k}},$$

$$\alpha_{-k} = \frac{1}{k}\,\frac{a_k^{(1)} R_1 R_2^{k} + a_k^{(2)} R_2 R_1^{k}}{R_1^k R_2^{-k} - R_2^k R_1^{-k}},$$

$$\beta_k = -\frac{1}{k}\,\frac{b_k^{(1)} R_1 R_2^{-k} + b_k^{(2)} R_2 R_1^{-k}}{R_1^k R_2^{-k} - R_2^k R_1^{-k}},$$

$$\beta_{-k} = \frac{1}{k}\,\frac{b_k^{(2)} R_2 R_1^{k} + b_k^{(1)} R_1 R_2^{k}}{R_1^k R_2^{-k} - R_2 R_1^{-k}}.$$

§ 3. Общая предельная задача для гармонических функций

n° 1. Постановка задачи. Случай постоянных коэфициентов в предельном условии. Задачи Неймана и Дирихле являются наиболее простыми предельными задачами теории гармонических функций. Исследуем теперь методы решения общей предельной задачи. Пусть нужно будет найти гармоническую функцию внутри области B, если известно, что на контуре L она удовлетворяет предельному условию вида:

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = d \tag{1}$$

или вида:

$$k\frac{\partial u}{\partial n} + l\frac{\partial u}{\partial s} + mu = d, \tag{1'}$$

где a, b, c, d, k, l, m — суть заданные вещественные функции точки контура и n — внутренняя нормаль.

Равенства (1) и (1′) отличаются друг от друга лишь формой; в первом из них мы берем производные по координатным осям, во втором же по направлениям, связанным с границей области. Но, как хорошо известно, одни производные могут быть просто выражены через другие.

В прикладных задачах чаще пользуются предельными условиями в форме (1′).

Мы будем всюду предполагать область B кругом с центром в начале координат, радиус которого, простоты ради, положим равным единице и начнем свой анализ с наиболее простого случая постоянных коэфициентов.

Пусть в условии (1′) k, l, m суть постоянные и d — известная функция полярного угла φ. Случай $k = 0$ очевидно не представляет

никакого интереса; предельное условие тогда вырождается в дифференциальное уравнение для предельных значений u, ибо в него будет входить лишь функция u и производная от нее по длине дуги. Решая его относительно u, мы найдем значения гармонической функции на L и получим просто задачу Дирихле, которую только что разбирали.

Разделив (1′) на k, мы можем предельное условие на границе взять в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + l\frac{\partial u}{\partial s} + mu = d(\varphi). \tag{2}$$

Положим:

$$f(z) = u + iv = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n, \qquad \alpha_n = a_n + ib_n,$$

при этом

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi). \tag{3}$$

Разложим функцию $d(\varphi)$, стоящую в правой части (2), в тригонометрический ряд:

$$d(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \tag{4}$$

Мы уже говорили выше, что

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}, \qquad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \varphi};$$

заметив это, подставим ряд (3) в условие (2) и сравним коэфициенты при синусах и косинусах одинаковых углов. В результате сравнения получим следующую систему уравнений, из которой и должны будем определить a_k и b_k:

$$\begin{cases} ma_0 = A_0, \\ -na_n - lnb_n + ma_n = A_n, \\ nb_n - lna_n - mb_n = B_n. \end{cases} \tag{5}$$

Если $m = 0$, первое уравнение дает необходимое условие разрешимости задачи:

$$A_0 = 0$$

или

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d(\varphi)\, d\varphi = 0; \tag{6}$$

остальные уравнения примут вид:

$$(7)\qquad \begin{cases} a_n + l\cdot b_n = -\dfrac{A_n}{n}, \\ -la_n + b_n = \dfrac{B_n}{n}. \end{cases}$$

Определитель каждой системы равен $1+l^2 \neq 0$ и системы наверное могут быть решены относительно a_n, b_n:

$$(8)\qquad a_n = -\frac{A_n + l\,B_n}{n(1+l^2)}; \qquad b_n = \frac{B_n - l\,A_n}{n(1+l^2)}.$$

Коэфициент a_0 остается произвольным и искомая гармоническая функция может быть найдена таким образом лишь с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Исследуем теперь второй случай вырождения задачи, когда $l=0$ и m есть целое положительное число; обозначим последнее через k.

Система (5) при $n=k$ дает равенства:

$$A_k = 0, \qquad B_k = 0,$$

или

$$(9)\qquad \int_{-\pi}^{+\pi} d(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi = 0, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} d(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi = 0,$$

являющиеся необходимыми условиями разрешимости задачи. Остальные системы имеют определитель, отличный от нуля, и могут быть решены относительно a_n и b_n:

$$(10)\qquad a_0 = \frac{A_0}{k}, \quad a_n = -\frac{A_n}{n-k}, \quad b_n = \frac{B_n}{n-k};\ n \neq k,$$

a_k, b_k остаются произвольными. Решение задачи будет найдено, следовательно, только с точностью до слагаемого вида:

$$r^k(a_k\cos k\varphi - b_k\sin k\varphi).$$

Во всех остальных случаях задача имеет единственное решение и коэфициенты a_n и b_n определяются по формулам:

$$a_n = -\frac{(n-m)\,A_n + ln\,B_n}{(n-m)^2 + l^2n^2}, \qquad b_n = \frac{(n-m)\,B_n - ln\,A_n}{(n-m)^2 + l^2n^2},\ n = 0,\ 1\ldots$$

Объединяя все результаты, мы можем высказать следующее предложение.

Гармоническая функция $u(x, y)$, удовлетворяющая условию (2), представляется рядом:

$$(11)\qquad u(x,y) = \frac{A_0}{m} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left\{-\frac{(n-m)\,A_n + ln\,B_n}{(n-m)^2+l^2n^2}\cos n\varphi - \frac{(n-m)\,B_n - ln\,A_n}{(n-m)^2+l^2n^2}\sin n\varphi\right\}.$$

Если один из членов ряда теряет смысл ввиду равенства нулю знаменателя, т. е. когда $m=0$, или $l=0$ и $m=k$, то соответствующий член в ряду должен быть выпущен, и функция $u(x, y)$ может быть найдена лишь при соблюдении условий соответственно (6) либо (9), при этом решение перестает быть единственным, и для построения общего вида функции, удовлетворяющей поставленному условию, мы должны добавить член $r^k(a_k\cos k\varphi - b_k\sin k\varphi)$ с произвольными a_k и b_k.

Ряд (11) представляет собою вещественную часть следующей функции комплексной переменной z:

$$(12)\qquad f(z) = \frac{A_0}{m} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n - iB_n}{m - n(1-li)}z^n.$$

Если сюда вместо A_n и B_n подставить их значения:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\cos n\psi\, d\psi, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\sin n\psi\, d\psi$$

и переменить местами порядок интегрирования и суммирования, мы получим:

$$f(z) = \frac{A_0}{m} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-in\psi}z^n}{m-n(1-li)}\,d\psi.$$

Далее, если условиться отбрасывать при интегрировании произвольную постоянную, мы можем написать:

$$\frac{z^n}{m-n(1-li)} = -\frac{1}{1-li}z^p\int \zeta^{n-p-1}\,d\zeta, \qquad p = \frac{m}{1-li},$$

и следовательно:

$$f(z) = \frac{A_0}{m} - \frac{1}{1-li}\frac{z^p}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\psi}\int^{z}\zeta^{n-p-1}\,d\zeta\,d\psi =$$

$$= \frac{A_0}{m} - \frac{1}{1-li}\frac{z^p}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\int^{z}\frac{\zeta^{-p}}{e^{i\psi}-\zeta}\,d\zeta\,d\psi,$$

или, ввиду того что

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\,d\psi \quad \text{и} \quad \frac{1}{m} = -\frac{pz^p}{m}\int^{z}\zeta^{-p-1}\,d\zeta,$$

$$(12')\quad f(z) = \frac{z^p}{\pi(1-li)}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\int^{z}\left\{-\frac{1}{2\zeta}-\frac{1}{e^{i\psi}-\zeta}\right\}\zeta^{-p}\,d\zeta\,d\psi =$$

$$= \frac{z^p}{2\pi(li-1)}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\int^{z}\zeta^{-p-1}\frac{e^{i\psi}+\zeta}{e^{i\psi}-\zeta}\,d\zeta\,d\psi.$$

Наконец, если заметить, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\,d\psi = F(z)$$

есть интеграл Шварца для аналитической в единичном круге функции, имеющей вещественную часть $d(\varphi)$ на окружности, получаем формулу:

$$(13)\qquad f(z) = \frac{z^p}{li-1}\int^{z} F(\zeta)\,\zeta^{-p-1}\,d\zeta.$$

В частном случае, когда m — отрицательное число, вещественная часть p будет отрицательной, ибо $p = \frac{m}{1+l^2} + \frac{mli}{1+l^2}$, и интегрирование по переменной ζ может быть выполнено от нуля до z:

$$(14)\qquad f(z) = \frac{z^p}{2\pi(li-1)}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\int_{0}^{z}\zeta^{-p-1}\frac{e^{i\psi}+\zeta}{e^{i\psi}-\zeta}\,d\zeta\,d\psi.$$

Для внешности круга разбираемая задача может быть сформулирована следующим образом.

Найти функцию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n+ib_n}{z^n}$, голоморфную всюду вне единичного круга, включая и бесконечно далекую точку, вещественная часть которой $u = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$ на границе удовлетворяет условию (2).

Дифференцирование по внутренней нормали будет совпадать с дифференцированием по r, и поэтому условие (2) мы можем переписать в форме:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + l\frac{\partial u}{\partial \varphi} + mu = d(\varphi).$$

Преобразуем переменные, положив $z = \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{\rho}e^{-i\vartheta}$. В плоскости ζ мы будем иметь внутреннюю задачу. Выясним, как изменятся предельные условия. Так как $r = \frac{1}{\rho}$ и $\varphi = -\vartheta$, то на границе $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \rho}$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$, и (2) поэтому примет вид:

$$-\frac{\partial u}{\partial \rho} - l\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + mu = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos n\vartheta - B_n\sin n\vartheta.$$

Новое предельное условие отличается от рассмотренного раньше лишь изменением знака у l и B_n.

Искомая функция $f(z)$ таким образом представляется следующим рядом:

$$(15)\qquad f(z) = \frac{A_0}{m} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n+iB_n}{m-n(1+li)}\cdot\frac{1}{z^n}.$$

Если один из знаменателей членов ряда обращается в нуль, т. е. когда или $m=0$, или $l=0$, $m=k$, то решение существует лишь при условиях соответственно либо $A_0=0$, либо $A_k=B_k=0$; при этом оно перестает быть единственным. Общий вид искомых функций мы получим, выпустив в ряду (15) теряющий смысл член и прибавив к нему произвольное выражение вида $\frac{a_k-ib_k}{z^k}$.

Ряд в правой части легко можно просуммировать. В результате получим:

$$(16)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi(1+li)}\cdot\frac{1}{z^p}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\int^{z}\zeta^{p-1}\frac{\zeta+e^{i\psi}}{\zeta-e^{i\psi}}\,d\zeta\,d\psi,$$

где

$$p = \frac{m}{1+li}.$$

n° 2. Задача Гильберта. Перейдем к исследованию задач с переменными коэфициентами. Для нас сейчас удобнее брать предельное условие в форме (1). Начнем с простейшего случая, когда $c=0$:

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = d.$$

Если u есть вещественная часть регулярной функции $f(z)$, то, ввиду того что производная от нее будет равна $\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $-\frac{\partial u}{\partial y}$ будут вещественной и мнимой частями регулярной функции $f'(z)$, и наша задача, следовательно, равносильна следующей задаче Гильберта:

Найти функцию $f(z) = u + iv$, регулярную в круге $|z| < 1$ и такую, что вещественная и мнимая части ее на граничной окружности удовлетворяют линейному условию:

$$\alpha(\varphi)\, u + \beta(\varphi)\, v = d(\varphi). \tag{17}$$

Коэфициенты $\alpha(\varphi)$ и $\beta(\varphi)$ мы будем считать непрерывными функциями полярного угла φ, не обращающимися одновременно в нуль. Разделив равенство (17) на $\sqrt{\alpha^2(\varphi) + \beta^2(\varphi)}$, можем всегда достигнуть выполнения требования:

$$\alpha^2(\varphi) + \beta^2(\varphi) = 1.$$

Введем угол $\omega(\varphi)$, определенный равенствами:

$$\alpha = \cos\omega, \quad \beta = -\sin\omega,$$

$$\omega = -\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Граничное условие (17) примет вид:

$$u\cos\omega - v\sin\omega = R[e^{i\omega(\varphi)} f(z)] = d(\varphi). \tag{17'}$$

1. Остановимся на наиболее простом случае, когда $\omega(\varphi)$ будет однозначной функцией от φ.

Будем рассматривать $\omega(\varphi)$ как предельные значения вещественной части некоторой голоморфной функции $\Pi(z)$. Пользуясь интегралом Шварца, можем написать:

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \omega(\psi)\,\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\,d\psi.$$

Пусть $\omega_1(\varphi)$ суть предельные значения на окружности ее мнимой части. Рассмотрим голоморфную функцию $e^{i\Pi(z)} f(z)$. Так как на окружности $e^{i\Pi(z)} = e^{-\omega_1(\varphi)+i\omega(\varphi)}$, вещественная часть ее при $|z|=1$ будет равна

$$e^{-\omega_1(\varphi)} R[e^{i\omega(\varphi)} f(z)].$$

Наша задача таким образом свелась к разысканию функции $f(z)$, удовлетворяющей предельному требованию:

$$R[e^{i\Pi(z)} f(z)] = d(\varphi)\, e^{-\omega_1(\varphi)}. \tag{17''}$$

Применив формулу Шварца, получим:

$$e^{i\Pi(z)} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\, e^{-\omega_1(\psi)}\,\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\,d\psi + Ci,$$

и окончательно для $f(z)$ имеем следующую формулу:

$$f(z) = e^{-i\Pi(z)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\, e^{-\omega_1(\psi)}\,\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\,d\psi + Ci\right\}. \tag{18}$$

Решение задачи определяется с точностью до слагаемого вида $Cie^{-i\Pi(z)}$.

Перейдем теперь к более сложным случаям, когда $\omega(\varphi)$ — многозначная функция от φ.

2. Пусть при обходе окружности $\omega(\varphi)$ приобретает слагаемое $-2n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\omega(\pi) - \omega(-\pi) = -2n\pi.$$

Построим однозначную на граничной окружности функцию:

$$\chi(\varphi) = \omega(\varphi) + n\varphi.$$

Рассматривая $\chi(\varphi)$ как граничные значения вещественной части регулярной функции $\sigma(z)$, по формуле Шварца восстановим саму функцию $\sigma(z)$.

Далее, вещественная часть функции

$$\sigma_1(z) = \sigma(z) + in\ln z$$

на единичной окружности будет равна $\omega(\varphi)$. Предельные же значения мнимой части будут такими же, что и у $\sigma(z)$. Обозначим их через $\omega_1(z)$ и образуем функцию:

$$e^{i\sigma_1(z)} f(z) = z^{-n} e^{i\sigma(z)} f(z).$$

При $|z|=1$ она удовлетворяет требованию:

$$R[z^{-n} e^{i\sigma(z)} f(z)] = e^{-\omega_1(\varphi)} R[e^{i\omega(\varphi)} f(z)] = d(\varphi)\, e^{-\omega_1(\varphi)}. \tag{19}$$

Ввиду наличия множителя z^{-n}, функция, стоящая под знаком R, может иметь в начале координат полюс порядка n.

Построим сначала регулярную функцию, имеющую на границе вещественную часть (19). Это будет

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\, e^{-\omega_1(\psi)}\,\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\,d\psi + Ci.$$

Сюда мы должны добавить функцию, имеющую на окружности вещественную часть, равную нулю и могущую иметь в начале координат полюс порядка n.

Она имеет форму:

$$\sum_{k=1}^{n}\{A_k(z^{-k} - z^k) + iB_k(z^{-k} + z^k)\},$$

где A_k и B_k — произвольные вещественные постоянные.

Окончательно для $f(z)$ мы получаем следующее выражение:

$$f(z) = z^n e^{-i\sigma(z)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)\, e^{-\omega_1(\psi)}\,\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\,d\psi + Ci + \sum_{k=1}^{n}[A_k(z^{-k} - z^k) + iB_k(z^{-k} + z^k)]\right\}. \tag{20}$$

Общее решение будет содержать, таким образом, $2n+1$ произвольных постоянных.

3. Допустим теперь, что, при обходе по окружности, $\omega(\varphi)$ приобретает слагаемое $2n\pi$ $(n=1, 2, 3\ldots)$.

Однозначная часть $\chi(\varphi)$ функции $\omega(\varphi)$, здесь будет:

$$\chi(\varphi)=\omega(\varphi)-n\varphi.$$

Пусть $\sigma(z)$ будет регулярной функцией, имеющей вещественную часть при $|z|=1$ равную $\chi(\varphi)$.

Предельные значения вещественной части у функции

$$\sigma_1(z)=\sigma(z)-in\ln z$$

будут совпадать с $\omega(\varphi)$. Что касается мнимой части при $|z|=1$, то она будет такая же, как и у $\sigma(z)$. Мы сохраним за ней обозначение $\omega_1(z)$.

Точно так же можно показать, что

$$e^{i\sigma_1(z)}f(z)=z^n e^{i\sigma(z)}f(z)$$

удовлетворит на границе требованию:

$$R[z^n e^{i\sigma(z)}f(z)]=d(\varphi)e^{-\omega_1(\varphi)}. \tag{21}$$

Выражение, стоящее в скобках, очевидно, имеет в начале координат корень кратности n, поэтому в разложении в ряд Фурье правой части свободный член и коэфициенты при $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ должны обращаться в нуль для всяких k от 1 до $n-1$.

Задача будет иметь, следовательно, решение лишь только в том случае, когда соблюдены следующие требования:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)e^{-\omega_1(\psi)}\,d\psi=0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)e^{-\omega_1(\psi)}\cos k\psi\,d\psi=0, \tag{22}$$

$$[k=1,\ldots n-1],$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)e^{-\omega_1(\psi)}\sin k\psi\,d\psi=0$$

и дается следующей формулой

$$f(z)=z^{-n}e^{-i\sigma(z)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d(\psi)e^{-\omega_1(\psi)}\,\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\,d\psi+Ci\right\}. \tag{23}$$

4. Пусть при обходе окружности $\omega(\varphi)$ получает приращение вида $(2n+1)\pi$, $(n=0, \pm1, \ldots)$; при этом очевидно $e^{i\omega(\varphi)}$ будет менять знак на обратный.

Из (17′) видно, что задача будет иметь здесь голоморфное решение только в том случае, когда $d(\varphi)$ будет неоднозначной функцией от φ и при обходе менять знак на обратный.

Если же $d(\varphi)$ однозначная функция от φ, $f(z)$, решающая задачу, должна иметь, очевидно, строение $f(z)=\sqrt{z}\,P(z)$, где $P(z)$ — однозначна в круге.

В обоих случаях мы проблему приведем к уже разобранным вопросам, если вместо переменной z введем новую переменную $\zeta=\sqrt{z}$.

n° 3. Общая предельная задача. Общая предельная задача с граничным условием (1) или (1′) может быть приведена к интегральному уравнению, если воспользоваться полученными в предыдущем n° формулами, решающими задачу Гильберта в общем случае.

Однако исследования, связанные с таким путем, в общем случае громоздки и затруднительны. Мы ограничимся частным случаем, представляющим с точки зрения приложений наибольший интерес, когда условия на границе круга $|z|=1$ выражены равенством:

$$\frac{\partial u}{\partial n}+m(\varphi)u=f(\varphi), \tag{24}$$

где $m(\varphi)$, $f(\varphi)$ — заданные непрерывные функции полярного угла.[1]

Перенесем второй член левой части направо и по нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$, применив формулу (3′) § 3, восстановим саму функцию внутри круга:

$$u=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} mu\ln|t-z|\,d\psi+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\ln|t-z|\,d\psi+C,$$

где C — некоторая вполне определенная постоянная, равная, как мы знаем, значению функции u в центре круга.

Перейдем в этом равенстве на окружность $z=e^{i\varphi}$:

$$u=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} m(\psi)u\ln|t-z|\,d\psi+F(\varphi)+C, \tag{25}$$

$$F(\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi)\ln|t-z|\,d\psi.$$

Мы получили интегральное уравнение для граничных значений искомой функции. Однако, решение его не эквивалентно, очевидно, задаче (24), ибо интеграл типа Дини, которым мы воспользовались при его выводе, хотя и представляет собой гармоническую функцию, но нор-

[1] Для ознакомления с интегральными уравнениями, возникающими при решении общей проблемы, мы отсылаем к работе Noether'a в 82 томе Mathematische Annalen.

мальная производная от нее на контуре совпадет с функцией, стоящей под знаком интеграла типа Дини лишь в том случае, когда интеграл от нее по окружности равен нулю, что представляет собой известное необходимое условие разрешимости задачи Неймана; в противном случае значения нормальной производной на контуре от интеграла типа Дини [(*) § 3] дадут не $F(\varphi)$, а $F(\varphi)$ без среднего арифметического, т. е.

$$F(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\psi)\,d\psi\,.$$ [1]

Следовательно, кроме (24) искомая функция должна еще удовлетворять требованию:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [m(\psi)\,u - f(\psi)]\,d\psi = 0. \tag{26}$$

Последнее можно было бы получить прямым интегрированием условия (24) по окружности.

Решение уравнения (25) при условии (26) вполне эквивалентно решению поставленной предельной задачи.

Само уравнение (25) содержит неизвестную постоянную C, которую надлежит определить из условия существования решения.

Ядро интегрального уравнения неограничено; оно логарифмически бесконечно при $z = t$. Но уже второе итерированное ядро будет, как можно видеть, ограниченным, и к уравнению, поэтому, применима вся теория Фредгольма.

Уравнение (25) является частным случаем более общего уравнения:

$$u = \lambda\int_{-\pi}^{+\pi} m(\psi)\ln|t-z|\,u\,d\psi + F(\varphi) + C \tag{27}$$

при $\lambda = -\frac{1}{\pi}$. Допустим сначала, что $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ не есть собственное число. Тогда уравнение имеет единственное решение. Обозначим через u решение уравнения:

$$u = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} m(\psi)\ln|t-z|\,u\,d\psi + F(\varphi), \tag{25'}$$

и через u_1 решение уравнения:

$$u = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} m(\psi)\ln|t-z|\,u\,d\psi + 1. \tag{25''}$$

Решение исходного уравнения, очевидно, будет равно:

$$u = u_F + Cu_1. \tag{28}$$

[1] См. замечание в n° 1 § 3.

Осталось еще подобрать C так, чтобы удовлетворить требованию (26). Оно даст:

$$C\int_{-\pi}^{+\pi} mu_1\,d\varphi + \int_{-\pi}^{+\pi} (mu_F - f)\,d\varphi = 0. \tag{29}$$

Если

$$\int_{-\pi}^{+\pi} mu_1\,d\varphi \neq 0,$$

то отсюда мы единственным образом найдем C, и по найденным контурным значениям (28) гармонической функции u восстановим саму функцию. Задача имеет здесь единственное решение.

В противном случае, когда

$$\int_{-\pi}^{+\pi} mu_1\,d\varphi = 0,$$

равенство (29) возможно только в том случае, когда функции m и f удовлетворяют условию:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (mu_F - f)\,d\varphi = 0. \tag{30}$$

Число C остается произвольным и задача будет допускать бесчисленное множество решений.

Более сложным является случай, когда $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ будет собственным числом уравнения (27). Тогда (25) будет иметь решение только при специальном виде правой части; именно, для существования решения необходимо и достаточно, чтобы всякое решение однородного союзного уравнения:

$$v = -\frac{m(\varphi)}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln|t-z|\,v\,d\psi \tag{31}$$

было ортогонально к сводному члену $F(\varphi) + C$.

Пусть $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots \overline{v}_n$ есть полная система линейно независимых решений уравнения (31). Можно легко убедиться, что каждое решение (31) отличается только лишь множителем $m(\varphi)$ от решения однородного уравнения:

$$u = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} m(\psi)\ln|t-z|\,u\,d\psi, \tag{32}$$

соответствующего (25). Поэтому полной системой независимых решений (32) будет:

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{v}_1}{m}, \quad \bar{u}_2 = \frac{\bar{v}_2}{m}, \ldots, \quad \bar{u}_n = \frac{\bar{v}_n}{m}.$$

Условия существования решения уравнения (25) будут:

$$C \int_{-\pi}^{+\pi} \bar{v}_k d\varphi + \int_{-\pi}^{+\pi} F\bar{v}_k d\varphi = 0,$$

или:

$$\frac{\int_{-\pi}^{+\pi} F\bar{v}_1 d\varphi}{\int_{-\pi}^{+\pi} \bar{v}_1 d\varphi} = \ldots = \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} F\bar{v}_n d\varphi}{\int_{-\pi}^{+\pi} \bar{v}_n d\varphi}. \tag{33}$$

Допустим, что они выполняются и по крайней мере один из знаменателей, например $\int_{-\pi}^{+\pi} v_1 d\varphi$, отличен от нуля. Число C найдется из предыдущего равенства.

Назовем $\widetilde{u}$ какое-либо частное решение неоднородного уравнения (24). Общее решение его имеет вид:

$$u = \widetilde{u} + \sum_{k=1}^{n} A_k \bar{u}_k,$$

где A_k — произвольные постоянные.

Условие (26) здесь дает:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{+\pi} m\bar{u}_k d\varphi + \int_{-\pi}^{+\pi} (m\widetilde{u} - f)\, d\varphi = 0.$$

Отсюда мы можем найти постоянную A_1 как функцию $A_2, \ldots, A_n$, ибо коэфициент при ней будет отличен от нуля, так как

$$\int_{-\pi}^{+\pi} m\bar{u}_1 d\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} \bar{v}_1 d\varphi \neq 0.$$

Таким образом, мы получим решение поставленной проблемы, содержащее $n-1$ произвольную постоянную.

Перейдем к случаю, когда все знаменатели равенств (32) обращаются в нуль:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} m\bar{u}_k d\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} \bar{v}_k d\varphi = 0.$$

Для выполнения (32) тогда необходимо должно быть:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F\bar{v}_k d\varphi = 0, \qquad k = 1, 2 \ldots n.$$

Это значит, что уравнение (25′) и (25″) одновременно имеют решения. Назовем частные решения их соответственно $\widetilde{u}_F$ и $\widetilde{u}_1$.

Общее решение (24) будет:

$$u = \widetilde{u}_F + C\widetilde{u}_1 + \sum_{k=1}^{n} A_k \bar{u}_k,$$

где C и A_k — произвольные постоянные.

Требование (26) даст, ввиду $\int_{-\pi}^{+\pi} m\bar{u}_k d\varphi = 0$:

$$C \int_{-\pi}^{+\pi} m\widetilde{u}_1 d\varphi + \int_{-\pi}^{+\pi} (m\widetilde{u}_F - f)\, d\varphi = 0.$$

Отсюда должно быть найдено число C. Если коэфициент при C отличен от нуля, мы получим решение, содержащее n произвольных постоянных; если же он равен нулю, то задача либо вовсе не имеет решения в случае

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (m\widetilde{u}_F - f)\, df \neq 0,$$

либо имеет решение, содержащее $n+1$ произвольную постоянную, в противном случае.

§ 4. Основные задачи для бигармонических функций

n° 1. Первая основная задача. Приведение к системе уравнений. Нужно найти две функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, голоморфные в единичном круге $|z| < 1$ и удовлетворяющие на границе условию:

$$\varphi(z) + \frac{\omega(z)}{\omega'(z)} \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = F(z); \tag{1}$$

$\omega(z)$ — функция, дающая конформное преобразование круга $|z| < 1$ на односвязную ограниченную область B.

Ниже в n^0 3 нам потребуется считать контур L ее таким, что существуют непрерывные производные до второго порядка от координат точек контура по длине дуги.

В n° 2, § 1 мы имели случай заметить, что задача может иметь единственное решение, если мы фиксируем $\varphi(0)$ и $I\left[\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}\right]$. Будем

дем считать $\varphi(0)=0$, мнимую же часть $\varphi'(0):\omega'(0)$ оставим пока произвольной.

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ могут быть представлены рядами:

$$\varphi(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu z^\nu, \qquad \psi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_\nu z^\nu. \tag{2}$$

Будем искать α_ν, β_ν методом неопределенных коэфициентов.

Разложим для этого свободный член $F(z)$ и коэфициент $\dfrac{\omega(z)}{\overline{\omega'(z)}}$ в ряд Фурье по степеням $e^{i\vartheta}=\sigma$:

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\delta_\nu\sigma^\nu;\ ^1 \qquad F(\sigma)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}A_\nu\sigma^\nu.$$

Подставив ряды (2) в условие (1) и положив там $z=\sigma$, придем к следующему равенству:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\sigma^\nu+\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\delta_\nu\sigma^\nu\cdot\sum_{\nu=1}^{+\infty}\nu\bar{\alpha}_\nu\sigma^{-\nu+1}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{\beta}_\nu\sigma^{-\nu}=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}A_\nu\sigma^\nu. \tag{3}$$

Отсюда, после сравнения коэфициентов при положительных степенях σ, получаем систему уравнений:

$$\alpha_\nu+\sum_{k=1}^{\infty}k\bar{\alpha}_k\delta_{\nu+k-1}=A_\nu, \qquad \nu=1,2,3,\ldots \tag{4}$$

Сравнение же коэфициентов при σ^ν для $\nu=0,-1,-2,\ldots$ дает следующую систему:

$$\bar{\beta}_\nu+\sum_{k=1}^{\infty}k\bar{\alpha}_k\delta_{-\nu+k-1}=A_{-\nu} \qquad \nu=0,+1,+2,\ldots \tag{5}$$

Очевидно, все сводится к нахождению чисел α_ν из системы (4), ибо после того как они оттуда найдены, числа β_ν вполне определяются по формулам (5).

Из самой постановки задачи ясно, что система (4) не может иметь единственного решения, удовлетворяющего условиям сходимости рядов для $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ до тех пор, пока мы не фиксируем мнимую часть $\alpha_1:\omega'(0)$.

Кроме того, если $I\left[\dfrac{\alpha_1}{\omega'(0)}\right]$ фиксирована, решение может существовать лишь при определенных условиях, налагаемых на правые части системы, эквивалентные условиям (26′) и (29′), указанным во введении

[1] При сделанных относительно L предположениях можно показать, что ряд сходится абсолютно и равномерно.

к настоящей главе и выражающим равенство нулю главного вектора усилий, приложенных к контуру области, и его главного момента.

В разбираемом случае условие (26′) приводится к равенству нулю приращения функции $F(z)$ вдоль окружности круга, или просто к ее однозначности.

Равенство же (29′), ввиду $\zeta=e^{i\vartheta}$, $d\zeta=ie^{i\vartheta}d\vartheta$, дает:

$$I\left[\int_{-\pi}^{+\pi}F(e^{i\vartheta})\,\overline{\omega'(e^{i\vartheta})}\,e^{-i\vartheta}d\vartheta\right]=0. \tag{6}$$

Если нам удастся разыскать решение (4) такое, что ряды для $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi'(z)$ будут абсолютно сходиться при $|z|\leqslant 1$, то мы можем быть уверены в том, что построенные функции удовлетворяют всем поставленным требованиям.

В приближенных вычислениях часто встречается тот случай, когда единичный круг отображается на область B при помощи полинома некоторой степени n, если не точно, то по крайней мере приближенно с погрешностью, лежащей за пределами допустимой ошибки вычислений.

Итак, допустим, что

$$\omega(z)=\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\ldots+\gamma_n z^n \qquad \gamma_1\neq 0,\ \gamma_n\neq 0. \tag{7}$$

Обозначим через $\bar{\omega}(z)$ полином, коэфициенты которого сопряжены с коэфициентами $\omega(z)$:

$$\bar{\omega}(z)=\bar{\gamma}_1 z+\bar{\gamma}_2 z^2+\ldots+\bar{\gamma}_n z^n.$$

Так как $\omega'(z)\neq 0$ при $|z|\leqslant 1$, функция $\overline{\omega'}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ будет регулярна и отлична от нуля всюду при $|z|\geqslant 1$. Поэтому отношение

$$\frac{\omega(z)}{\overline{\omega'}\left(\dfrac{1}{z}\right)}$$

представляет собой регулярную при $|z|\geqslant 1$ функцию, имеющую на бесконечности плюс n-го порядка.

Ее разложение в ряд Лорана около бесконечно далекой точки имеет вид:

$$\frac{\omega(z)}{\overline{\omega'}\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\delta_n z^n+\delta_{n-1}z^{n-1}+\ldots+\delta_1 z+\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_{-\nu}z^{-\nu}. \tag{8}$$

Положив в этом равенстве $z=\sigma$, имеем:

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'}\left(\dfrac{1}{\sigma}\right)}=\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}=\delta_n\sigma^n+\delta_{n-1}\sigma^{n-1}+\ldots+\delta_1\sigma+\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_{-\nu}\sigma^{-\nu}. \tag{9}$$

Все коэфициенты δ_ν с нумером, большим n, оказываются равными нулю. Система (4) примет, следовательно, форму:

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha_1 + \bar{\alpha}_1\delta_1 + 2\bar{\alpha}_2\delta_2 + \ldots + n\bar{\alpha}_n\delta_n = A_1, \\ \alpha_2 + \bar{\alpha}_1\delta_2 + 2\bar{\alpha}_2\delta_3 + \ldots + (n-1)\bar{\alpha}_{n-1}\delta_n = A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n + \bar{\alpha}_1\delta_n = A_n \end{cases}$$

$$(11)\quad \alpha_\nu = A_\nu, \quad \nu \geqslant n+1.$$

Система же (5) для определения β_ν будет:

$$(12)\quad \bar{\beta}_\nu + \sum_{k=1}^{n+\nu+1} k\bar{\alpha}_k\delta_{-\nu+k-1} = A_{-\nu}, \qquad \nu = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Равенства (10) дают систему $2n$ вещественных уравнений с $2n$ неизвестными a_k и b_k ($\alpha_k = a_k + ib_k$). Определитель ее должен равняться нулю, ибо $I\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)$ остается неопределенной. Ранг системы равняется $n-1$, так как, если мы зададим эту величину, система будет иметь, что вытекает из единственности решения основной бигармонической задачи, единственное решение.

Замечание I. Интегральное представление функции $\psi(z)$ через $\varphi(z)$ в общем случае может легко быть получено из предельного условия (1).

Действительно, положив там $z = \sigma$ и перейдя к сопряженным величинам, получим предельные значения $\psi(z)$ в форме:

$$\psi(\sigma) = \overline{F(\sigma)} - \overline{\varphi(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma).$$

Применим формулу Коши к обеим частям равенства. Из теории аналитических функций известно, что если $f(\sigma)$ есть предельные значения функции, голоморфной в единичном круге, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma = \overline{f(0)},^1$$

---

[1] В самом деле, пусть $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$. С другой стороны,

$$\frac{1}{\sigma - z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\sigma^{\nu+1}}, \quad d\sigma = ie^{i\vartheta}d\vartheta = i\sigma d\vartheta.$$

Если подставить все под знак интеграла, мы приведем его к вычислению суммы:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k,\,\nu=0}^{\infty} \bar{a}_k z^\nu \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma^{-k-\nu}d\vartheta,$$

и стало быть

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\varphi(\sigma)}}{\sigma - z}d\sigma = \overline{\varphi(0)} = 0.$$

Поэтому

$$(13)\quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma - z}d\sigma - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - z}d\sigma.$$

Представляет интерес случай, когда $\omega(z)$ — целая функция

$$\omega(z) = \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots$$

Тогда $\overline{\omega(\sigma)}$ будут предельными значениями на единичной окружности функции:

$$\bar{\omega}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\bar{\gamma}_1}{z} + \frac{\bar{\gamma}_2}{z^2} + \ldots$$

голоморфной всюду за исключением точки нуль, являющейся для нее либо плюсом, когда $\omega(z)$ — полином, либо существенной особенностью, когда $\omega(z)$ — трансцендентная функция.

Второй интеграл правой части (13) будет равен:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - z}d\sigma$$

и даст сумму вычетов функции

$$(*)\qquad \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta - z}$$

относительно особых точек внутри единичной окружности. Таких точек две. Во-первых, $\zeta = z$ с вычетом

$$(**)\qquad \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)}{\omega'(z)}\varphi'(z)$$

и, во-вторых, точка $\zeta = 0$. Нам нет нужды проделывать вычисления для нахождения второго вычета. Достаточно заметить следующее весьма простое обстоятельство. Как известно, он будет равен коэфициенту при $\frac{1}{\zeta}$

но все интегралы вида $\int_{-\pi}^{+\pi} \sigma^{-k-\nu}d\vartheta$ равны нулю за исключением одного, когда $k = \nu = 0$; последний равен 2π и от всей суммы сохранится один лишь член $\bar{a}_0 = \overline{f(0)}$.

в разложении функции (*) около начала координат в ряд Лорана. Последний же можно получить путем умножения степенных рядов для каждого сомножителя. Но когда мы будем раскладывать по степеням ζ дробь $\frac{1}{\zeta - z}$, переменная z войдет всюду в отрицательных степенях, ибо

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\zeta}{z^2} - \dots$$

Поэтому вычет представится в виде степенного ряда от z, содержащего только отрицательные степени z. Эта функция от z, совместно с вычетом (**), должна в сумме дать голоморфную в единичном круге функцию. Вычет в нуле, следовательно, должен равняться взятой с обратным знаком главной части разложения Лорана по степеням z функции:

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)}{\omega'(z)}\varphi'(z);$$

изучаемый же интеграл поэтому равен регулярной части этого ряда. Обозначим ее символом Reg.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma = \operatorname{Reg}\left[\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)}{\omega'(z)}\varphi'(z)\right],$$

(14)

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma - \operatorname{Reg}\left[\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)}{\omega'(z)}\varphi'(z)\right].$$

Приведем пример.

Пример I. Решим сначала простейшую задачу. Пусть область B — круг радиуса R. Здесь $\omega(z) = Rz$, $\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \sigma$, $\delta_1 = 1$, $\delta_\nu = 0$, при $\nu \neq 1$. Уравнения для чисел α_ν принимают вид:

$$\alpha_1 + \overline{\alpha}_1 = A_1,$$

$$\alpha_\nu = A_\nu, \quad \nu \geqslant 2.$$

Решение возможно лишь в том случае, когда $I(A_1) = 0$.

Положим $b_1 = I(\alpha_1) = 0$, тогда

$$\alpha_1 = a_1 = \frac{A_1}{2}.$$

Числа β_ν найдутся из равенств:

$$\overline{\beta}_\nu + (\nu+2)\,\overline{a}_{\nu+2} = A_{-\nu},$$

$$\beta_\nu = \overline{A}_\nu - (\nu+2)\,A_{\nu+2};$$

$$\varphi(z) = \frac{A_1}{2}z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots$$

или, так как

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\sigma)\,\sigma^{-\nu}\,d\vartheta,$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\sigma)\left\{\frac{z}{2\sigma} + \frac{z^2}{\sigma^2} + \frac{z^3}{\sigma^3} + \dots\right\}d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{F(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma - A_0 - \frac{1}{2}A_1 z,$$

$$\psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\overline{A}_{-\nu}z^\nu - \sum_{\nu=2}^{\infty}\nu A_\nu z^{\nu-2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma - \frac{\varphi'(z)}{z} + \frac{A_1}{z}.$$

Чтобы получить решение в области B, мы теперь всюду в формулах должны будем заменить z на $\frac{z}{R}$. Положив $\varphi\left(\frac{z}{R}\right) = \varphi_1(z)$ и $\psi\left(\frac{z}{R}\right) = \psi_1(z)$, имеем:

$$\varphi_1(z) = \frac{A_1}{2R}z + \frac{A_2}{R^2}z^2 + \dots = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=R}\frac{F\left(\frac{\sigma}{R}\right)}{\sigma - z}\,d\sigma - A_0 - \frac{1}{2}\frac{A_1}{R}z,$$

$$\psi_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\overline{A}_{-\nu}}{R^\nu}z^\nu - \sum_{\nu=2}^{\infty}\nu\frac{A_\nu}{R^{\nu-2}}z^{\nu-2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=R}\frac{\overline{F\left(\frac{\sigma}{R}\right)}}{\sigma - z}\,d\sigma - \frac{R^2\varphi_1'(z)}{z} + \frac{RA_1}{z}.$$

Пример II. Граница области B есть улитка Паскаля:

$$\omega(z) = bz(1+az), \quad b>0, \quad 0<a<\frac{1}{2},$$

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{\sigma(1+a\sigma)}{1+2a\bar{\sigma}} = \frac{\sigma^2(1+a\sigma)}{2a+\sigma} =$$

$$= a\sigma^2 + (1-2a^2)\sigma - 2a(1-2a^2)\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\left(\frac{2a}{\sigma}\right)^\nu$$

$$\delta_\nu = 0, \quad \nu>2; \quad \delta_2 = a, \quad \delta_1 = 1-2a^2,$$

$$\delta_{-\nu} = (-1)^{\nu+1}(2a)^{\nu+1}(1-2a^2).$$

Система для чисел α_ν сводится к следующей:

$$\alpha_1 + \bar{\alpha}_1(1-2a^2) + 2a\bar{\alpha}_2 = A_1; \quad \alpha_2 + \bar{\alpha}_1 a = A_2,$$

$$\alpha_\nu = A_\nu, \quad \nu \geqslant 3.$$

Из второго уравнения найдем $\alpha_2 = A_2 - \bar{\alpha}_1 a$. Внося это в первое уравнение, получим:

$$\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 = \frac{A_1 - 2a\bar{A}_2}{1-2a^2}.$$

Отсюда видно, что решение возможно только при условии $J[A_1 - 2aA_2] = 0$. Будем опять считать $b_1 = 0$.

$$\alpha_1 = \frac{A_1 - 2a\bar{A}_2}{2(1-2a^2)};$$

$\varphi(z)$ найдена весьма просто. Для разыскания $\psi(z)$ применим формулу (14), приведенную в замечании:

$$\operatorname{Reg}\left[\frac{\overline{\omega\left(\frac{1}{z}\right)}}{\omega'(z)}\varphi'(z)\right] =$$

$$= \frac{z+a}{z^2(1+2az)}\varphi'(z) - \frac{a\alpha_1}{z^2} - \frac{2a\alpha_2 + \alpha_1(1-2a^2)}{z},$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma - z}d\sigma -$$

$$- \frac{z+a}{z^2(1+2az)}\varphi'(z) + \frac{a\alpha_1}{z^2} + \frac{2a\alpha_2 + \alpha_1(1-2a^2)}{z}.$$

Задача для внешности замкнутой кривой может быть простым преобразованием сведена к разобранному случаю.

Пусть B есть область, внешняя относительно кривой L. Отобразим на нее при помощи функции $z = \omega(\zeta)$ единичный круг так, чтобы нуль плоскости ζ перешел в бесконечно далекую точку плоскости z.

Отображающая функция имеет здесь вид:

$$\omega(\zeta) = \frac{\gamma}{\zeta} + \gamma_0 + \gamma_1\zeta + \ldots \tag{15}$$

В области B, как нами указывалось в п° 2 введения к настоящей главе, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в общем случае имели форму:

$$\begin{cases} \varphi_1(z) = -\dfrac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + (B+Ci)z + \varphi^0(z), \\ \psi_1(z) = \dfrac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + (B'+C'i)z + \psi^0(z), \end{cases} \tag{16}$$

где X, Y, B, C, B', C', суть некоторые постоянные, обладающие известным физическим значением, а φ^0, ψ^0 однозначные аналитические функции, регулярные всюду вне контура L, включая и бесконечность. Подставляя сюда вместо z его значение, мы видим, что, в силу равенства (15), функции φ_1 и ψ_1 примут следующую форму:

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \dfrac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta + (B+Ci)\dfrac{\gamma}{\zeta} + \varphi_0(\zeta), \\ \psi(\zeta) = -\dfrac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta + (B'+C'i)\dfrac{\gamma}{\zeta} + \psi_0(\zeta), \end{cases} \tag{17}$$

причем $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ голоморфны в единичном круге. Постоянную C будем считать равной нулю. Внесем $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ в предельное условие (1). Простые вычисления показывают, что $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ должны удовлетворять тому же условию, но с измененной правой частью:

$$\varphi_0(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'_0(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} = F_0(\sigma),$$

$$F_0(\sigma) = F(\sigma) - \frac{X+iY}{2\pi}\ln\sigma - \frac{B\gamma}{\sigma} - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\left\{\frac{X-iY}{2\pi(1+\varkappa)}\sigma - B\bar{\gamma}\sigma^2\right\} - \tag{18}$$

$$-(B'-iC')\bar{\gamma}\sigma.$$

В самой постановке задачи мы не предполагали главный вектор внешних действующих на контур L напряжений равным нулю и функция $F(\sigma)$ могла быть многозначной. При обходе по окружности в положительном направлении $F(\sigma)$ получает приращение $i(X+iY)$. На такую же величину увеличивается и $\dfrac{X+iY}{2\pi}\ln\sigma$, и $F_0(\sigma)$ возвращается поэтому к прежнему значению.

Для φ_0 и ψ_0 мы получили, таким образом, уже известную задачу.

Как и в предыдущей задаче, представляет интерес частный случай отображающей функции, когда система уравнений для a_ν будет особенно простой.

Пусть единичный круг с достаточной точностью отображается на область B при помощи функций вида:

$$\omega(\zeta)=\frac{\gamma}{\zeta}+\gamma_0+\gamma_1\zeta+\ldots+\gamma_n\zeta^n;$$

$$\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=-\overline{\gamma}\zeta^2+\overline{\gamma}_1+\ldots+n\frac{\overline{\gamma}_n}{\zeta^{n-1}}. \tag{19}$$

Ввиду $\omega'(\zeta)\neq 0$ в единичном круге, $\dfrac{1}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ будет регулярной всюду при $|\zeta|\geqslant 1$ и иметь бесконечно далекую точку полюсом второго порядка; отношение же

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$$

будет функцией, регулярной вне единичного круга и имеющей на бесконечности полюс порядка $n-2$. Ее разложение около бесконечности будет:

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}=\delta_{n-2}\zeta^{n-2}+\ldots+\delta_1\zeta+\delta_0+\delta_{-1}\zeta^{-1}+\ldots;$$

отсюда:

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}=\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}=\delta_{n-2}\sigma^{n-2}+\ldots+\delta_1\sigma+\delta_0+\delta_{-1}\sigma^{-1}+\ldots$$

Система уравнений для коэфициентов α_ν примет вид:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1+\overline{\alpha}_1\delta_1+2\overline{\alpha}_2\delta_2+\ldots+(n-2)\,\overline{\alpha}_{n-2}\delta_{n-2}=A_1^{(0)},\\ \alpha_2+\overline{\alpha}_1\delta_2+2\alpha_2\delta_3+\ldots+(n-3)\,\overline{\alpha}_{n-3}\delta_{n-2}=A_2^{(0)}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n-2}+\overline{\alpha}_1\delta_{n-2}=A_{n-2}^{(0)}\\ \alpha_\nu=A_\nu^{(0)},\quad \nu\geqslant n-1.\end{array}\right. \tag{20}$$

Замечание II. Остановим внимание читателя еще на случае, когда ряд для $\omega(\zeta)$ сходится на всей плоскости:

$$\omega(\zeta)=\frac{\gamma}{\zeta}+\textit{целая функция}.$$

Буквальное повторение того, что мы говорили в первом замечании относительно $\psi(\sigma)$, применимо и к функции $\psi_0(\zeta)$, и поэтому мы можем написать:

$$\psi_0(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F_0(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma-\operatorname{Reg}\left\{\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi_0'(\zeta)\right\}. \tag{21}$$

Пример III. Пусть B — внешность эллипса с центром в начале и полуосями $a=R(1+m)$, $b=R(1-m)$, $R>0$, $0\leqslant m<1$

$$\omega(\zeta)=R\left(m\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),$$

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}=\frac{1+m\sigma^2}{\sigma(m-\sigma^2)}=-\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^3}\left(1+\frac{m}{\sigma^2}+\frac{m^2}{\sigma^4}+\ldots\right).$$

Разложение $\dfrac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}$ в этом случае совершенно не содержит положительных степеней σ и уравнения для нахождения α_ν принимают здесь весьма простой вид:

$$\alpha_\nu=A_\nu;$$

$$\varphi_0(\zeta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}A_\nu\zeta^\nu=\frac{\zeta}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F_0(\sigma)\frac{d\vartheta}{\sigma-\zeta}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\zeta}{\sigma}F_0(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}.$$

Функцию $\psi_0(\zeta)$ найдем, пользуясь равенством (21). Отношение

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}=-\frac{\zeta(m+\zeta^2)}{1-m\zeta^2}$$

есть голоморфная функция от ζ при $|\zeta|\leqslant 1$, так как $m<1$;

$$\psi_0(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F_0(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma+\frac{\zeta(m+\zeta^2)}{1-m\zeta^2}\varphi_0'(\zeta).$$

φ_0 и ψ_0 являются решениями задачи для того случая, когда $X=Y=B=B'=C'=0$. Чтобы получить общее решение, достаточно к ним прибавить соответственно:

$$\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta+B\frac{\gamma}{\zeta},$$

$$-\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta+(B'+iC')\frac{\gamma}{\zeta}.$$

При этом:

$$F_0(\sigma) = F(\sigma) - \frac{X+iY}{2\pi}\ln\sigma - \frac{BR}{\sigma} +$$

$$+\frac{1+m\sigma^2}{\sigma(\sigma^2-m)}\left\{\frac{X-iY}{2\pi(1+\varkappa)}\sigma - BR\sigma^2\right\} - (B'-iC')R\sigma.$$

n° 2. Вторая основная задача. Приведение к системе уравнений. После отображения области B предельные условия второй основной задачи записываются в форме (см. n° 3, § 1):

$$\varkappa\varphi(z) - \frac{\omega(z)}{\overline{\omega'(z)}}\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = \Phi(z), \quad |z| = 1. \tag{22}$$

Рассуждения и выкладки, связанные здесь с применением метода неопределенных коэфициентов, весьма сходны с теми, которые мы приводили для первой задачи. Сейчас однако произвольным остается только одно из значений φ или ψ в какой-либо точке области. Значение же мнимой части отношения $\frac{\varphi'(z)}{\omega'(z)}$ в той же точке должно быть найдено из задачи.

Пусть область B конечна и односвязна; $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будут голоморфны при $|z|<1$. Мы будем считать $\varphi(0)=0$.

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu z^\nu, \qquad \psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_\nu z^\nu.$$

После подстановки в предельное условие (22), если положить там $z=\sigma$, имеем:

$$\varkappa\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\sigma^\nu - \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\delta_\nu\sigma^\nu\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\bar{\alpha}_\nu\sigma^{-\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{\beta}_\nu\sigma^{-\nu} = \Phi(\sigma) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}B_\nu\sigma^\nu.$$

Откуда, после сравнения коэфициентов при степенях σ, получаем систему уравнений:

$$\varkappa\alpha_\nu - \sum_{k=1}^{\infty}k\bar{\alpha}_k\delta_{\nu+k-1} = B_\nu, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots \tag{23}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}k\bar{\alpha}_k\delta_{k-\nu-1} - \bar{\beta}_\nu = B_{-\nu}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

Подобно тому как в первой задаче, если нам удастся разыскать решение системы (23), коэфициенты β_ν определятся из системы (24) без затруднений.

В случае, когда отображающая функция есть полином (7), и разложение $\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}$ содержит только конечное число положительных степеней σ, система (23) вырождается и принимает форму:

$$\begin{aligned}
&\varkappa\alpha_1 - \bar{\alpha}_1\delta_1 - 2\bar{\alpha}_2\delta_2 - \ldots - n\bar{\alpha}_n\delta_n = B_1,\\
&\varkappa\alpha_2 - \bar{\alpha}_1\delta_2 - 2\bar{\alpha}_2\delta_3 - \ldots - (n-1)\bar{\alpha}_{n-1}\delta_n = B_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varkappa\alpha_n - \bar{\alpha}_1\delta_n = B_n,\\
&\varkappa\alpha_\nu = B_\nu, \qquad \nu \geqslant n+1.
\end{aligned}$$

Интегральное представление функции ψ находится таким же способом, как и раньше (см. замечание I n° 1):

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma-z}d\sigma - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\cdot\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-z}d\sigma. \tag{25}$$

Наконец, когда $\omega(z)$ — целая функция, второй член в предыдущем равенстве вычисляется просто, и оно примет форму:

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\Phi(\sigma)}}{\sigma-z}d\sigma - \operatorname{Reg}\left[\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)}{\omega'(z)}\varphi'(z)\right]. \tag{26}$$

Аналогично все будет происходить и для бесконечной области, ограниченной одним простым контуром.

Соответствующих выкладок мы приводить не будем.

n° 3. Первая основная задача. Приведения к функциональным уравнениям. Область B мы будем предполагать ограниченной и односвязной. Ниже мы укажем, как изменятся функциональные уравнения для случая неограниченной области.

Наряду с предельным условием, получающимся после конформного преобразования ее на круг, рассмотрим условие, сопряженное с ним:

$$\begin{cases}
\varphi(\sigma) + \dfrac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = F(\sigma),\\
\overline{\varphi(\sigma)} + \dfrac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = \bar{F}(\sigma).
\end{cases} \tag{27}$$

Умножим оба равенства на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma - z}$ и проинтегрируем по окружности $|\sigma| = 1$. По теореме Гарнака мы получим условия, эквивалентные исходным:

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\sigma|=1} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma + \\ \qquad + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\psi(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma = A(z), \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\varphi(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma + \\ \qquad + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\sigma|=1} \frac{\psi(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma = B(z), \end{cases}$$

где для краткости положено:

$$(29)\quad A(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{F(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma, \quad B(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma.$$

После применения формулы Коши и использования того обстоятельства, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\varphi(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma = \varphi(0) = \overline{\alpha_0};$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\psi(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma = \overline{\psi(0)} = \overline{\beta_0},$$ [3]

условия (28) приводятся к следующим:

$$(30)\quad \begin{cases} \varphi(z) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\sigma|=1} \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - \tau}\,d\sigma + \overline{\beta_0} = A(z), \\ \psi(z) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(z)}\,\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma + \overline{\alpha_0} = B(z). \end{cases}$$

Первое уравнение представляет собой интегро-дифференциальное уравнение для $\varphi(z)$. Совместно с условием $\varphi(0) = \alpha_0$ оно вполне опре-

[1] См. сноску в п° 1.

деляет функцию $\varphi(z)$, если задана мнимая часть отношения $\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}$. В состав его входит неизвестная постоянная $\overline{\beta_0} = \overline{\psi(0)}$. Мы помним, однако, что одну из величин α_0 и β_0 мы можем задавать произвольно, поэтому при его решении мы могли бы произвольно фиксировать $\overline{\beta_0}$, вместо того, чтобы считать $\alpha_0 = 0$, как это мы обычно делали.

Из (30) легко получается интегральное уравнение, относящееся к граничным значениям $\varphi'(z)$.

Для нас выгоднее сначала преобразовать (30) с тем, чтобы устранить особенность ядра.

В силу равенства

$$\frac{\omega(z)}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{d\sigma}{\sigma - z} = \frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}\,\omega(z),$$

мы можем первое уравнение (30) переписать в виде:

$$(31)\quad \begin{aligned} &\varphi(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\omega(\sigma) - \omega(z)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma - z)}\,\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma + \\ &\quad + k\omega(z) + \overline{\beta_0} = A(z), \\ &k = \overline{\varphi'(0)} : \overline{\omega'(0)}. \end{aligned}$$

Полученное равенство содержит член $k\omega(z)$, существенно связанный через k со значением $\varphi'(z)$ в центре круга, и из него не может быть получено путем предельного перехода на окружность уравнение, относящееся исключительно к контурным значениям функции $\varphi'(z)$. Чтобы избегнуть этого, введем вместо $\varphi(z)$ новую неизвестную функцию $\varphi_0(z)$, связанную с ней равенством:

$$(32)\quad \varphi(z) = -k\omega(z) + \varphi_0(z).$$

В правой части оба члена неизвестны, ибо мы не знаем не только функцию $\varphi_0(z)$, но и число k. После того как будет найдена $\varphi_0(z)$, мы должны будем подобрать число k сообразно требованию $k = \frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}$.

Подставляя (32) в (31) мы, в силу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\omega(\sigma) - \omega(z)}{\sigma - z}\,d\sigma = 0,$$

придем к равенству:

$$(33)\quad \varphi_0(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\omega(\sigma) - \omega(z)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma - z)}\,\overline{\varphi'_0(\sigma)}\,d\sigma + \overline{\beta_0} = A(z).$$

Диференцируя по z, получим:

$$\varphi_0'(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\omega(\sigma)-\omega(z)}{\sigma-z}\right\}\frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,d\sigma=A'(z),$$

откуда, устремляя z к произвольной точке z_0 окружности, получим после предельного перехода для $\varphi'_0(z_0)$ интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$\varphi'_0(z_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}K(z_0,\sigma)\overline{\varphi'_0(\sigma)}\,d\sigma=A'(z_0), \tag{34}$$

ядро которого

$$K(z_0,\sigma)=\frac{\omega(\sigma)-\omega(z_0)-(\sigma-z_0)\omega'(z_0)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma-z_0)^2}, \tag{35}$$

при наших предположениях о контуре L, будет ограниченным, ибо при $\sigma\to z_0$ оно будет стремиться к

$$K(z_0,z_0)=\frac{1}{2}\frac{\omega''(z_0)}{\omega'(z_0)}.$$

Ввиду единственности решения задачи теории упругости, уравнение (34) должно также иметь единственное решение.

Допустим, что мы каким-либо путем нашли $\varphi_0'(\sigma)$. Построим по нему $\varphi_0(z)$, определив надлежащим образом постоянную $\varphi_0(0)$; так, если мы считаем, что $\varphi(0)=0$ и при преобразовании сохраняется начало координат, т. е. $\omega(0)=0$, нужно считать $\varphi_0(0)=0$.

Составляем затем функцию

$$\varphi(z)=-k\omega(z)+\varphi_0(z),$$

считая постоянную k неопределенной. Ее мы должны подобрать по условию $k=\overline{\varphi'(0)}:\overline{\omega'(0)}$. Это даст:

$$k+\bar{k}=\frac{\overline{\varphi_0'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}, \tag{36}$$

что возможно лишь в том случае, когда отношение $\dfrac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}$ будет равно вещественному числу. Таким образом, равенство:

$$I\left(\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}\right)=0$$

будет условием возможности решения проблемы. Оно, очевидно, должно свестись к требованию равенства нулю момента внешних действующих сил. Мы не станем этого проверять.

Из уравнения (36) можно найти только вещественную часть k; мнимая же часть остается произвольной, сообразно произволу мнимой части $\dfrac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}$.

Особенно просто решается проблема в том случае, когда отображающая функция будет рациональной. Мы имеем в виду остановиться на простейшем случае, когда $\omega(z)$ — полином, и предлагаем читателю, пожелавшему ознакомиться с вопросом в его общей постановке, обратиться к уже несколько раз упоминавшейся книге проф. Н. И. Мусхелишвили „Некоторые задачи теории упругости“ (стр. 261).

Итак, пусть

$$\omega(z)=\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\ldots+\gamma_n z^n.$$

Само собой разумеется, излагаемое нами сейчас будет лишь формой отличаться от того, что мы излагали в n 1°, развивая метод бесконечных систем уравнений.

Отношение

$$\frac{\omega(z)}{\overline{\omega'}\left(\dfrac{1}{z}\right)},$$

обращающееся в $\dfrac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}$ при $z=\sigma$, имеет при $|z|\geqslant 1$ разложение вида:

$$\frac{\omega(z)}{\overline{\omega'}\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\delta_n z^n+\ldots\delta_1 z+\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_{-\nu}z^{-\nu}.$$

Для решения проблемы нет необходимости вычислять всех коэфициентов δ_ν; достаточно найти только $\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots\ \delta_n$.

Функциональное уравнение (30) для $\varphi(z)$, если в нем заменить $\bar{\sigma}$ на $\dfrac{1}{\sigma}$, примет следующий вид:

$$\varphi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'}\left(\dfrac{1}{\sigma}\right)}\,\frac{\overline{\varphi'}\left(\dfrac{1}{\sigma}\right)}{\sigma-z}\,d\sigma+\overline{\beta_0}=A(z).$$

Функция

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)}\,\frac{\overline{\varphi'}\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)}{\zeta-z},$$

так как $|z|<1$, голоморфна по ζ вне единичного круга, и интеграл поэтому равен вычету этой функции в бесконечно далекой точке, взя-

тому с обратным знаком, т. е. равен коэфициенту при $\frac{1}{\zeta}$ в разложении этой функции около $\zeta = \infty$:

$$\varphi(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots,$$

$$\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \overline{\alpha_1} + \frac{2\overline{\alpha_2}}{\zeta} + \frac{3\overline{\alpha_3}}{\zeta^2} + \dots + \frac{n\overline{\alpha_n}}{\zeta^{n-1}} + \dots,$$

$$\frac{\omega(\xi)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\varphi'\left(\frac{1}{\zeta}\right) = k_n\zeta^n + k_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + \tag{37}$$

$$+ k_1 + k_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{-\nu}\zeta^{-\nu},$$

где

$$k_n = \overline{\alpha}_1\delta_n,$$

$$k_{n-1} = \overline{\alpha}_1\delta_{n-1} + 2\overline{\alpha}_2\delta_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$k_2 = \overline{\alpha}_1\delta_2 + 2\overline{\alpha}_2\delta_3 + \dots + (n-1)\overline{\alpha}_{n-1}\delta_n,$$

$$k_1 = \overline{\alpha}_1\delta_1 + 2\overline{\alpha}_2\delta_2 + \dots + n\overline{\alpha}_n\delta_n.$$

Далее

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \frac{z^2}{\zeta^3} + \dots.$$

Поэтому искомый коэфициент будет:

$$k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + \dots + k_n z^n.$$

Подставив это в последнее уравнение для $\varphi(z)$, получим сразу же готовое выражение для нее:

$$\varphi(z) + \overline{\beta}_0 + k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + \dots + k_n z^n = \tag{38}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{F(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma,$$

которое содержит, правда, пока еще неизвестные величины $\overline{\beta}_0 + k_0, \dots, k_n$, но нахождение их уже не представит затруднений. Разлагая интеграл в правой части равенства по степеням z, будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{F(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots,$$

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} F(\sigma)\,\sigma^{-\nu-1}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\sigma)\,e^{-i\nu\vartheta}\,d\vartheta.$$

Сравним теперь коэфициенты при $z^0, z^1, z^2, \dots z^n$ в (38):

$$\overline{\beta}_0 + k_0 = A_0,$$

$$\alpha_\nu + k_\nu = A_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \dots n.$$

Развертывая же последние n уравнений, получим систему линейных уравнений для определения коэфициентов α_ν:

$$\alpha_1 + \overline{\alpha}_1\delta_1 + \dots + n\overline{\alpha}_n\delta_n = A_1,$$

$$\alpha_2 + \overline{\alpha}_1\delta_2 + \dots + (n-1)\,\overline{\alpha}_{n-1}\delta_n = A_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_n + \overline{\alpha}_1\delta_n = A_n,$$

полученную нами также в n° 1.

После того как найдена $\varphi(z)$, функцию $\psi(z)$ можно найти, пользуясь равенством (14), которое, в силу (37), принимает вид:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma - \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)}{\omega'(z)}\varphi'(z) +$$

$$+ \frac{\overline{k_1}}{z} + \frac{\overline{k_2}}{z^2} + \dots + \frac{\overline{k_n}}{z^n}.$$

Обратимся к случаю бесконечной области B. При условии соответствия нуля единичного круга $|z| \leqslant 1$ и бесконечно далекой точки области B, отображающая функция будет:

$$\omega(z) = \frac{\gamma}{z} + \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots = \frac{\gamma}{z} + \omega_0(z).$$

Как нами выяснено выше, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют вид:

$$\varphi(z) = \frac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + \frac{B\gamma}{z} + \varphi_0(z),$$

$$\psi(z) = -\frac{\varkappa(X - iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + (B' + iC')\frac{\gamma}{z} + \psi_0(z),$$

где $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ голоморфны и должны удовлетворять на границе $z = \sigma$ условию:

$$\varphi_0(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi_0'(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} = F_0(\sigma).$$

$F_0(\sigma)$ имеет известное значение (18).

Поэтому, прежде всего интегралы типа Коши $A(z)$ и $B(z)$ в правых частях уравнений (28) должны быть заменены соответственно на

$$(39)\qquad A_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{F_0(\sigma)}{\sigma-z}\,d\sigma,\qquad B_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F_0(\sigma)}}{\sigma-z}\,d\sigma.$$

Далее, ввиду $\omega'(0)=\infty$, $k=\dfrac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}=0$, член $k\omega(z)$ в уравнении (31) пропадет, и оно примет вид:

$$(40)\qquad \varphi_0(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\omega(\sigma)-\omega(z)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma-z)}\,\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\sigma+\overline{\beta}_0=A_0(z).$$

Наконец,

$$\frac{\omega(\sigma)-\omega(z)}{\sigma-z}=\frac{\omega_0(\sigma)-\omega_0(z)}{\sigma-z}-\frac{\gamma}{\sigma z},$$

и так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{d\sigma}{\sigma}=0,$$

что видно из того обстоятельства, что разложение интегрируемой функции по степеням σ не содержит свободного члена, равенство (40) можем записать следующим образом:

$$(41)\qquad \varphi_0(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\omega_0(\sigma)-\omega_0(z)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma-z)}\,\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\sigma+\overline{\beta}_0=A_0(z).$$

Отсюда дифференцированием и предельным переходом на окружность получаем интегральное уравнение для $\varphi_0'(z)$:

$$(42)\qquad \varphi_0'(z_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}K_0(z_0,\sigma)\,\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\sigma=A_0'(z_0),$$

где

$$K_0(z_0,\sigma)=\frac{\omega_0(\sigma)-\omega_0(z_0)-(\sigma-z_0)\,\omega_0'(z_0)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma-z_0)^2}.$$

Рассмотрим частный случай, когда отображающая функция будет:

$$\omega(z)=\frac{\gamma}{z}+\gamma_0+\gamma_1 z+\ldots+\gamma_n z^n.$$

Здесь

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)}}=\delta_{n-2}\zeta^{n-2}+\ldots+\delta_1\zeta+\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_{-\nu}\zeta^{-\nu}.$$

Поэтому

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)}}\,\overline{\varphi_0'(\zeta)}=k_{n-2}^{(0)}\zeta^{n-2}+\ldots+k_1^{(0)}\zeta+k_0^{(0)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}k_{-\nu}^{(0)}\zeta^{-\nu},$$

где

$$\begin{aligned}k_{n-2}^{(0)}&=\overline{\alpha}_1\delta_{n-2},\\ k_{n-3}^{(0)}&=\overline{\alpha}_1\delta_{n-3}+2\overline{\alpha}_2\delta_{n-2}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ k_1^{(0)}&=\overline{\alpha}_1\delta_1+2\overline{\alpha}_2\delta_2+\ldots+(n-2)\,\overline{\alpha}_{n-2}\delta_{n-2}.\end{aligned}$$

Интеграл в левой части уравнения (31) будет, следовательно, равен:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\omega(\sigma)-\omega(z)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma-z)}\,\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\sigma=k^{(0)}{}_0+k_1^{(0)}z+\ldots+k_{n-2}^{(0)}z^{n-2},$$

и само уравнение принимает форму:

$$\varphi_0(z)+\overline{\beta}_0+k_0^{(0)}+k_1^{(0)}z+\ldots+k_{n-2}^{(0)}z^{n-2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{F_0(\sigma)}{\sigma-z}\,d\sigma.$$

Коэфициенты же $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{n-2}$ определятся из системы:

$$\begin{aligned}&\alpha_1+\overline{\alpha}_1\delta_1+2\overline{\alpha}_2\delta_2+\ldots+(n-2)\,\overline{\alpha}_{n-2}\delta_{n-2}=A_1^{(0)},\\ &\alpha_2+\overline{\alpha}_1\delta_2+2\overline{\alpha}_2\delta_3+\ldots+(n-3)\,\overline{\alpha}_{n-3}\delta_{n-2}=A_2^{(0)},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\alpha_{n-2}+\overline{\alpha}_1\delta_{n-2}=A_{n-2}^{(0)},\end{aligned}$$

$$A_\nu^{(0)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_0(\sigma)\,e^{-i\nu\theta}\,d\theta.$$

n° 4. Вторая основная задача. Приведение к функциональным уравнениям. Ввиду большой аналогии между функциональными уравнениями для первой и второй основных задач, мы коротко остановимся только на ограниченных областях.

Умножив контурные условия:

$$(43)\quad \begin{cases} \varkappa\varphi(\sigma) - \dfrac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = \Phi(\sigma), \\ \varkappa\overline{\varphi(\sigma)} - \dfrac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = \overline{\Phi(\sigma)} \end{cases}$$

на $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d\sigma}{\sigma - z}$ и проинтегрировав вдоль единичной окружности, получим:

$$(44)\quad \varkappa\varphi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma - \overline{\beta_0} = C(z),$$

$$-\psi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma + \overline{\alpha_0}\,\varkappa = D(z),$$

$$C(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\Phi(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma, \quad D(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\Phi(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma.$$

Пользуясь соотношением:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{d\sigma}{\sigma - z} = \frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}} = k,$$

преобразуем первое из уравнений к следующему:

$$(45)\quad \varkappa\varphi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\omega(\sigma) - \omega(z)}{\sigma - z} \times \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,d\sigma - k\omega(z) - \overline{\beta_0} = C(z)$$

Введем новую неизвестную функцию $\varphi_0(z)$, определенную равенством:

$$\varkappa\varphi_0(z) = \varkappa\varphi(z) - k\omega(z).$$

Подставив вместо $\varphi(z)$ в предыдущее равенство его значение, получим следующее уравнение для $\varphi_0(z)$:

$$\varkappa\varphi_0(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\omega(\sigma) - \omega(z)}{\sigma - z}\,\frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,d\sigma - \overline{\beta_0} = C(z).$$

Отсюда дифференцированием и предельным переходом на контур круга найдем интегральное уравнение для контурных значений $\varphi_0'(z)$;

$$(46)\quad \varkappa\varphi_0'(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} K(z_0, \sigma)\,\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\sigma = C'(z_0).$$

После нахождения из него $\varphi_0'(z_0)$ и восстановления по ней функции $\varphi_0(z)$, мы должны еще найти число k. Так как $\varphi(z) = \varphi_0(z) + \dfrac{k}{\varkappa}\,\omega(z)$, то для k получаем следующее уравнение:

$$k - \frac{\overline{k}}{\varkappa} = \frac{\overline{\varphi_0'(0)}}{\overline{\omega'(0)}},$$

которое, ввиду $\varkappa \neq -1$, всегда разрешимо относительно k.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I.

МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНОГО РЯДА.

§ 1. Метод Фурье.

Стр

n° 1. Задача Дирихле для прямоугольника 5
n° 2. Фундаментальные функции задачи. Общие замечания о методе Фурье 17
n° 3. Задачи Дирихле и Неймана для кольца в случае уравнения Лапласа 19
n° 4. Пример бигармонической проблемы 23

§ 2. Бесконечные системы уравнений.

n° 1. Основные определения 26
n° 2. Вполне регулярные системы 27
n° 3. Приближенное решение вполне регулярных систем 35
n° 4. Общие теоремы о регулярных системах 38
n° 5. Некоторые дополнения к теории регулярных систем 47
n° 6. Краткий обзор других исследований, относящихся к бесконечным системам 51

§ 3. Решение граничных задач с помощью неортогональных рядов.

n° 1. Общие принципы 53
n° 2. Решение задачи о разложении произвольной функции по наперед заданным функциям с помощью ортогонализации 54
n° 3. Решение задачи о разложении произвольной функции по наперед заданным с помощью бесконечных систем уравнений 65
n° 4. Пример 1. Смешанная граничная задача для уравнения Лапласа . 67
n° 5. Пример 2. Расчет защемленной пластинки 74

§ 4. Применение двойных рядов для решения граничных задач

n° 1. Постановка задачи. Основания метода 82
n° 2. Уравнение Пуассона для прямоугольника 83
n° 3. Применение к уравнениям четвертого порядка 86

§ 5. Улучшение сходимости рядов, получаемых при решении.

n° 1. Общие принципы, на которых основаны методы улучшения сходимости; простейшие примеры 91
n° 2. Метод улучшения сходимости тригонометрических рядов акад. А. Н. Крылова 92

n° 3. Ряды Фурье с усиленной сходимостью 99
n° 4. Общие методы улучшения сходимости при приближенном решении граничных задач 102

ГЛАВА II.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА.

§ 1. Замена интегрального уравнения системой линейных уравнений.

n° 1. Основные определения 111
n° 2. Замена интегрального уравнения на конечную систему линейных уравнений 112
n° 3. Оценка погрешности, получающейся в результате замены интегрального уравнения, системой линейных уравнений 117
n° 4. Пример 121

§ 2. Метод последовательных приближений и аналитическое продолжение.

n° 1. Метод последовательных приближений 124
n° 2. Применение аналитического продолжения для приближенного решения интегральных уравнений 131

§ 3. Применение интегральных уравнений к решению задачи Дирихле.

n° 1. Интегральные уравнения теории потенциала 133
n° 2. Метод К. Неймана 137
n° 3. Пример 149

§ 4. Решение интегральных уравнений с помощью замены ядра на алгебраическое. Метод Бэтмена.

n° 1. Интегральное уравнение с алгебраическим ядром 155
n° 2. Замена произвольного ядра на алгебраическое 158
n° 3. Пример 161
n° 4. Оценка погрешности Трикоми (Tricomi). 163
n° 5. Метод Бэтмена (Bateman) 167

ГЛАВА III.

МЕТОД СЕТОК.

§ 1. Выражение производных через разности функции. Приближенное выражение оператора Лапласа 176

§ 2. Уравнения эллиптического типа и соответствующие им уравнения в конечных разностях.

n° 1. Уравнения в конечных разностях 184
n° 2. Предельные условия 190
n° 3. Уравнение $\Delta\Delta U = F$ 192

§ 3. Решение уравнений в конечных разностях.

n° 1. Существование и единственность решения 195
n° 2. Метод последовательного исключения 196
n° 3. Метод последовательных приближений 200
n° 4. Решение уравнений 8, 9, 10 n° 2 202

§ 4. Оценка погрешности. Сходимость процесса. 204

ГЛАВА IV.

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

§ 1. Уравнения эллиптического типа и соответствующие им вариационные задачи.

n° 1. Основная задача 212
n° 2. Обобщение основной задачи 218
n° 3. Экстремальные свойства собственных чисел и функций 222

§ 2. Метод Ритца.

n° 1. Последовательные приближения 225
n° 2. Метод Ритца 226
n° 3. Приложение к нахождению собственных чисел и функций 235
n° 4. Замечание о вычислении собственных чисел 245

§ 3. Приведение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

n° 1. Идея метода и его приложение к интегрированию уравнений . . . 248
n° 2. Исправление результатов вычислений 253
n° 3. Приложение к собственным числам и функциям 254

§ 4. Метод наименьших квадратов.

n° 1. Средняя квадратичная погрешность 257
n° 2. Минимизация при помощи линейных комбинаций 258
n° 3. Приведение к системе обыкновенных уравнений 261
n° 4. Приложение к собственным числам и функциям 265

ГЛАВА V

КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ

§ 1. Введение

n° 1. Конформное преобразование и уравнение Лапласа 268
n° 2. Преобразование односвязных областей 270
n° 3. Преобразование многосвязных областей 272

§ 2. Метод Бибербаха.

n° 1. Экстремальное свойство функции, преобразующей область на круг 275
n° 2. Приложение метода Ритца 277
n° 3. Минимизация при помощи полиномов 280
n° 4. О сходимости последовательных приближений 284
n° 5. Внешние области 287

§ 3. Метод конформного преобразования, аналогичный методу Бибербаха.

n° 1. Экстремальное свойство преобразующей функции 288
n° 2. Применение метода Ритца 289
n° 3. Преобразование внешних областей 291

§ 4. Ортогональные полиномы и конформное преобразование.

n° 1. Полиномы Сеге 293
n° 2. Приложение к конформному преобразованию 295
n° 3. Полиномы Бохнера — Бергмана 298
n° 4. Приложение к конформному преобразованию 300

§ 5. Разложение в ряд по степеням малого параметра в случае преобразования области в круг.

n° 1. Приведение к системам уравнений . . . . . —
n° 2. Метод последовательных приближений 315
n° 3. Конформное преобразование внешних областей 318

§ 6. Разложение в ряд по степеням малого параметра в случае преобразования круга на область.

n° 1. Нормальное представление контура 326
n° 2. Метод бесконечных систем 328
n° 3. Примеры 332
n° 4. Замечание о вычислениях. Примеры 338
n° 5. Метод последовательных приближений для областей, близких к кругу 340
n° 6. Метод последовательных приближений для областей, близких к таким, конформное преобразование круга на которые — известно 343
n° 7. Метод последовательных приближений для кривых, заданных в параметрической форме 347
n° 8. Доказательство сходимости процесса последовательных приближений 353
n° 9. Замечания о преобразовании внешних областей 361

§ 7. Метод Мелентьева приближенного конформного преобразования.

n° 1. Алгорифм последовательных приближений 371
n° 2. Выбор первого приближения. Схема вычислений 379
n° 3. Об отображении внешних областей 390
n° 4. Случай симметричных областей 391
n° 5. Конформное преобразование двусвязных областей 395

§ 8. Функция Грина и конформное преобразование. 405

§ 9. Приложение интегральных уравнений к конформному преобразованию.

n° 1. Интегральное уравнение для преобразования внутренних областей. 407
n° 2. Замечания о решении интегрального уравнения 411
n° 3. Интегральное уравнение для преобразования внешних областей . 413
n° 4. Преобразование двусвязной области на круговое кольцо 417
n° 5. Преобразование области на плоскость с разрезами 425

§ 10. Отображение полуплоскости на многоугольник.

n° 1. Вывод формулы Кристоффеля — Шварца 430
n° 2. Замечание о постоянных в интеграле Кристоффеля — Шварца . . 433
n° 3. О методе Ньютона для системы уравнений и вычислении несобственных интегралов 435
n° 4. Примеры 438
n° 5. Отображение произвольного четырехугольника 446

ГЛАВА VI.

ПРИНЦИПЫ ПРИЛОЖЕНИЯ КОНФОРМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ.

§ 1. Введение.

№ 1. О преобразовании оператора Лапласа 452
№ 2. Преобразование бигармонического оператора. Формула Гурса. Связь бигармонических функций с плоской задачей теории упругости 453
№ 3. Преобразование предельных условий 462
№ 4. Интегралы типа Коши. Их вычисление 465

§ 2. Задача Дирихле.

№ 1. Интеграл Пуассона 470
№ 2. Интеграл Пуассона для внешности круга 474
№ 3. Задача Дирихле для полуплоскости 476
№ 4. Задача Дирихле для кольца . . . . . —
№ 5. Формула Шварца. Нахождение сопряженной гармонической функции 478

§ 3 Задача Неймана.

№ 1. Формула Дини 481
№ 2. Внешность окружности 484
№ 3. Задача Неймана для полуплоскости 485
№ 4. Задача Неймана для кольца 486

§ 3. Общая предельная задача для гармонических функций.

№ 1. Постановка задачи. Случай постоянных коэфициентов в предельном условии 488
№ 2. Задача Гильберта 493
№ 3. Общая предельная задача 497

§ 4. Основные задачи для бигармонических функций

№ 1. Первая основная задача. Приведение к системе уравнений . . . 501
№ 2. Вторая основная задача. Приведение к системе уравнений . . . 512
№ 3. Первая основная задача. Приведение к функциональным уравнениям 513
№ 4. Вторая основная задача. Приведение к функциональным уравнениям 521

Ответственный редактор *Д. К. Кноль.* Технический редактор *Р. В. Эндина.*
Сдана в набор 13/II 1935 г. Подписана к печати 15/V 1936 г.
Формат 62×94¹/₁₆. Изд. № 102. Бум. листов 16¹/₂. Тип. зн. в 1 бум. л. 103808.
Ленгорлит № 10721. Тираж 5000. Учетно-авт. л. 34,3. Заказ № 194.

2-я тип. ОНТИ им. Евг. Соколовой. Ленинград, пр. Кр. Команд., 29.